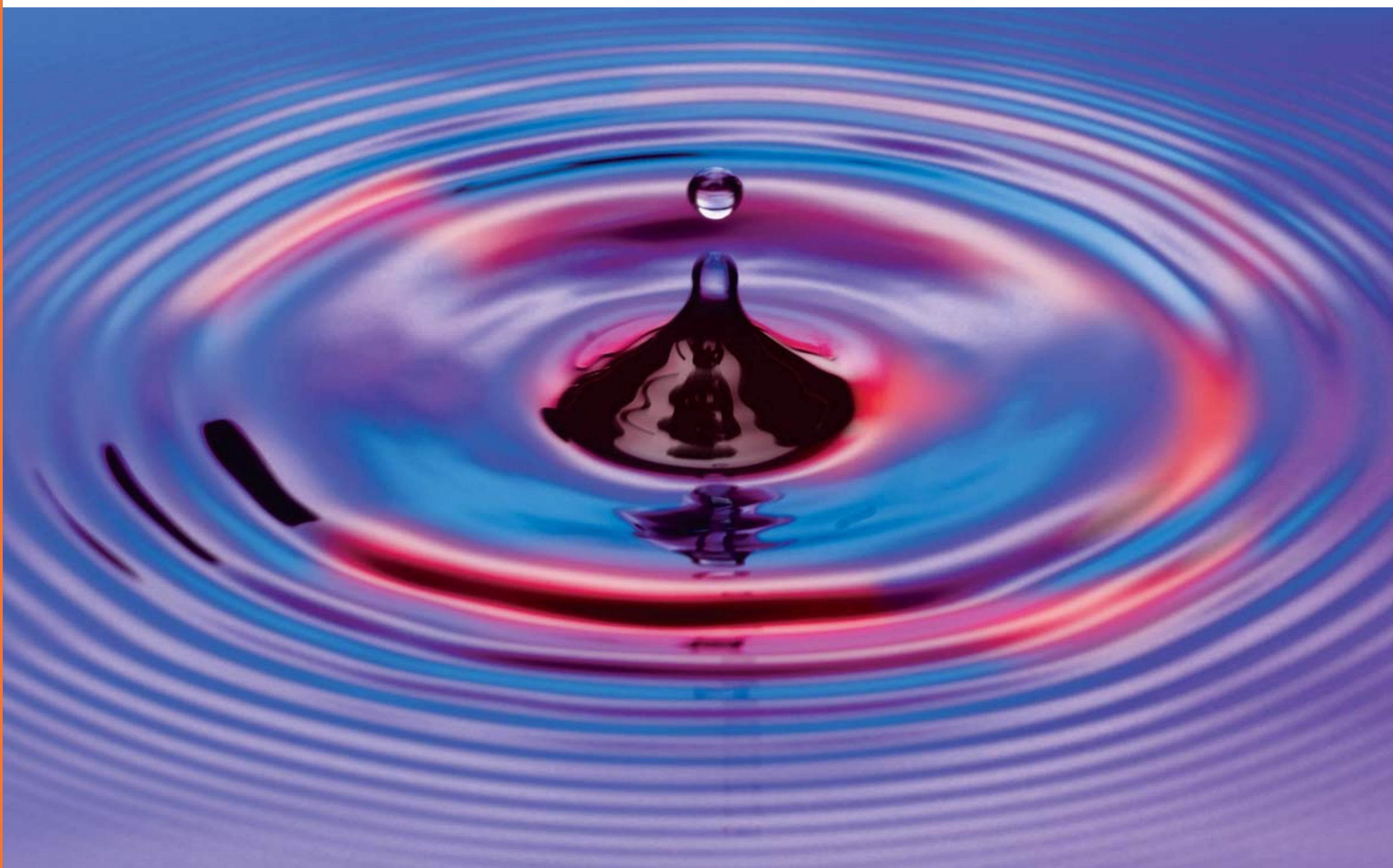
CENGAGE Learning

TEORÍA MICROECONÓMICA

PRINCIPIOS BÁSICOS Y AMPLIACIONES



NOVENA EDICIÓN

WALTER NICHOLSON

TEORÍA MICROECONÓMICA

PRINCIPIOS BÁSICOS Y AMPLIACIONES

Novena edición

TEORÍA MICROECONÓMICA

PRINCIPIOS BÁSICOS Y AMPLIACIONES

Novena edición

WALTER NICHOLSON

Revisión técnica

Marcos S. Ávalos Bracho
Centro de Alta Dirección
en Economía y Negocios
Universidad Anáhuac

Ma. Mercedes Muñoz Sánchez
Tecnológico de Monterrey
Campus Estado de México

CENGAGE Learning™

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning™

***Teoría microeconómica. Principios básicos y ampliaciones.* 9a. ed.**
Walter Nicholson

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Javier Arellano Gutiérrez

Director general México y Centroamérica:
Héctor Enrique Galindo Iturribarría

Director editorial Latinoamérica:
José Tomás Pérez Bonilla

Director de producción:
Raúl D. Zendejas Espejel

Editor senior:
Javier Reyes Martínez

Editora de producción:
Abril Vega Orozco

Traducido del libro *Microeconomic Theory. Basic Principles and Extensions*, 9th ed. Publicado en inglés por South Western, una compañía de Thomson Learning (Copyright © 2005).
ISBN 0-324-27086-0
Datos para catalogación bibliográfica:
Nicholson, Walter. *Teoría microeconómica. Principios básicos y ampliaciones,* 9a. ed.
ISBN-10: 607-481-407-4
ISBN-13: 978-607-481-407-1

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 11 10 09 08

A Beth, Sarah y David, quienes se comportan como si hubieran entendido microeconomía.

Acerca del autor

Walter Nicholson es profesor de economía Ward H. Patton en Amherst College. Se graduó en matemáticas en Williams College y se doctoró en economía en el Massachusetts Institute of Technology. Está especialmente interesado en el análisis econométrico de los problemas del mercado de trabajo, incluyendo cuestiones de bienestar, desempleo y el efecto del comercio internacional. Otro de sus libros es *Microeconomía intermedia*, publicado también por Thomson.

Contenido breve

Contenido

Prefacio

La novena edición de *Teoría microeconómica: Principios básicos y ampliaciones* ofrece al lector la más clara y cuidadosa presentación de los conceptos de la microeconomía moderna. Esto se logra por la inclusión de explicaciones claras e intuitivas de los principales resultados teóricos y por el énfasis en la estructura matemática que es común para muchos problemas de microeconomía. Se proveen vínculos a la literatura más avanzada y a las aplicaciones prácticas mediante la sección *Ampliaciones* que reúne abundantes resultados que a menudo se abordan en la literatura profesional. De manera ideal, la inclusión de este material hace la lextura más accesible.

Lo nuevo en la novena edición

Los cambios más importantes en esta edición se presentan en los primeros nueve capítulos. En ellos he intentado mejorar y ampliar el material básico sobre la maximización de la utilidad y sobre teoría de la empresa. Un cambio importante con respecto a las ediciones anteriores es la adopción de una notación en microeconomía mejorada y consistente para estas partes del libro. A pesar de que en apariencia ésta no es una notación estándar en microeconomía, considero que conforma bien la práctica actual. Otro de los cambios fundamentales en las secciones de la teoría central del libro incluyen:

- Una exhaustiva revisión de la teoría de la demanda con atención especial en las funciones de gasto y las relaciones que pueden derivarse de ellas.
- Una cobertura más entendible de las funciones de costo, enfocándose en cómo el grado de sustitución entre los factores se refleja en tales funciones.
- Una cobertura ampliada del concepto de función de ganancias con un análisis detallado de cómo esta función genera las funciones de demanda de factores.
- Un número de ejemplos matemáticos nuevos que se emplea ampliamente en formas funcionales.

Los cambios y mejoras en esta novena edición son notables y entre ellos destacan los siguientes:

- Introducción de modelos sencillos de equilibrio general de dos bienes.
- Material nuevo acerca de economía de la información, y de manera especial una presentación ampliada de cuestiones del agente-principal y de aspectos más generales de mecanismos de diseño de incentivos compatibles.
- Numerosas secciones breves sobre temas como bienes durables, aversión al riesgo y equilibrio del mercado de trabajo.
- Abundantes problemas y ejemplos matemáticos que acompañan el nuevo material teórico recién incorporado.

Recursos para el profesor

Este libro cuenta con una serie de recursos para el profesor, los cuales están disponibles en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos. Para mayor información, comuníquese a las oficinas de nuestros representantes o a las siguientes direcciones de correo electrónico:

Thomson México y Centroamérica	clientes@thomsonlearning.com.mx
Thomson América del Sur	cliente@thomsonlearning.com
Thomson Caribe	amy.reyes@thomsonlearning.com
Thomson Cono Sur	thomson@thomsonlearning.com.ar

Además encontrará más apoyos en el sitio Web de este libro:

http://nicholson.swlearning.com.

Las direcciones de los sitios Web de esta obra y de las referidas a lo largo del texto no son administradas por Thomson Learning Iberoamérica, por lo que ésta no es responsable de los cambios que pudieran ocurrir. Sin embargo, le recomendamos visitar con frecuencia dichos sitios para mantenerse al tanto de cualquier actualización.

Agradecimientos

En la preparación de esta nueva edición he recibido comentarios muy útiles de los siguientes profesores:

Ronald S. Warren, Jr., University of Georgia

Nick Feltovich, University of Houston

Steven Marc Goldman, University of California, Berkeley

Gerald M. Lage, Oklahoma State University

Ying Chi Chan, Johns Hopkins University

Carrie Meyer, George Mason University

Stephen Morris, Yale University

James J. Murphy, University of Massachusetts, Amherst

Norman K. Thurston, Brigham Young University

Como siempre, mis colegas y alumnos de Amherst College llevan cierta responsabilidad en esta edición. Frank Westhoff ha sido el más leal de los usuarios de este texto por muchos años y continúa al tanto siempre de numerosas mejoras potenciales.

Agradezco en especial a mi esposa Susan quien ha visto ir y venir 18 ediciones de mis libros de microeconomía; a mis hijos (Kate, David, Tory y Paul). Conforme los integrantes de la siguiente generación (Beth, Sarah y David) crezcan quizás ellos buscarán esclarecer o al menos preguntar por qué todos los libros están dedicados a ellos.

Walter Nicholson
Amherst, Massachusetts
Febrero, 2006

Parte 1

INTRODUCCIÓN

La primera parte de este libro la conforman dos capítulos. El capítulo 1 describe la filosofía general de cómo los economistas diseñan y construyen sus modelos del comportamiento económico. A continuación, el capítulo 2 describe varios de los instrumentos matemáticos que se utilizan para construir dichos modelos y que utilizaremos a lo largo del texto.

Capítulo 1

MODELOS ECONÓMICOS

El propósito básico de este libro es presentar los modelos más importantes que los economistas utilizan para explicar el comportamiento de los consumidores y de las empresas. Estos modelos son centrales para el estudio de todos los campos de la economía. Por ello, es fundamental que entendamos tanto la imperiosidad de su existencia, como el marco básico que utilizamos para crearlos. La meta del capítulo es iniciar el proceso exponiendo algunas de las cuestiones conceptuales que marcan el camino que siguen los economistas para estudiar casi todas las cuestiones que les interesan.

Modelos teóricos

Una economía moderna es una entidad sumamente compleja. En ella, miles de empresas se dedican a producir millones de productos distintos. Millones de individuos trabajan en todo tipo de ocupaciones y deciden cuáles de esos bienes comprarán. Tomemos, por ejemplo, el caso del cacahuate. Los agricultores lo deben cosechar en el momento correcto, para de ahí enviarlo a los procesadores que los convertirán en mantequilla, aceite, cacahuate garapiñado y otras muchas delicias que fabrican con él. Estos procesadores, a su vez, se deben encargar de que sus productos lleguen a miles de establecimientos minoristas, en las cantidades adecuadas para satisfacer la demanda.

Dado que sería imposible describir con detalle las características exclusivas de los mercados del cacahuate, los economistas han optado por hacer abstracciones de las complejidades del mundo real para, de ahí, crear modelos relativamente simples que incluyan elementos "fundamentales". Tal como un mapa de caminos es útil a pesar de que no registre todas las casas ni todas las tiendas, así también los modelos económicos, por decir, del mercado del cacahuate son muy útiles a pesar de que no registren todas las características de la economía del cacahuate hasta su más mínimo detalle. En este libro estudiaremos los modelos económicos que se emplean con más frecuencia. Veremos que éstos, a pesar de que en ocasiones hacen abstracciones heroicas de las complejidades del mundo real, no por ello dejan de captar muchas de las características esenciales que son comunes a todas las actividades económicas.

Tanto las ciencias físicas como las sociales hacen uso amplio de modelos. En el caso de la física, el concepto de un vacío "perfecto" o de un gas "ideal" es una abstracción que permite a los científicos estudiar fenómenos reales en contextos simplificados. En el caso de la química, el concepto de un átomo o de una molécula es, de hecho, un modelo muy simplificado de la estructura de la materia. Los arquitectos utilizan maquetas para planificar edificios. Los técnicos en reparación de televisores se refieren a diagramas de los cables para poder detectar los problemas de los aparatos. Los modelos de los economistas cumplen con funciones similares. Estos modelos son representaciones de la forma en que los individuos toman decisiones, en que se comportan las empresas y en que estos dos grupos interactúan y constituyen los mercados.

Verificación de los modelos económicos

Por supuesto que no todos los modelos resultan "válidos". Por ejemplo, el modelo de Tolomeo, en el cual los planetas se movían alrededor de la Tierra, con el tiempo fue descartado porque no explicaba debidamente el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Un objetivo importante de toda investigación científica consiste en distinguir los modelos "malos" de los "buenos". Se utilizan dos métodos generales para verificar los modelos económicos: 1) el planteamiento directo, que pretende establecer la validez de los supuestos básicos que fundamentan el modelo y 2) el planteamiento indirecto, que pretende confirmar la validez de un modelo simplificado demostrando que predice correctamente los hechos del mundo real. A efecto de ilustrar las diferencias básicas entre estos dos planteamientos, analicemos brevemente un modelo que se utilizará mucho en capítulos posteriores de este libro: el modelo de una empresa que intenta maximizar sus beneficios.

El modelo de maximización de beneficios

El modelo de una empresa que pretende maximizar sus beneficios es, evidentemente, una simplificación de la realidad. No considera los motivos personales de los administradores de la empresa ni los conflictos personales que surgen entre ellos. Supone que las ganancias son la única meta importante de la empresa y resta importancia a otras metas posibles, como ganar poder o prestigio. El modelo también supone que una empresa dispone de información completa sobre sus costos y sobre la naturaleza del mercado en el que vende sus productos como para poder descubrir cuáles son sus verdaderas opciones para maximizar sus beneficios. Por supuesto que la mayor parte de las empresas no dispone de esta información. Sin embargo, estas deficiencias del modelo no son necesariamente graves. Ningún modelo describe la realidad con exactitud. La cuestión de fondo radica en saber si podemos considerar que el modelo simple es válido o no.

Comprobación de los supuestos

Para comprobar el modelo de una empresa que maximiza los beneficios investigaríamos un supuesto básico: ¿las empresas realmente buscan obtener el máximo de ganancias? Algunos economistas han analizado esta interrogante enviando cuestionarios a ejecutivos, pidiéndoles que especifiquen cuáles son las metas que persiguen. Los resultados de estos estudios son muy variados. Los empresarios con frecuencia hablan de otras metas, y no de los beneficios, o dicen que tan sólo hacen "lo más que pueden", dado que tienen información limitada. Por otra parte, la mayoría de los entrevistados también exhibe un marcado "interés" por los beneficios y es de la opinión que la maximización de los beneficios es una meta apropiada. En consecuencia, los resultados de la comprobación del modelo de maximización de beneficios, partiendo de la comprobación de sus supuestos, no han sido contundentes.

Comprobación de las predicciones

Algunos economistas, sobre todo Milton Friedman, niegan que se pueda comprobar un modelo preguntándonos si sus supuestos son "reales".[1] Argumentan que todos los modelos teóricos están fundados en supuestos que "no son reales" y que la esencia misma de las teorías exige que hagamos ciertas abstracciones. Estos economistas llegan a la conclusión de que el único camino para determinar la validez de un modelo es saber si éste es capaz de explicar y de predecir los hechos del mundo real. La comprobación última de un modelo económico ocurre cuando lo confrontamos con los datos de la economía misma.

Friedman ofrece una ilustración importante de este principio. Pregunta qué tipo de teoría utilizaríamos para explicar los tiros de jugadores de billar expertos. Argumenta que las leyes de la velocidad, el momentum y los ángulos de la teoría física clásica representarían un modelo adecuado. Los jugadores de billar efectúan sus tiros *como si* aplicaran estas leyes. Sin embargo, si les preguntáramos si comprenden los principios físicos que sustentan el juego del billar, la mayor parte con seguridad respondería que no. Friedman argumenta que, no obstante, las leyes de la

---

[1]Véase M. Friedman. *Essays in Positive Economics* (Chicago: University of Chicago Press, 1953), cap. 1. Para una visión alternativa que destaca la importancia de utilizar supuestos "realistas", véase H. A. Simon. "Rational Decision Making in Business Organizations", *American Economic Review 69,* núm. 4 (septiembre de 1979), pp. 493-513.

física ofrecen predicciones muy precisas y que, por tanto, debemos aceptarlas como modelos teóricos válidos de cómo juegan al billar los expertos.

Por tanto, si, para predecir el comportamiento de las empresas, partimos del supuesto de que éstas se comportan *como si* estuvieran maximizando los beneficios, con ello estaremos comprobando el modelo de maximización de los beneficios. (Véase el ejemplo 1.1 más adelante en este mismo capítulo.) Si estas predicciones se ajustan razonablemente bien a la realidad, entonces podremos aceptar la hipótesis de la maximización de los beneficios. Sin embargo, si los datos reales no fueran congruentes con el modelo, entonces lo rechazaríamos. Así pues, la comprobación última de las dos teorías radicaría en su capacidad para predecir los *hechos reales*.

Importancia del análisis empírico

El interés central de este libro es la construcción de modelos teóricos. Sin embargo, la meta de estos modelos es conocer algo acerca del mundo real. La inclusión de una larga serie de ejemplos aplicados alargaría innecesariamente un libro ya de por sí voluminoso,[2] pero las secciones de "Ampliaciones" que se incluyen al final de los capítulos ofrecen una transición entre la teoría que presenta el texto y su aplicación en estudios empíricos.

Características generales de los modelos económicos

Sobra decir que, en la actualidad, se utiliza una enorme cantidad de modelos económicos. Los supuestos específicos que usemos y el grado de detalle que ofrezcan variarán, en gran medida, dependiendo del problema analizado. Los tipos de modelos empleados para explicar, por ejemplo, el nivel general de actividad económica de Estados Unidos seguramente serán bastante más agregados y complejos que los usados para interpretar cómo se determinan los precios de las fresas de Arizona. Sin embargo, a pesar de esta enorme variedad de modelos económicos, casi todos ellos incorporan tres elementos comunes: 1) el supuesto *ceteris paribus* (en igualdad de condiciones); 2) el supuesto de que los agentes económicos que toman decisiones pretenden optimizar algo, y 3) una clara diferenciación entre las cuestiones "positivas" y las "normativas". Dado que nos encontraremos con estos tres elementos a lo largo de este libro, es conveniente que, de entrada, veamos brevemente la filosofía que los sustenta.

El supuesto ceteris paribus

Los modelos utilizados en economía, al igual que los utilizados en la mayor parte de las ciencias, tratan de describir relaciones relativamente simples. Un modelo del mercado del trigo, por ejemplo, tal vez trate de explicar el precio del mismo con algunas variables cuantificables, como el salario de los trabajadores agrícolas, la pluviosidad y los ingresos de los consumidores. Esta parsimonia en la especificación del modelo permite estudiar, en un marco simplificado, cómo se determinan los precios del trigo y entender cómo actúan algunas fuerzas específicas. Todo investigador reconoce que muchas fuerzas "externas" (plagas que afectan el trigo, fluctuaciones en los precios de los fertilizantes o de los tractores, cambios en las actitudes de los consumidores que deciden comer o no pan) afectan al precio del trigo y también que, cuando interpreta el modelo, dichas fuerzas se mantienen constantes. Es importante señalar que los economistas no suponen que los demás factores no afectan al precio del trigo, sino más bien suponen que estas otras variables no cambian dentro del periodo que están estudiando. Esto les permite estudiar exclusivamente el efecto de algunas fuerzas, dentro de un contexto simplificado. Todos los modelos económicos utilizan estos supuestos ceteris paribus (en igualdad de condiciones).

El uso del supuesto ceteris paribus plantea algunas dificultades para la comprobación empírica de los modelos económicos con datos del mundo real. En otras ciencias, estos problemas podrían no ser tan graves porque es posible realizar experimentos controlados. Por ejemplo, un físico que quiere comprobar un modelo de la fuerza de gravedad probablemente no lo haría dejando caer objetos desde lo alto del Empire State. Si realizara así los experimentos, éstos estarían sujetos a tantas fuerzas exógenas (corrientes de aire, partículas suspendidas, cambios de tempe-

[2]Para un texto de nivel intermedio que incluye un amplio conjunto de aplicaciones del mundo real, véase W. Nicholson. *Microeconomics Theory and Its Application*, 9a. ed. (Thompson/Southwestern, Mason, Ohio, 2004).

ratura, etc.) que no podría comprobar con precisión su teoría. Por el contrario, el físico realizaría sus experimentos en un laboratorio, utilizando un vacío parcial que le permita controlar o eliminar la mayor parte de las otras fuerzas. Así, podría comprobar su teoría en un contexto simple, sin tener que considerar todas las demás fuerzas que, en el mundo real, afectan la caída de los cuerpos.

Salvo por algunas honrosas excepciones, los economistas no han podido realizar experimentos controlados para comprobar sus modelos. Por el contrario, cuando comprueban sus teorías, han tenido que recurrir a diversos métodos estadísticos para poder controlar las otras fuerzas. En principio, estos métodos estadísticos son tan válidos como los de los experimentos controlados que usan otros científicos, pero en la práctica plantean toda una serie de delicadas cuestiones. Por ello, las limitaciones y el significado exacto del supuesto ceteris paribus en economía han sido objeto de más controversias que en otras ciencias experimentales.

Supuestos de la optimización

Muchos modelos económicos parten del supuesto que los agentes económicos que son objeto de estudio persiguen una meta racionalmente. Antes, cuando hablamos del concepto de la empresa que maximiza los beneficios, analizamos brevemente este supuesto. El ejemplo 1.1 muestra cómo podemos utilizar el modelo para plantear predicciones comprobables. Otros ejemplos que encontraremos en este libro incluyen a los consumidores que maximizan su propio bienestar (utilidad), a las empresas que minimizan costos y a los legisladores que buscan maximizar el bienestar público. Si bien, como demostraremos, todos estos supuestos pueden ser controvertidos en cierto sentido, también todos son aceptados, en general, como un buen punto de partida para crear modelos económicos. Al parecer, la aceptación se debe a dos razones. La primera es que los supuestos de optimización son muy útiles para generar modelos precisos y resolubles. Esto se debe, principalmente, a que los modelos pueden estar fundados en diversas técnicas matemáticas idóneas para los problemas de optimización. En el capítulo 2 analizaremos muchas de estas técnicas y la lógica que las sustenta. La segunda razón de la popularidad de los modelos de optimización se debe a su aparente validez empírica. Como demuestran algunas secciones de nuestras ampliaciones, estos modelos parecen ser bastante buenos para explicar la realidad. En definitiva, los modelos de optimización han llegado a ocupar un lugar prominente en la teoría económica moderna.

Maximización de beneficios

La hipótesis de la maximización de beneficios ofrece una buena ilustración de cómo utilizar los supuestos de la optimización para generar proposiciones, empíricamente comprobables, sobre el comportamiento de la economía. Supongamos que una empresa puede vender todo el producto que quiera, a un precio de p por unidad y que el total de los costos de producción, C, depende de la cantidad producida, q. En consecuencia los beneficios están determinados por:

$$\textbf{beneficios} = \pi = pq - C(q). \tag{1.1}$$

Para maximizar los beneficios debemos determinar el valor de q que, en la ecuación 1.1, maximiza la expresión de las ganancias. Se trata de un sencillo problema de cálculo. La diferencia entre la ecuación 1.1 y el contexto en el cual la derivada es igual a cero nos da la siguiente condición de primer orden para un máximo:

$$\frac{d\pi}{dq} = p - C'(q) = 0 \quad \text{o} \quad p = C'(q). \tag{1.2}$$

En otras palabras, determinamos el nivel de producción que maximiza los beneficios (por decir q^*) escogiendo un nivel de producción donde el precio es igual al costo marginal, es decir, el cambio en C para un cambio en q, que es $C'(q)$. Con seguridad este resultado le es conocido gracias a su curso de introducción a la economía. Nótese que, en esta derivación, tratamos el precio de la producción de la empresa como una constante, porque la empresa es tomadora de precios.

La ecuación 1.2 sólo es la condición de primer orden para un máximo. Si tomamos en cuenta la condición de segundo orden, ello ayudará a derivar una implicación comprobable de este modelo. La condición de segundo orden para un máximo es que en q^* debemos tener que:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -C''(q) < 0 \quad \text{o} \quad C''(q^*) > 0. \tag{1.3}$$

Es decir, el costo marginal es creciente en q^* para que éste sea un verdadero punto de beneficios máximos.

Ahora podemos utilizar nuestro modelo para "predecir" cómo reaccionará la empresa ante un cambio de precio. Para ello, diferenciamos la ecuación 1.2 por cuanto se refiere al precio (p), suponiendo que la empresa sigue escogiendo un nivel de maximización de los beneficios de q:

$$\frac{d[p - C'(q^*) = 0]}{dp} = 1 - C''(q^*) \cdot \frac{dq^*}{dp} = 0. \tag{1.4}$$

Al reordenar los términos un poco se obtendrá

$$\frac{dq^*}{dp} = \frac{1}{C''(q^*)} > 0. \tag{1.5}$$

En este caso la desigualdad final vuelve a reflejar el hecho de que el costo marginal debe aumentar para que q^* sea un verdadero máximo. Por tanto, ésta es una de las proposiciones comprobables de la hipótesis de la maximización de beneficios: con todo lo demás en igualdad, una empresa tomadora de precios seguramente responderá a un aumento del precio incrementando su producción. No obstante, si las empresas responden a los aumentos de precio reduciendo su producción, entonces algo anda mal en nuestro modelo.

Aun cuando este modelo es muy sencillo, refleja la forma en que procederemos en gran parte de este libro. En específico, que el hecho de derivar la implicación primaria del modelo mediante el cálculo se limite a demostrar cuál signo tendrá la derivada es un resultado que encontraremos muchas veces.

Pregunta: En términos generales, ¿las implicaciones de este modelo cómo cambiarían si el precio que obtiene una empresa por su producción estuviera en función de la cantidad que vende? Es decir, ¿cómo funcionaría el modelo si abandonáramos el supuesto de que es una tomadora de precios.

Diferencia entre positivismo y normativismo

Una última característica de la mayor parte de los modelos económicos es que tratan de diferenciar, cuidadosamente, las cuestiones "positivas" de las "normativas". Hasta aquí nos hemos ocupado fundamentalmente de las teorías económicas *positivas*. Estas teorías "científicas" toman la realidad como objeto de estudio con la intención de explicar los fenómenos económicos observados. La economía positiva intenta determinar cómo *se asignan* los recursos en una economía. Una aplicación algo distinta de la teoría económica es la *normativa*, la cual adopta una postura definida sobre lo que se *debería* hacer. Bajo el título de análisis normativo, los economistas pueden decir mucho sobre cómo se deberían asignar los recursos. Por ejemplo, un economista que realiza un análisis positivo podría investigar cómo se *determinan* los precios en el sector económico de la salud en Estados Unidos. El economista tal vez también quiera medir los costos y los beneficios que entraña asignar aun más recursos a los servicios de salud. Sin embargo, cuando este economista afirma que se deberían asignar más recursos a la *salud*, su análisis será normativo.

Algunos economistas consideran que el único análisis económico correcto es el análisis positivo. Partiendo de una analogía con las ciencias físicas, afirman que la economía "científica" sólo se debería ocupar de describir (y posiblemente de predecir) los hechos económicos del mundo real. Consideran que adoptar posturas morales y que defender intereses particulares no es competencia de un economista, cuando actúa como tal. Sin embargo, otros economistas consideran que la aplicación estricta de la diferencia entre positivismo y normativismo no tiene lugar en las cuestiones económicas. Consideran que el estudio de la economía implica, necesariamente, las opiniones personales de los investigadores sobre cuestiones de ética, moral y justicia. Según estos economistas, en estas circunstancias, es inútil tratar de encontrar una "objetividad" científica. No obstante esta ambigüedad, este libro adopta, fundamentalmente, una perspectiva positivista y deja la decisión de las cuestiones normativas en manos del lector.

Desarrollo de la teoría económica del valor

La actividad económica ha sido un tema esencial en todas las sociedades, pero no es raro que, hasta hace relativamente poco, estas actividades no hayan sido estudiadas con detalle. Se consideraba que los fenómenos económicos, en su mayor parte, eran un aspecto básico del comportamiento humano que no tenía interés suficiente para merecer atención especial. Ciertamente, los individuos siempre han estudiado las actividades económicas con miras a obtener algún tipo de ganancia personal. Los comerciantes romanos no eran ajenos a cómo obtener ganancias de sus transacciones. Empero, las investigaciones a fondo de la esencia básica de estas actividades no empezaron sino hasta el siglo XVIII.[3] Dado que este libro trata de la teoría económica tal y como la conocemos en la actualidad, y no de la historia del pensamiento económico, nuestro análisis de la evolución de la teoría económica será breve. Sólo se analizará una parte del estudio de la economía en su contexto histórico: la *teoría del valor*.

El pensamiento económico inicial

No es extraño que la teoría del valor se ocupe de los determinantes del "valor" de un bien. El estudio de este tema es el corazón de la teoría microeconómica moderna y está estrechamente relacionado con el problema económico fundamental de la asignación de recursos escasos para fines alternativos. El punto de partida lógico es una definición del término *valor*. Por desgracia, el significado de este término no ha sido siempre el mismo a lo largo del desarrollo de este tema.[4] Hoy en día consideramos que "valor" es sinónimo del "precio" de un bien. Sin embargo, los primeros filósofos-economistas marcaban una diferencia entre el precio de mercado de un bien y su valor. Así pues, pensaban que el término "valor" era sinónimo, en cierto sentido, de "importancia", "esencialidad" o (a veces), "divinidad". Puesto que "precio" y "valor" eran conceptos distintos, éstos podían diferir y, así, la mayor parte de los primeros análisis económicos se centraron en estas divergencias. Por ejemplo, santo Tomás de Aquino creía que el valor estaba determinado por obra de Dios. Por tanto, como los precios eran fijados por los humanos, el precio de un bien podía no ser igual a su valor. Una persona acusada de fijar un precio superior al valor del bien era culpable de fijar un precio "injusto". Por ejemplo, santo Tomás pensaba que la tasa de interés "justa" era de cero. Todo prestamista que exigiera un pago por el uso del dinero estaba fijando un precio injusto y los jerarcas eclesiásticos le podían someter a juicio, caso que ocurría con frecuencia.

El surgimiento de la economía moderna

En la segunda parte del siglo XVIII, los filósofos empezaron a plantear las cuestiones económicas en forma más "científica". En general, se considera que la publicación de *La riqueza de las naciones* de Adam Smith (1723-1790), en 1776, marca el punto de partida de la economía moderna. En su amplia y exhaustiva obra, Smith estableció las bases del pensamiento, ordenado y sistemático, de las fuerzas económicas. No obstante, Smith y sus sucesores inmediatos, como David Ricardo (1772-1823), siguieron señalando la diferencia entre valor y precio. Por ejemplo, Smith pensaba que el valor de un bien significaba su "valor de uso", mientras que su precio representaba su "valor de cambio". La diferencia entre estos dos conceptos fue ilustrada con la

---

[3]Encontrará un tratamiento detallado del pensamiento económico inicial en la obra clásica de J. A. Schumpeter, *History of Economic Analysis*, Oxford University Press, Nueva York, 1954, parte II, capítulos 1, 2 y 3.

[4]Esto no es del todo cierto cuando existen "externalidades" y debemos marcar una diferencia entre el valor privado y el social (véase el capítulo 20).

famosa paradoja del agua y los diamantes. El agua, que evidentemente tiene un gran valor de uso, tiene escaso valor de cambio (un precio muy bajo); los diamantes tienen un escaso uso práctico, pero un gran valor de cambio. La paradoja que intentaron resolver los primeros economistas se deriva de la observación que algunos artículos muy útiles tienen precios muy bajos, mientras que otros que no son esenciales tienen precios muy altos.

La teoría del valor de cambio del trabajo

Ni Smith ni Ricardo resolvieron nunca, de forma satisfactoria, la paradoja del agua y los diamantes. El debate del concepto del valor quedó en manos de los filósofos, mientras que los economistas dirigieron su atención a explicar los determinantes del valor de cambio (es decir, a explicar los precios relativos). Una posible explicación obvia es que el valor de cambio de los bienes está determinado por lo que cuesta producirlos. Los costos del trabajo son los que más influyen en los costos de producción (al menos así era en tiempos de Smith y Ricardo) y, por tanto, sólo había un corto paso para abrazar la teoría del valor del trabajo. Por ejemplo, parafraseando un ejemplo de Smith, si cazar un ciervo toma el doble de horas de trabajo que cazar un castor, entonces deberíamos intercambiar un ciervo por dos castores. En otras palabras, el precio del ciervo debería ser el doble que el del castor. Así, los diamantes son relativamente caros porque su producción exige una importante cantidad de trabajo.

Los estudiantes que tienen un somero conocimiento de lo que ahora denominamos la *ley de la oferta y la demanda*, pensarán que la explicación de Smith y Ricardo no está completa. ¿Ellos no se daban cuenta de las repercusiones de la demanda en el precio? La respuesta a esta pregunta es "sí" y "no" a la vez. Sí observaron que los precios aumentaban rápidamente en unos periodos y disminuían rápidamente en otros, y atribuyeron estos cambios a variaciones de la demanda. Sin embargo, consideraban que estos cambios eran cuestiones anormales que sólo generaban una divergencia transitoria entre el precio de mercado y el valor del trabajo. Dado que en realidad no habían desarrollado una teoría del valor de uso, tan sólo estaban dispuestos a asignar a la demanda un papel transitorio en la determinación de los precios relativos. Por el contrario, asumieron que los costos laborales de la producción determinaban los valores de cambio a largo plazo.

La revolución marginalista

Entre 1850 y 1880, los economistas empezaron a tomar cada vez más conciencia de que, para construir una alternativa adecuada para la teoría del valor del trabajo, tendrían que inventar una teoría del valor de uso. En la década de 1870, varios economistas descubrieron que la utilidad total de un bien no es la que determina su valor de cambio, sino que, más bien, lo determina la utilidad de la *última unidad consumida*. Por ejemplo, no cabe duda que el agua es muy útil y que es esencial para la vida. Sin embargo, como el agua es relativamente abundante, consumir un vaso más (ceteris paribus) tiene un valor relativamente bajo para la gente. Estos "marginalistas" redefinieron el concepto del valor de uso, haciendo a un lado la idea de utilidad general y tomando una utilidad marginal o creciente, o sea, la *utilidad de una unidad adicional de un bien*. El concepto de la demanda de una unidad adicional de producción contrapuesto al análisis de los costos de producción de Smith y Ricardo llevó a derivar un panorama completo de la determinación del precio.[5]

La síntesis marshalliana de la oferta y la demanda

El economista inglés Alfred Marshall (1842-1924) presentó la definición más clara de estos principios marginales en su obra *Principles of Economics*, publicada en 1890. Marshall demostró que la oferta y la demanda actúan *simultáneamente* para determinar el precio. El inglés señaló que, tal como no podemos especificar cuál de las dos hojas de un par de tijeras es la que corta, así tampoco podemos decir que sólo la oferta o la demanda determinan el precio. La

---

[5]Ricardo había dado antes un primer paso importante para el análisis marginal en su análisis de la renta. Decía en su teoría que, a medida que aumentara la producción de maíz se irían utilizando tierras de menor calidad y esto haría que aumentara el precio del maíz. En su argumento, Ricardo reconocía implícitamente que el costo marginal (el costo de producir una unidad adicional) es el relevante para fijar los precios. Observe que Ricardo mantuvo constantes, de forma implícita, los demás factores de producción cuando analizó la productividad decreciente de la tierra; es decir, aplicó una versión del supuesto ceteris paribus.

FIGURA 1.1 **La curva marshalliana de oferta y demanda**

En su teoría, Marshall decía que la interacción de la oferta y la demanda determina el precio de equilibrio (p^*) y la cantidad de equilibrio (q^*) que será intercambiada en el mercado. Concluía que no es posible afirmar que la oferta o la demanda solas determinan el precio y, por tanto, tampoco es posible afirmar que tan sólo los costos o la utilidad que obtienen los compradores determinan el valor de cambio.

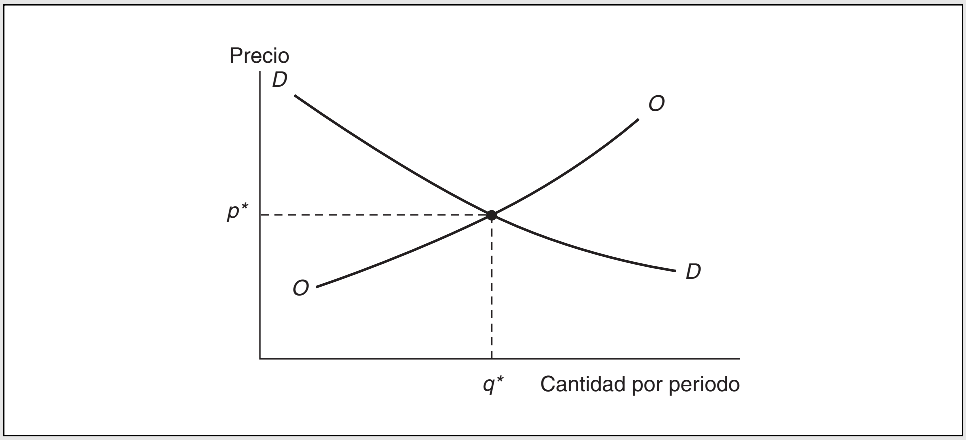


figura 1.1 contiene la famosa intersección entre dos curvas, llamada el equilibrio marshalliano que ilustra este análisis. En el diagrama, el eje horizontal muestra la cantidad demandada de un bien en un periodo y el eje vertical muestra el precio. La curva *DD* representa la cantidad del bien demandado por periodo a cada uno de los precios posibles. La pendiente negativa de la curva refleja el principio marginalista que dice que a medida que la cantidad aumenta, la gente querrá pagar cada vez menos por la última unidad adquirida. El valor de esta última unidad es el que determina el precio de todas las unidades adquiridas. La curva *OO* muestra cómo aumentan los costos de producción (marginales) a medida que se produce más. Esto refleja el aumento del costo de producción de una unidad más a medida que aumenta la producción total. En otras palabras, la pendiente positiva de la curva *OO* refleja costos marginales crecientes, al igual que la pendiente negativa de la curva *DD* refleja un valor marginal decreciente. Las dos curvas se cruzan en p^*, q^*. Éste es un punto de *equilibrio*, o sea, tanto los compradores como los vendedores están contentos con la cantidad intercambiada y con el precio del intercambio. Si una de las curvas se desplaza, el punto de equilibrio se desplazará a otro punto. Así, la interacción entre la oferta y la demanda determina simultáneamente el precio y la cantidad.

Paradoja resuelta

El modelo de Marshall resuelve la paradoja del agua y los diamantes. Los precios reflejan tanto el valor marginal que los demandantes otorgan a los bienes, como los costos marginales de la producción de los mismos. Así las cosas, no hay paradoja alguna. El agua tiene un precio bajo porque tiene tanto un bajo valor marginal como un bajo costo marginal de producción. De otra parte, los diamantes tienen un precio alto porque tienen un alto valor marginal (porque la gente está dispuesta a pagar bastante por otro diamante más) y un alto costo marginal de producción. Este modelo básico de la oferta y la demanda fundamenta gran parte de los análisis que realizamos en este libro.

Modelos de equilibrio general

El modelo marshalliano es un instrumento sumamente útil y versátil, pero se trata de un *modelo de un equilibrio parcial*, porque sólo observa un mercado a la vez. En algunos casos, esta estrechez de observación ofrece sencillez para el análisis y respuestas valiosas. Sin embargo, en el caso de cuestiones más amplias, una perspectiva tan estrecha puede impedir que descubramos

EJEMPLO 1.2

Equilibrio entre oferta y demanda

Las representaciones gráficas son adecuadas para algunos fines, pero los economistas suelen utilizar representaciones algebraicas de sus modelos, tanto para clarificar sus argumentos, como para hacerlos más precisos. Como un primer ejemplo elemental, suponga que queremos estudiar el mercado del cacahuate y que, partiendo del análisis estadístico de datos históricos, concluimos que la cantidad de cacahuate demandada cada semana (q, medida en toneladas) depende del precio del cacahuate (p, medido en dólares por tonelada) según la ecuación

$$\textbf{cantidad demandada} = q_D = \mathbf{1000 - 100}p. \tag{1.6}$$

Dado que la ecuación para q_D incluye una sola variable independiente p, implícitamente mantenemos constantes todos los demás factores que podrían afectar la demanda de cacahuate. La ecuación 1.6 indica que, estando lo demás en igualdad de condiciones, a un precio de \$5 por tonelada, la gente demandará 500 toneladas de cacahuate, mientras que, a un precio de \$4 por tonelada, la gente demandará 600 toneladas. El coeficiente negativo de p en la ecuación 1.6 refleja el principio marginalista de que un precio más bajo provocará que la gente compre más cacahuate.

Para completar este sencillo modelo de los precios, suponga que la cantidad ofrecida de cacahuate también depende del precio:

$$\textbf{cantidad ofrecida} = q_S = \mathbf{-125 + 125}p. \tag{1.7}$$

Aquí, el coeficiente positivo del precio también refleja el principio marginal de que un mayor precio provocará un incremento de la oferta, fundamentalmente porque, como vimos en el ejemplo 1.1, éste permite a la empresa contraer mayores costos marginales de producción sin sufrir pérdidas con las unidades adicionales producidas.

Determinación del precio de equilibrio. Las ecuaciones 1.6 y 1.7 reflejan, por tanto, nuestro modelo de determinación del precio en el mercado del cacahuate. Podemos determinar el precio de equilibrio haciendo que la cantidad demandada sea igual a la cantidad ofrecida:

$$q_D = q_S \tag{1.8}$$

o

$$1000 - 100p = -125 + 125p \tag{1.9}$$

o

$$225p = 1125 \tag{1.10}$$

por tanto,

$$p^* = 5. \tag{1.11}$$

Este mercado estará en equilibrio a un precio de \$5 por tonelada, es decir, a este precio, la gente querrá comprar 500 toneladas, que es exactamente la cantidad que querrán ofrecer los productores de cacahuate. La figura 1.2 muestra este equilibrio, gráficamente, con la intersección de *D* y *O*.

Un modelo más general. A efecto de ilustrar cómo podríamos utilizar este modelo de oferta-demanda, adoptemos una notación más general. Supongamos ahora que las funciones de oferta y demanda están dadas por

$$q_D = a + bp \quad y \quad q_S = c + dp \tag{1.12}$$

(*continúa*)

EJEMPLO 1.2 *CONTINUACIÓN*

donde a y c son constantes que podemos utilizar para modificar las curvas de oferta y de demanda, respectivamente, y donde b (<0) y d (>0) representan la reacción que tienen ante los precios aquellos que ofrecen y aquellos que demandan. En este mercado, el equilibrio requiere que

$$q_D = q_S$$

o **(1.13)**

$$a + bp = c + dp$$

Por tanto, el precio de equilibrio está dado por[6]

$$p^* = \frac{a - c}{d - b}. \tag{1.14}$$

Nótese que, en nuestro ejemplo anterior, $a = 1000$, $b = -100$, $c = -125$ y $d = 125$, por tanto

$$p^* = \frac{1000 + 125}{125 + 100} = \frac{1125}{225} = 5. \tag{1.15}$$

Sin embargo, con esta formulación más general, podemos plantear interrogantes respecto a los cambios que registraría el precio de equilibrio si la curva de oferta o la de demanda variaran. Por ejemplo, la diferenciación de la ecuación 1.14 demuestra que

$$\frac{dp^*}{da} = \frac{1}{d - b} > 0$$

y **(1.16)**

$$\frac{dp^*}{dc} = \frac{-1}{d - b} < 0$$

Es decir, un incremento de la demanda (un incremento de a) incrementa el precio de equilibrio, mientras que un incremento de la oferta (un incremento de c) disminuye el precio. Esto es precisamente lo que mostraría el análisis gráfico de las curvas de oferta y de demanda. Por ejemplo, la figura 1.2 muestra que cuando un término constante, a, de la ecuación de demanda aumenta a 1450, el precio de equilibrio aumenta a $p^* = 7$ [=(1450 + 125)/225].

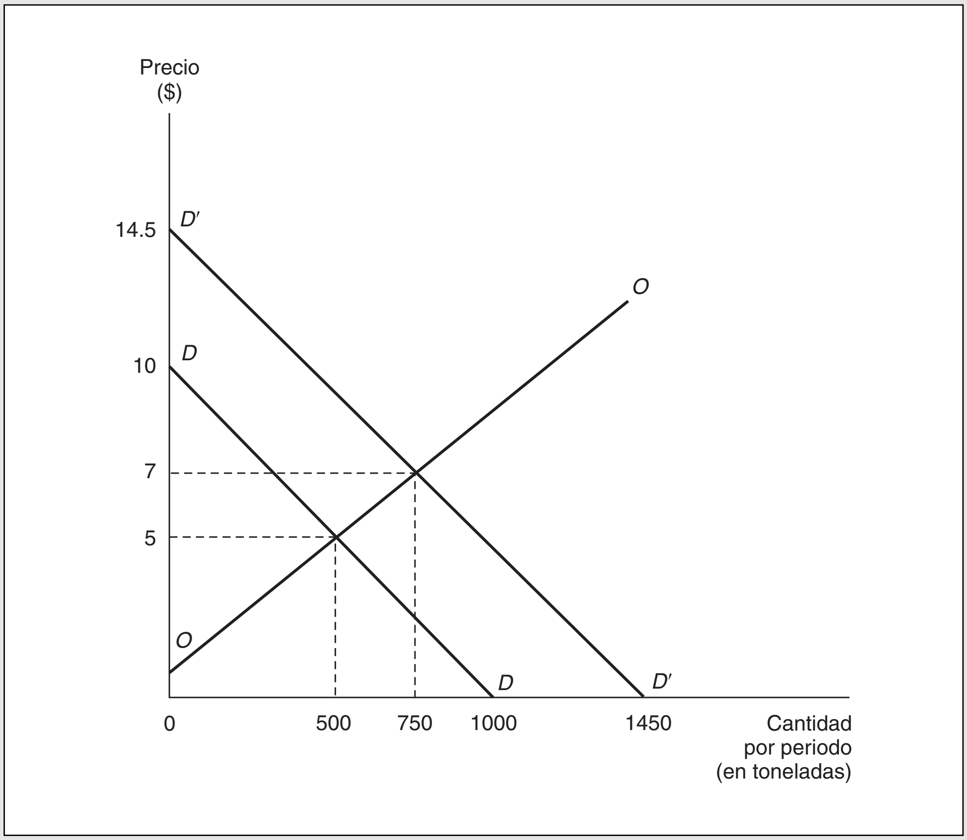
Pregunta: ¿Cómo podría usted utilizar la ecuación 1.16 para "predecir" de qué modo cada unidad de incremento de la constante a afecta a p^*? ¿Esta ecuación predice correctamente el incremento de p^* cuando la constante a sube de 1000 a 1450?

importantes relaciones entre los mercados. Si queremos responder a estas cuestiones más generales, entonces necesitamos un modelo del conjunto de la economía que refleje adecuadamente las relaciones entre diversos mercados y agentes económicos. El economista francés Leon Walras (1831-1910), partiendo de una larga tradición europea en este tipo de análisis, estableció las bases de las investigaciones modernas para estas cuestiones genéricas. Su método de representar la economía mediante un gran número de ecuaciones simultáneas es fundamental para comprender las relaciones implícitas en el *análisis del equilibrio general.* Walras se dio cuenta de que no podemos hablar de un único mercado aislado y de que es necesario un modelo que permita seguir los efectos que el cambio en un mercado produce en otros mercados.

[6] La ecuación 1.14 a veces se conoce como la "forma reducida" del modelo estructural de oferta-demanda de las ecuaciones 1.12 y 1.13. Demuestra que el valor de equilibrio de la variable endógena p al final de cuentas, depende exclusivamente de los factores exógenos del modelo (a y c) y de los parámetros del comportamiento b y d. Podemos calcular una ecuación similar para la cantidad de equilibrio.

FIGURA 1.2 **Cambio del equilibrio entre oferta y demanda**

El equilibrio inicial entre oferta y demanda está ilustrado por la intersección de D y O ($p^* = 5$, $q^* = 500$). Cuando la demanda se desplaza a $q_{D'} = 1450 - 100p$ (que se muestra como D'), el equilibrio se desplaza a $p^* = 7$, $q^* = 750$.



Por ejemplo, supongamos que aumenta la demanda de cacahuate y que ello provoca que aumente su precio. El análisis marshalliano buscaría comprender el tamaño de este incremento observando las condiciones de la oferta y la demanda en el mercado del cacahuate. El análisis del equilibrio general no sólo observaría ese mercado, sino también sus repercusiones en otros mercados. El incremento en el precio del cacahuate incrementaría los costos para los fabricantes de mantequilla de cacahuate y ello, a su vez, afectaría la curva de oferta de mantequilla de cacahuate. Asimismo, el incremento en el precio del cacahuate podría implicar un aumento del precio de la tierra para los agricultores que cultivan cacahuate y ello afectaría las curvas de demanda de todos los productos que adquieren. Las curvas de demanda de automóviles, muebles y viajes al extranjero se desplazarían hacia fuera, y eso podría generar ingresos adicionales para los proveedores de estos productos. Por tanto, los efectos del incremento inicial de la demanda de cacahuate terminarían propagándose por toda la economía. El análisis del equilibrio general intenta desarrollar modelos que permiten analizar estos efectos en un contexto simplificado. La parte 4 de este libro describe varios modelos de este tipo.

La frontera de posibilidades de producción

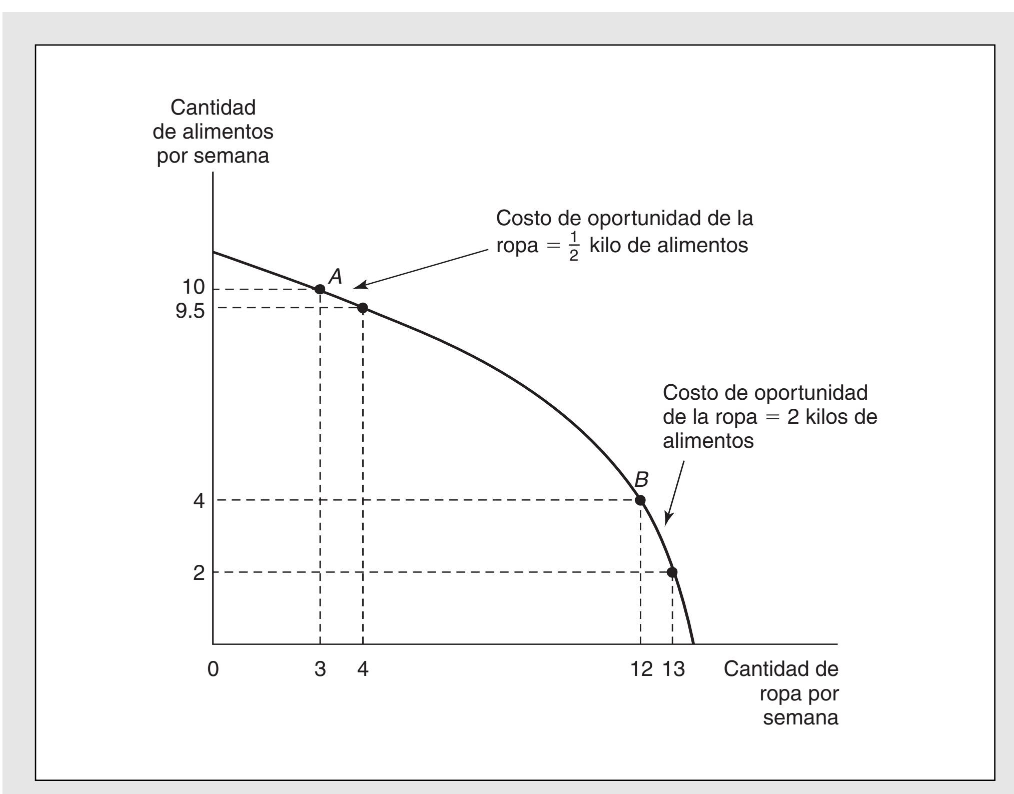
Aquí se presentan brevemente algunos modelos de equilibrio general utilizando otra gráfica que usted seguramente recordará de sus cursos de introducción a la economía: la *frontera de posibilidades de producción*. Esta gráfica muestra las diversas cantidades de dos bienes que una economía puede producir, utilizando sus recursos disponibles, durante un periodo determinado (por ejemplo, una semana). Dado que la frontera de posibilidades de producción muestra dos bienes, en vez de uno solo como en el modelo de Marshall, lo utilizamos como fundamento de los modelos de equilibrio general.

La figura 1.3 muestra la frontera de posibilidades de producción de dos bienes: alimentos y ropa. La gráfica ilustra la oferta de estos bienes mostrando las combinaciones que podríamos producir con los recursos de esta economía. Por ejemplo, podríamos producir 10 kilos de alimentos y 3 unidades de ropa, o 4 kilos de alimentos y 12 unidades de ropa. También podríamos producir muchas otras combinaciones de alimentos y ropa. La frontera de posibilidades de producción las muestra todas. No podemos producir las combinaciones de alimentos y ropa que quedan fuera de la frontera porque no hay suficientes recursos disponibles. La frontera de posibilidades de producción nos recuerda el hecho económico básico de que los recursos son escasos, es decir, que no hay recursos disponibles suficientes para producir toda la cantidad que querríamos de cada bien.

Esta escasez significa que debemos elegir cuánto queremos producir de cada bien. La figura 1.3 deja claro que cada elección tiene sus costos. Por ejemplo, si esta economía produce 10 kilos de alimentos y 3 unidades de ropa en el punto *A*, la producción de una unidad más de ropa "costaría" ½ kilo de alimentos, es decir, el incremento de una unidad en la producción de ropa implica que la producción de alimentos tendría que bajar ½ kilo. Así, el *costo de oportunidad* de una unidad de ropa en el punto *A* es ½ kilo de alimentos. De otra parte, si la economía produce inicial-

FIGURA 1.3 **La frontera de posibilidades de producción**

La frontera de posibilidades de producción muestra las distintas combinaciones de dos bienes que podemos producir con una cantidad determinada de recursos escasos. También muestra el costo de oportunidad de producir más cantidad de un bien como la cantidad del otro bien que, en consecuencia, no podemos producir. Si comparamos los puntos *A* y *B* podremos ver el costo de oportunidad de dos niveles distintos de producción de ropa.



mente 4 kilos de alimentos y 12 unidades de ropa en el punto *B* la producción de 1 unidad más de ropa costaría 2 kilos de alimentos. El costo de oportunidad de 1 unidad más de ropa en el punto *B* que en el punto *A,* tanto las ideas de Ricardo como las de Marshall sobre los costos adicionales crecientes sugieren que el costo de oportunidad de 1 unidad adicional de ropa será mayor en el punto *B* que en el punto *A*. Este efecto es precisamente lo que muestra la figura 1.3.

La frontera de posibilidades de producción ofrece dos resultados del equilibrio general que no son evidentes en el modelo de oferta y demanda de Marshall de un solo mercado. El primer resultado que muestra la gráfica es que la producción de más unidades de un bien implica producir menos unidades de otro bien porque los recursos son escasos. Los economistas suelen utilizar (¡quizá con demasiada frecuencia!) la expresión "nada es gratis en la vida" para explicar que toda acción económica tiene costos de oportunidad. El segundo resultado que muestra la frontera de posibilidades de producción es que estos costos de oportunidad dependen de cuánto se produzca de cada bien. La frontera es como una curva de oferta de dos bienes: muestra el costo de oportunidad de producir más cantidad de un bien como la reducción de la cantidad que se produce del otro bien. La frontera de posibilidades de producción es, por tanto, un instrumento particularmente útil para estudiar varios mercados al mismo tiempo.

EJEMPLO 1.3

Una frontera de posibilidades de producción

Suponga que la frontera de posibilidades de producción de dos bienes (x y y) está dada por

$$2x^2 + y^2 = 225. \qquad (1.17)$$

Una gráfica de esta frontera de posibilidades de producción tendría la forma de la cuarta parte de una elipse y se asemejaría a la frontera que muestra la figura 1.3. Algunos puntos de la frontera incluyen ($x = \sqrt{112.5} = 10.6$, $y = 0$), ($x = 10$, $y = 5$), ($x = 5$, $y = \sqrt{175} = 13.2$) y ($x = 0$, $y = 15$). Hay infinitos puntos más que satisfacen la ecuación 1.17. Para determinar la pendiente de la frontera en un punto cualquiera, podemos resolver la ecuación para y,

$$y = \sqrt{225 - 2x^2} \qquad (1.18)$$

y después diferenciar para obtener

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}(225 - 2x^2)^{-1/2} \cdot (-4x) \\ &= \frac{-4x}{2y} = \frac{-2x}{y}. \end{aligned} \qquad (1.19)$$

De aquí que, para $x = 10$, $y = 5$, la pendiente sea $-2(10)/5 = -4$, y el costo de oportunidad de producir una unidad más de x sea una reducción en y de 4 unidades de producción. Para $x = 5$, $y = \sqrt{175}$, el costo de oportunidad de x es $-2(5)/\sqrt{175} = -0.76$, es decir, cuando producimos menos de x el costo de oportunidad es menos en términos de la cantidad de unidades de y que debemos sacrificar para poder producir 1 unidad más de x. En muchas partes de este libro calcularemos las pendientes de esta misma manera a efecto de ilustrar los intercambios inherentes a todos los problemas económicos.

Pregunta: Utilice su calculadora y la ecuación 1.18 para demostrar que la pendiente de esta función es, en efecto, aproximadamente igual a -4 en el punto ($x = 10$, $y = 5$). Es decir, calcule la cantidad de y que podemos producir si $x = 9.99$ o si $x = 10.01$. ¿Por qué su calculadora sólo le permite calcular un valor aproximado de la pendiente exacta en el punto ($x = 10$, $y = 5$)?

Economía del bienestar

Además de su aplicación para analizar cuestiones positivas sobre el funcionamiento de la economía, también podemos utilizar los instrumentos del análisis del equilibrio general para estudiar cuestiones normativas sobre las propiedades de bienestar de diversas soluciones económicas. Si bien estas cuestiones fueron un punto de enfoque importante de los grandes economistas de los siglos XVIII y XIX (Smith, Ricardo, Marx, Marshall, etc.), los avances más significativos en su estudio tal vez hayan sido los realizados por el economista británico Francis Y. Edgeworth (1848-1926) y por el economista italiano Wilfredo Pareto (1848-1923) en los primeros años del siglo XX. Estos economistas ayudaron a proporcionar una definición precisa del concepto de "eficiencia económica" y a demostrar las condiciones necesarias para que los mercados puedan alcanzar esa meta. Al clarificar la relación entre la asignación de recursos y la determinación de sus precios, respaldaron de alguna manera la idea que enunciara Adam Smith originalmente, la cual dice que los mercados que funcionan correctamente tienen una "mano invisible" que ayuda a asignar los recursos con eficiencia. Secciones posteriores de este libro abordan algunas cuestiones del bienestar.

Avances modernos

Las investigaciones en el campo de la economía aumentaron con rapidez después de la Segunda Guerra Mundial. Uno de los principales objetivos de este libro es resumir gran parte de esas investigaciones. Ilustrando cómo los economistas han tratado de crear modelos que expliquen aspectos, cada vez más complejos, del comportamiento económico, este libro pretende colocarle en una posición que le permita reconocer con mayor facilidad las interrogantes que aún no han encontrado respuesta.

Fundamentos matemáticos de los modelos económicos

Uno de los principales avances de la teoría microeconómica después de la guerra fue que se aclararon y formalizaron los supuestos básicos acerca de los individuos y las empresas. Un hito importante en este avance fue la publicación, en 1947, de los *Fundamentos del análisis económico* de Paul Samuelson, donde el autor (el primer estadounidense que recibió el Premio Nóbel en Economía) planteó una serie de modelos del comportamiento de optimización.[7] Samuelson demostró la importancia que tiene fundar los modelos del comportamiento en postulados matemáticos bien especificados, de modo que permitan aplicar las distintas técnicas de optimización de las matemáticas. El peso de este planteamiento hizo patente que las matemáticas habían pasado a formar parte integral de la economía moderna. En el capítulo 2 de este libro revisaremos algunas de las técnicas matemáticas utilizadas con mayor frecuencia.

Nuevos instrumentos para el estudio de los mercados

Otra característica incorporada en este libro es la presentación de una serie de instrumentos nuevos para explicar el equilibrio en el mercado. Éstos incluyen técnicas para describir la fijación de precios en un solo mercado, así como modelos cada vez más sofisticados sobre los precios monopólicos o los modelos de la teoría de juegos, con sus relaciones estratégicas entre las empresas que las utilizan. También incluyen instrumentos de equilibrio general para analizar las relaciones entre muchos mercados simultáneamente. Como veremos, todas estas nuevas técnicas sirven para brindar una descripción más completa y realista del funcionamiento de los mercados.

La economía de la incertidumbre y la información

Un adelanto teórico fundamental registrado en el periodo de la posguerra fue la incorporación de la incertidumbre y de la información imperfecta a los modelos económicos. Algunos de los supuestos básicos utilizados para analizar el comportamiento en situaciones de incertidumbre fueron planteados inicialmente en la década de 1940 en relación con la teoría de juegos. Avances posteriores demostraron que estas ideas se podían utilizar para explicar por qué los individuos tienden a no querer riesgos y cómo recopilarían información para reducir la incertidumbre

---

[7] Paul A. Samuelson. *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947.

que afrontan. En este libro, los problemas de la incertidumbre y de la información a menudo forman parte del análisis.

Computadoras y análisis empírico

Cabe mencionar un último aspecto del avance de la microeconomía después de la guerra: el creciente uso de las computadoras para analizar datos económicos. A medida que las tecnologías informáticas han permitido manejar mayores cantidades de información y realizar complejas manipulaciones matemáticas, la capacidad de los economistas para comprobar sus teorías ha mejorado enormemente. Mientras que las generaciones anteriores se debían contentar con cuadros o análisis gráficos rudimentarios de los datos del mundo real, los economistas de hoy disponen de una amplia variedad de técnicas sofisticadas y de muchos datos microeconómicos que les sirven para comprobar debidamente sus modelos. El objeto y el alcance de este libro no incluyen el análisis de estas técnicas ni de algunas de sus limitaciones, pero las secciones de las ampliaciones al final de la mayor parte de los capítulos le serán de utilidad para comenzar a leer sobre algunas de estas aplicaciones.

RESUMEN

Este capítulo ha presentado algunos antecedentes de la forma en que los economistas abordan el estudio de la asignación de recursos. Gracias a su curso de introducción a la economía, gran parte del material explicado aquí seguramente le resultará familiar. En muchos sentidos, el estudio de la economía representa la adquisición de instrumentos cada vez más sofisticados para abordar los mismos problemas básicos. El objetivo de este libro (y, de hecho, de casi todos los libros de economía para nivel superior) es ofrecerle más instrumentos de este tipo. Como punto de partida, este capítulo le ha recordado los siguientes puntos:

- La economía es el estudio de cómo asignamos los recursos escasos entre usos alternativos. Los economistas tratan de crear modelos sencillos que les ayuden a comprender ese proceso. Muchos de estos modelos están fundados en las matemáticas, porque éstas ofrecen un medio rápido para plantear los modelos y analizar sus consecuencias.
- El modelo económico utilizado con mayor frecuencia es el de la oferta y la demanda que desarrollara en su totalidad, por primera vez, Alfred Marshall a finales del siglo XIX. Este modelo muestra cómo podemos utilizar los precios observados para representar un equilibrio entre los costos de producción que contraen las empresas y la disposición de los demandantes a pagar esos costos.
- El modelo de equilibrio de Marshall sólo es "parcial", es decir, sólo observa un mercado cada vez. Para ver muchos mercados al mismo tiempo tenemos que desarrollar un amplio conjunto de instrumentos de equilibrio general.
- La comprobación de la validez de un modelo económico es, tal vez, la tarea más difícil que deben afrontar los economistas. En ocasiones, podemos evaluar la validez del modelo preguntándonos si está fundado en supuestos "razonables". Sin embargo, lo más frecuente es que evaluemos los modelos en función de qué tan bien explican los hechos económicos del mundo real.

LECTURAS RECOMENDADAS

Sobre metodología

Blaug, Mark. *The Methodology of Economics or How Economists Explain,* Cambridge, Cambridge University Press, 1992.

Un estupendo resumen de varias controversias actuales.

Boland, Lawrence E. "A Critique of Friedman's Critics", *Journal of Economic Literature*, junio de 1979, pp. 503-522.

Un buen resumen de críticas de enfoques positivos de la economía y del papel de la verificación empírica de los supuestos.

Friedman, Milton. "The Methodology of Positive Economics", en *Essays in Positive Economics,* pp. 3-43. Chicago: University of Chicago Press, 1953.
El planteamiento básico de la visión positivista de Friedman.

Harrod, Roy F. "Scope and Method in Economics", *Economic Journal* 48 (1938), pp. 383-412.
Planteamiento clásico del papel que deben desempeñar los modelos económicos.

Hausman, David M. y Michael S. McPherson. "Taking Ethics Seriously: Economics and Contemporary Moral Philosophy", *Journal of Economic Literature*, junio de 1993, pp. 671-731.
Un argumento sólido a favor de que los economistas aborden cuestiones éticas, tanto porque la ética podría influir en el comportamiento de los agentes económicos, como porque los principios morales serían necesarios para determinar la importancia de los resultados de la economía positiva.

McCloskey, Donald N. *If You're So Smart: The Narrative of Economic Expertise,* Chicago: University of Chicago Press, 1990.
McCloskey explica su posición, la cual afirma que la persuasión económica depende de la retórica tanto como de la ciencia. Encontrará un intercambio interesante sobre este tema en los artículos contenidos en el número de junio de 1995 de The Journal of Economic Literature.

Fuentes primarias sobre la historia de la economía

Edgeworth, F. Y. *Mathematical Psychics,* Kegan Paul, Londres, 1881.
Primeras investigaciones sobre la economía del bienestar, inclusive nociones rudimentarias sobre la eficiencia económica y la curva de contrato.

Marshall, A. *Principles of Economics,* 8a. ed., Macmillan & Co., Londres, 1920.
Resumen completo de la posición neoclásica. Texto que goza de popularidad desde hace muchos años. Apéndice matemático muy detallado.

Marx, K. *Capital,* Modern Library, Nueva York, 1906.
Explicación completa de la teoría del valor del trabajo. El planteamiento del "problema de la transformación" es un inicio (tal vez fallido) del análisis del equilibrio general. Contiene críticas fundamentales de la institución de la propiedad privada.

Ricardo, D. *Principles of Political Economy and Taxation,* J. M. Dent & Sons, Londres, 1911.
Obra verdaderamente analítica y bien hilvanada. Pionera en desarrollar un análisis detenido de cuestiones relacionadas con las políticas, especialmente las relativas al intercambio. Explica las primeras nociones básicas del marginalismo.

Smith, A. *The Wealth of Nations,* Modern Library, Nueva York, 1937.
El primer clásico de la economía. Muy largo y detallado, pero Smith fue el primero en hablar prácticamente de todos los temas económicos. Esta edición tiene útiles acotaciones al margen.

Walras, L. *Elements of Pure Economics,* traducción de W. Jaffé, Richard D. Irwin, Homewood, IL, 1954.
El inicio de la teoría del equilibrio general. Muy difícil de leer.

Fuentes secundarias sobre la historia de la economía

Backhouse, Roger E. *The Ordinary Business of Life: The History of Economics from the Ancient World to the 21st Century,* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002.
Historia iconoclasta, bastante buena cuando habla de las primeras ideas económicas, pero tiene algunas lagunas por cuanto se refiere a usos recientes de las matemáticas y la econometría.

Blaug, Mark. *Economic Theory in Retrospect,* 5a. ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
Resumen verdaderamente completo en torno a cuestiones analíticas. Cada capítulo contiene magníficas "Guías para los lectores" que refieren a los clásicos.

Heilbroner, Robert L. *The Worldly Philosophers*, 7a. ed., Simon and Schuster, Nueva York, 1999.

Fascinantes biografías, agradables de leer, de los economistas más importantes. El capítulo sobre los socialistas utópicos y el relativo a Thorstein Veblen especialmente recomendables.

Keynes, John M. *Essays in Biography*, W.W. Norton, Nueva York, 1963.

Ensayos sobre muchos personajes famosos (Lloyd George, Winston Churchill, Leon Trotsky) y varios economistas (Malthus, Marshall, Edgeworth, F. P. Ramsey y Jevons). Demuestra las grandes dotes de escritor de Keynes.

Schumpeter, J. A. *History of Economic Analysis*, Oxford University Press, Nueva York, 1954.

Trato enciclopédico. Cubre a todos los economistas famosos y a otros no tan famosos. También resume brevemente los avances concurrentes en otras ramas de las ciencias sociales.

Capítulo 2

LAS MATEMÁTICAS DE LA OPTIMIZACIÓN

Muchos modelos económicos parten del supuesto que un agente quiere determinar el valor óptimo de una función. En el caso de los consumidores, esa función mide la utilidad que éstos obtienen de sus compras y, en el de las empresas, mide las ganancias de éstas. Sin embargo, en ambos casos, las cuestiones matemáticas formales de la solución son muy similares. En este capítulo se analizarán las matemáticas que son comunes a todo este tipo de problemas. Para aquellos que estén familiarizados con el cálculo multivariable, este capítulo servirá de repaso. Para aquellos que sólo estén familiarizados con algunos conceptos del cálculo básico, este capítulo les proporcionará las bases necesarias para comenzar a analizar el cálculo aplicado a la construcción de modelos microeconómicos. En general, el capítulo pretende ofrecer una referencia que puede resultar muy útil a medida que se presenten estos conceptos matemáticos a lo largo del libro.

Maximización de una función con una variable

Vamos a comenzar con un ejemplo sencillo. Supóngase que el administrador de una empresa quiere maximizar[1] las ganancias que obtendrá de la venta de un bien determinado. Supóngase también que las ganancias (π) que obtenga dependerán exclusivamente de la cantidad (q) que venda de ese bien. Matemáticamente,

$$\pi = f(q). \tag{2.1}$$

La figura 2.1 muestra una posible relación entre π y q. Es evidente que, para obtener la ganancia máxima, el administrador debe producir q^*, con lo cual obtendrá π^* ganancias. Si se tuviera una gráfica como la de la figura 2.1, pensaríamos que es posible resolver este problema con sólo utilizar una regla para medir.

Sin embargo, supóngase que (como, de hecho, sería más probable) el administrador no tiene una descripción tan precisa del mercado. Por tanto, intentará variar q para ver dónde puede obtener la ganancia máxima. Por ejemplo, si se parte de la ganancia q_1, las ganancias de las ventas serían π_1. A continuación, el administrador probaría la producción q_2, y vería que las ganancias han aumentado a π_2. La noción que dicta el sentido común, que indica que las ganancias han aumentado debido al incremento de q quedaría expresada de manera formal como

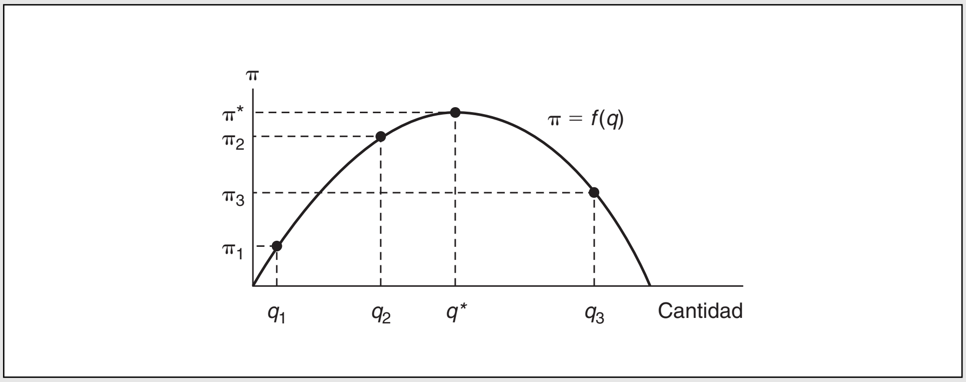
$$\frac{\pi_2 - \pi_1}{q_2 - q_1} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{\Delta\pi}{\Delta q} > 0, \tag{2.2}$$

donde se utiliza el símbolo Δ para indicar "la variación de" π o q. Siempre que $\Delta\pi/\Delta q$ sea positivo, las ganancias irán en aumento y el administrador seguirá incrementando la produción. Sin

[1]En este capítulo, por lo general, estudiaremos problemas de maximización. Para estudiar problemas de minimización tendríamos que adoptar un enfoque prácticamente igual, toda vez que la maximización de $f(x)$ es equivalente a la minimización de $-f(x)$.

FIGURA 2.1 **Relación hipotética entre la cantidad producida y las ganancias**

Si un administrador quiere alcanzar el nivel de producción que maximiza las ganancias, tendría que producir, q^*. Nótese que en q^*, $d\pi/dq = 0$.



embargo, en el caso de incrementos de la producción que se ubiquen a la derecha de q^*, $\Delta\pi/\Delta q$ será negativo, y el administrador sabrá que estaría cometiendo un error si sigue expandiendo q.

Derivadas

Usted sabe que el límite de $\Delta\pi/\Delta q$ para variaciones muy pequeñas de q se llama *derivada* de la función, $\pi = f(q)$, y se escribe como $d\pi/dq$ o df/dq o $f'(q)$. Más formalmente, la derivada de una función $\pi = f(q)$ en el punto q_1 se define como

$$\frac{d\pi}{dq} = \frac{df}{dq} = \lim_{h\to 0} \frac{f(q_1 + h) - f(q_1)}{h}. \qquad \textbf{(2.3)}$$

Observe que el valor de este cociente depende claramente del punto q_1 que se elija.

Valor de la derivada en un punto

Aquí, es preciso mencionar una convención sobre notaciones: a veces es pertinente mostrar de manera explícita el punto en el cual se calculará el valor de la derivada. Por ejemplo, el valor de la derivada en el punto $q = q_1$ se escribiría

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q = q_1} \qquad \textbf{(2.4)}$$

En otras ocasiones, nos interesa el valor de $d\pi/dq$ para todos los valores posibles de q, y entonces no se menciona de manera explícita ningún punto concreto para el cálculo de la derivada.

En el ejemplo de la figura 2.1,

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q = q_1} > 0,$$

mientras que

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q = q_3} < 0.$$

¿Cuál es el valor de $d\pi/dq$ en q^*? Debería ser igual a cero, porque los valores de q inferiores a q^* tienen un valor positivo y los superiores a q^* tienen un valor negativo. La derivada es la pendiente de la curva en cuestión; es decir, esta pendiente es positiva a la izquierda de q^* y negativa a la derecha de q^*. En el punto q^*, la pendiente de $f(q)$ es 0.

Condición de primer orden para el máximo

Este resultado es bastante general. Para que la función de una variable alcance su valor máximo en un punto, la derivada en ese punto (si existe) debe ser cero. De aquí que, si un administrador pudiera estimar la función $f(q)$ con alguna suerte de datos reales, entonces, en teoría, podría encontrar el punto donde $df/dq = 0$. En este punto óptimo (por decir q^*), se cumpliría que

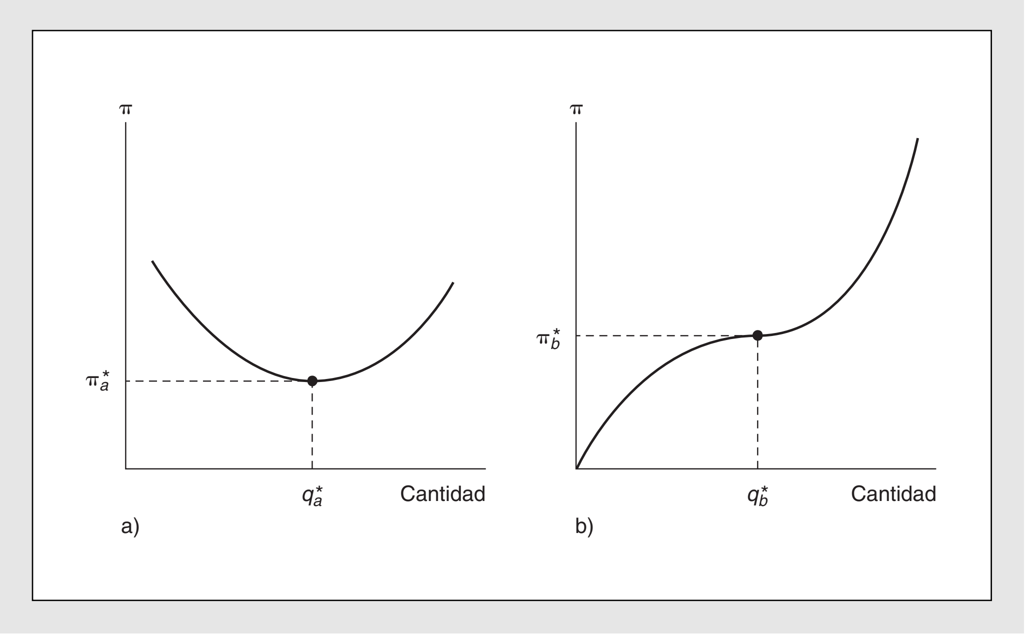
$$\left.\frac{df}{dq}\right|_{q\,=\,q^*} = 0. \tag{2.5}$$

Condiciones de segundo orden

Sin embargo, la aplicación ingenua de esta sola regla podría engañar a un administrador poco experimentado. Por ejemplo, supóngase que la función de las ganancias tiene una de las formas que presentan la figura 2.2a o 2.2b. Si la función de las ganancias es la que muestra la figura 2.2a, entonces el administrador, al producir donde $d\pi/dq = 0$, elegiría el punto q_a^*. Este punto, de hecho, le proporcionará un mínimo, y no un máximo de ganancias. De otra parte, si la función de las ganancias es la que muestra la figura 2.2b, entonces el administrador elegiría el punto q_b^*, que, si bien le ofrece una ganancia superior a la de cualquier nivel de producción inferior a q_b^*, sin duda es inferior a cualquier producción superior a q_b^*. Estas situaciones indican el hecho matemático de que $d\pi/dq = 0$ es una condición *necesaria* para alcanzar un máximo, pero no es una condición *suficiente*. Para asegurarnos de que el punto elegido es, en efecto, un punto máximo, es preciso imponer una segunda condición.

FIGURA 2.2 **Dos funciones de ganancias que ofrecen resultados engañosos si sólo se aplica la regla de la primera derivada**

En a) la aplicación de la regla de la primera derivada llevaría a elegir la cantidad q_a^*. Este punto es, de hecho, un punto de ganancias mínimas. De otra parte, en b), el nivel de producción q_b^* sería el recomendado por la regla de la primera derivada, pero este punto es inferior a todas las producciones superiores a q_b^*. Esto demuestra gráficamente que encontrar un punto donde la derivada sea igual a cero es una condición necesaria, pero no suficiente, para que una función alcance su valor máximo.



La intuición indica que esta condición adicional es evidente: la ganancia disponible si producimos un poco más o un poco menos que q^* debe ser menor que la que se obtendría con q^*. Si no fuera así, entonces el gerente podría buscar un nivel de producción mejor que q^*. Matemáticamente, esto significa que $d\pi/dq$ debe ser mayor que cero cuando $q < q^*$ y debe ser menor que 0 cuando $q > q^*$. Por tanto, en q^*, $d\pi/dq$ será decreciente. Otra forma de decir lo mismo es que la derivada de $d\pi/dq$ debe ser negativa en q^*.

Segundas derivadas

Se dice que la derivada de una derivada es la *segunda derivada* y se escribe así:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} \text{ o } \frac{d^2 f}{dq^2} \text{ o } f''(q).$$

Por tanto, la condición adicional para que q^* represente un máximo (local) es

$$\left.\frac{d^2\pi}{dq^2}\right|_{q\,=\,q^*} = f''(q)\Big|_{q\,=\,q^*} < 0, \tag{2.6}$$

donde la notación nos recuerda, de nueva cuenta, que se debe calcular esta segunda derivada para el punto q^*.

De aquí que, aun cuando la ecuación 2.5 ($d\pi/dq = 0$) es una condición necesaria para alcanzar el máximo, se debe combinar con la ecuación 2.6 ($d^2\pi/dq^2 < 0$) para asegurarnos de que el punto es un máximo local de la función. Las ecuaciones 2.5 y 2.6 juntas son, por tanto, condiciones suficientes para alcanzar este máximo. Por supuesto que es posible que, mediante una serie de pruebas y errores, el administrador sea capaz de optar por q^* empleando información del mercado en vez de un razonamiento matemático (recuerde la analogía de Friedman acerca del jugador de billar). En este libro nos ocuparemos menos de cómo se encuentra el punto y más de sus propiedades y de cómo cambia cuando varían las condiciones. El análisis matemático será de gran utilidad para responder a estas preguntas.

Reglas para el cálculo de derivadas

A continuación se presentan algunas reglas para calcular derivadas. Se utilizarán en muchas partes de este libro.

1. Si b es constante, entonces

$$\frac{db}{dx} = 0.$$

2. Si b es constante, entonces

$$\frac{d[bf(x)]}{dx} = bf'(x).$$

3. Si b es constante, entonces

$$\frac{dx^b}{dx} = bx^{b-1}.$$

4. $\dfrac{d \ln x}{dx} = \dfrac{1}{x}$

   donde ln significa logaritmo con base e ($= 2.71828$).

5. $\dfrac{da^x}{dx} = a^x \ln a$ para cualquier constante a.

   Un caso particular de esta regla es $de^x/dx = e^x$.

Supóngase ahora que $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones de x y que existen $f'(x)$ y $g'(x)$. Entonces

6. $$\frac{d[f(x)+g(x)]}{dx} = f'(x) + g'(x).$$

7. $$\frac{d[f(x)\cdot g(x)]}{dx} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

8. $$\frac{d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$$

siempre y cuando $g(x) \neq 0$.

Por último, si $y = f(x)$ y $x = g(z)$ y si tanto $f'(x)$ como $g'(z)$ existen, entonces

9. $$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz} = \frac{df}{dx}\cdot\frac{dg}{dz}.$$

Este resultado se conoce como la *regla de la cadena*. Ofrece una forma cómoda para analizar cómo una variable (z) afecta a otra variable (y) exclusivamente en razón de su influencia en alguna variable intermedia (x). Algunos ejemplos son:

10. $$\frac{de^{ax}}{dx} = \frac{de^{ax}}{d(ax)}\cdot\frac{d(ax)}{dx} = e^{ax}\cdot a = ae^{ax}.$$

11. $$\frac{d[\ln(ax)]}{dx} = \frac{d[\ln(ax)]}{d(ax)}\cdot\frac{d(ax)}{dx} = \ln(ax)\cdot a = a\ln(ax).$$

12. $$\frac{d[\ln(x^2)]}{dx} = \frac{d[\ln(x^2)]}{d(x^2)}\cdot\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x}.$$

Funciones con varias variables

Los problemas económicos no suelen implicar funciones de una sola variable. La mayor parte de las metas que interesan a los agentes económicos dependen de varias variables y ellos deben elegir de entre éstas. Por ejemplo, la *utilidad* que obtiene un individuo de sus actividades como consumidor dependerá de la cantidad que consuma de cada bien. En el caso de la *función de producción* de una empresa, la cantidad producida dependerá de la cantidad de trabajo, capital y tierra dedicados a la producción. En estas circunstancias, el hecho de que esta variable (y) dependa de una serie de otras variables ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) se escribe

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.10}$$

Derivadas parciales

Nos interesa calcular el punto en el cual y alcanza su valor máximo, así como los intercambios que se deben hacer para alcanzar ese punto. De nuevo, resultaría más fácil pensar que el agente cambia las variables que están a su disposición (las x) para poder encontrar un máximo. Por desgracia, con una función de varias variables, la idea de *la* derivada no está bien definida. Tal como la pendiente de ascensión a una montaña dependerá de la dirección que se lleve, la pendiente (o la derivada) de una función dependerá de la dirección que se elija. Por lo general, las únicas pendientes direccionales de interés son las que se obtienen aumentando una de las x mientras que todas las demás variables permanecen constantes (en la analogía de la montaña podrían medirse las pendientes sólo en dirección norte-sur o este-oeste). Estas pendientes direc-

EJEMPLO 2.1

Maximización de las ganancias

Supóngase que la relación entre ganancias (π) y cantidad producida (q) está determinada por

$$\pi(q) = 1000q - 5q^2. \tag{2.7}$$

Una gráfica de esta función se parecería a la parábola que muestra la figura 2.1. Se puede determinar el valor de q que maximiza las ganancias por diferenciación:

$$\frac{d\pi}{dq} = 1000 - 10q = 0 \tag{2.8}$$

por lo que

$$q^* = 100. \tag{2.9}$$

En $q = 100$, la ecuación 2.7 muestra que las ganancias son igual a 50 000; es decir, el máximo valor posible. Por ejemplo, si la empresa decidiera producir $q = 50$, las ganancias serían igual a 37 500. En $q = 200$, las ganancias serían igual a cero.

Podemos saber que $q = 100$ es el máximo "global" si se demuestra que la segunda derivada de la función de las ganancias es -10 (véase la ecuación 2.8). De aquí que la tasa de incremento de las ganancias siempre vaya decreciendo; es decir, hasta $q = 100$ esta tasa de incremento sigue siendo positiva, pero por encima de este punto pasa a ser negativa. En este ejemplo, $q = 100$ es el único valor máximo local de la función π. Sin embargo, en el caso de funciones más complejas puede haber varios máximos.

Pregunta: Suponga que la producción de la empresa (q) está determinada por la cantidad de trabajo (l) que contrata de acuerdo con la función $q = 2\sqrt{l}$. Suponga también que la empresa puede contratar todo el trabajo que desee a \$10 por unidad y que vende su producción a \$50 por unidad. Por tanto, las ganancias son una función de l dada por $\pi(l) = 100\sqrt{l} - 10l$. ¿Cuánto trabajo debe contratar esta empresa para poder maximizar sus ganancias y cuál será el monto de dichas ganancias?

cionales se denominan *derivadas parciales*. La derivada parcial de y respecto a (es decir, en dirección a) x_1 se escribe

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \text{ o } \frac{\partial f}{\partial x_1} \text{ o } f_{x_1} \text{ o } f_1.$$

Queda entendido que al calcular esta derivada se mantiene constante el valor de todas las demás x. De nuevo, es preciso destacar que el valor numérico de esta pendiente depende del valor que tome x_1 y del valor (predeterminado) de $x_2, \ldots, x_n$.

Una definición algo más formal de la derivada parcial es

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) - f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}{h}, \tag{2.11}$$

donde la notación indica que $x_2, \ldots, x_n$ se mantienen constantes en los valores predeterminados $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ de forma que podamos estudiar únicamente el efecto del cambio de x_1. Calcularíamos las derivadas parciales respecto a las otras variables ($x_2, \ldots, x_n$) de esta misma manera.

Cálculo de las derivadas parciales

Es muy fácil calcular las derivadas parciales. El cálculo se hace igual que tratándose de las derivadas tradicionales, es decir *tratando* $x_2, \ldots, x_n$ *como constantes* (como lo son, de hecho, en la definición de una derivada parcial). Veamos los ejemplos siguientes:

1. Si $y = f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = 2ax_1 + bx_2$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = bx_1 + 2cx_2.$$

Nótese que, en general $\partial f/\partial x_1$ es función tanto de x_1 como de x_2 y, por tanto, su valor dependerá de los valores particulares que se asignen a estas variables. Asimismo, dependerá de los parámetros a, b y c, los cuales no cambian a medida que x_1 y x_2 cambian.

2. Si $y = f(x_1, x_2) = 5\ e^{ax_1 + bx_2}$,
entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = ae^{ax_1 + bx_2}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = be^{ax_1 + bx_2}.$$

3. Si $y = f(x_1, x_2) = a \ln x_1 + b \ln x_2$,
entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = \frac{a}{x_1}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = \frac{b}{x_2}.$$

Nótese que el hecho de tratar x_2 como constante en la derivación de $\partial f/\partial x_1$ hace que el término $b \ln x_2$ desaparezca con la diferenciación, porque no cambia cuando x_1 cambia. En este caso, a diferencia de lo que ocurrió en los ejemplos anteriores, el tamaño del efecto de x_1 en y es independiente del valor de x_2. En otros casos, el efecto de x_1 en y dependerá del nivel de x_2.

Derivadas parciales y el supuesto ceteris paribus

En el capítulo 1 se describió la forma en que los economistas utilizan el supuesto ceteris paribus en sus modelos para mantener constantes diversas influencias externas, de modo que les permita analizar, en un contexto simplificado, la relación precisa que están estudiando. Las derivadas parciales son la forma matemática precisa de representar este planteamiento; es decir, muestran cómo los cambios de una variable afectan un resultado, cuando todas las demás influencias se mantienen constantes, o exactamente lo que los economistas necesitan para sus modelos. Por ejemplo, la curva de demanda de Marshall muestra la relación entre el precio (p) y la cantidad (q) demandada cuando se mantienen constantes todos los demás factores. Si se utilizan derivadas parciales, entonces podría representarse la pendiente de esta curva mediante $\partial q/\partial p$ para indicar los supuestos *ceteris paribus* que estamos aplicando. La ley fundamental de la demanda (que el precio y la cantidad se mueven en dirección contraria cuando no cambian los demás factores) queda reflejada, por tanto, por el enunciado matemático "$\partial q/\partial p < 0$". De nueva cuenta, la utilización de una derivada parcial nos recuerda los supuestos ceteris paribus que tienen aplicación en la ley de la demanda.

Derivadas parciales y unidades de medida

En las matemáticas, se presta relativa atención a la forma de medir las variables. De hecho, muchas veces ni siquiera se hace mención explícita del asunto. Sin embargo, las variables que se emplean en economía por lo general se refieren a magnitudes reales y, por tanto, nos debe interesar la forma de medirlas. La consecuencia más importante de elegir unidades de medición podría ser que, muchas veces, las derivadas parciales que se utilicen para resumir el comportamiento de la economía reflejarán estas unidades. Por ejemplo, si q representa la cantidad de gasolina demandada por todos los consumidores estadounidenses durante un año en particular (medida en miles de millones de galones) y p representa el precio por galón en dólares, entonces $\partial q/\partial p$ medirá el cambio de la demanda (en miles de millones de galones por año) debido a un cambio de precio de un dólar por galón. El tamaño numérico de esta derivada dependerá de cómo se midan q y p. La decisión de medir el consumo en millones de galones por año multiplicaría el tamaño de la derivada por 1000, mientras que la decisión de medir el precio en centavos por galón la reduciría por un factor de 100.

El hecho de que el tamaño numérico de las derivadas parciales dependa de la unidad de medida que se elija plantea algunos problemas para los economistas. Muchas teorías económicas predicen el signo (la dirección) de las derivadas parciales, pero las predicciones de la magnitud numérica de estas derivadas dependerían de la forma en que los autores decidan medir sus variables. La comparación de estudios sería prácticamente imposible, sobre todo dada la extensa variedad de sistemas de medición que se utilizan en todo el mundo. Por lo anterior, los economistas han optado por adoptar una forma diferente, sin utilizar unidades de medida, para evaluar los efectos cuantitativos.

Elasticidad: una definición general

Los economistas utilizan las elasticidades para resumir casi todos los efectos cuantitativos que les interesan. Dado que estas medidas se concentran en el efecto proporcional que el cambio de una variable tiene en otra, éstas no están sujetas a unidades; es decir, las unidades "se cancelan" cuando se calcula la elasticidad. Por ejemplo, suponga que y es función de x y, posiblemente, de otras variables. Por tanto, la elasticidad de y con relación a x (denotada como $e_{y,x}$) se define como

$$e_{y,x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x}{y}. \tag{2.12}$$

Nótese que, independientemente de cómo se midan y y x las unidades de medida se cancelan, porque aparecen tanto en un numerador como en un denominador. Nótese también que, dado que y y x son positivas en la mayor parte de las situaciones económicas, la elasticidad, $e_{y,x}$ y la derivada parcial $\partial y/\partial x$ tendrán el mismo signo. Por tanto, las predicciones teóricas respecto a la dirección de ciertas derivadas también se aplicará a sus correspondientes elasticidades.

A lo largo de este libro encontraremos aplicaciones específicas del concepto de la elasticidad, entre ellas, algunas que usted debe conocer, como la elasticidad precio de mercado de la oferta o la demanda. Sin embargo, también se presentarán muchos conceptos nuevos que se pueden expresar con mayor claridad en términos de elasticidad.

EJEMPLO 2.2

Elasticidad y forma de la función

La definición de la ecuación 2.12 deja en claro que se debe evaluar la elasticidad en un punto específico de una función. En general, podemos esperar que el valor de este parámetro varíe acorde con distintos rangos de la función. Esta observación queda claramente demostrada en el caso donde y es función lineal de x en la fórmula

$$y = a + bx + \text{otros términos.}$$

En este caso

$$e_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x}{y} = b \cdot \frac{x}{y} = b \cdot \frac{x}{a + bx + \cdots} \tag{2.13}$$

lo cual deja en claro que $e_{y,x}$ no es constante. Por tanto, para funciones lineales es especialmente importante señalar el punto donde calcularemos la elasticidad.

Si la relación de la función entre x y y es de forma exponencial

$$y = ax^b$$

entonces la elasticidad es una constante, independientemente del punto donde se mida:

$$e_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x}{y} = abx^{b-1} \cdot \frac{x}{ax^b} = b.$$

Una transformación logarítmica de esta ecuación también proporciona una definición alternativa de elasticidad muy cómoda. Dado que

$$\ln y = \ln a + b \ln x,$$

tendremos

$$e_{y,x} = b = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x}. \tag{2.14}$$

Por tanto, se podrán calcular las elasticidades por medio de la "diferenciación logarítmica". Como se verá más adelante, esta forma de proceder con frecuencia es el camino más fácil para hacer estos cálculos.

Pregunta: ¿Hay alguna otra forma de funciones además de las exponenciales que tienen una elasticidad constante, cuando menos dentro de cierto rango?

Derivadas parciales de segundo orden

La derivada parcial de una derivada parcial es directamente análoga a la segunda derivada de una función de una variable y se llama *derivada parcial de segundo orden*. Se escribiría como

$$\frac{\partial(\partial f / \partial x_i)}{\partial x_j}$$

o, de manera más sencilla, como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f_{ij}. \tag{2.15}$$

Para los ejemplos anteriores:

1. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = f_{11} = 2a$$
$$f_{12} = b$$
$$f_{21} = b$$
$$f_{22} = 2c.$$

2. $$f_{11} = a^2 e^{ax_1 + bx_2}$$
$$f_{12} = abe^{ax_1 + bx_2}$$
$$f_{21} = abe^{ax_1 + bx_2}$$
$$f_{22} = b^2 e^{ax_1 + bx_2}$$

3. $$f_{11} = \frac{-a}{x_1^2}$$
$$f_{12} = 0$$
$$f_{21} = 0$$
$$f_{22} = \frac{-b}{x_2^2}.$$

Teorema de Young

Estos ejemplos ilustran el resultado matemático según el cual, en condiciones bastante generales, no importa el orden que se siga al hacer una diferenciación parcial con objeto de calcular derivadas parciales de segundo orden. Es decir,

$$f_{ij} = f_{ji} \tag{2.16}$$

para un par de variables x_i, x_j. Este resultado se conoce, a veces, como el "teorema de Young". Para una explicación intuitiva del teorema, volvamos a la analogía de la ascensión a una montaña. En este ejemplo, el teorema dice que la cantidad que avance un montañista dependerá de las direcciones y las distancias que recorra, pero no del orden en que ello se produzca. Es decir, la cantidad que avance será independiente del camino que siga, siempre y cuando el montañista vaya de un conjunto de coordenadas del mapa a otro. Por ejemplo, el montañista puede avanzar una milla hacia el norte y después recorrer una milla hacia el este, o puede seguir el orden inverso, recorriendo primero una milla hacia el este y después una milla hacia el norte. Sea como fuere, la cantidad del avance será la misma, porque, en ambos casos, el montañista se desplaza de un punto concreto a otro. En capítulos posteriores se utilizará bastante este resultado porque ofrece una forma muy fácil de mostrar algunas de las predicciones de los modelos económicos respecto al comportamiento.[2]

Usos de las derivadas parciales de segundo orden

Las derivadas parciales de segundo orden tendrán una función importante en muchas de las teorías económicas que se plantean en este libro. Los ejemplos más importantes son los que se relacionan con la parcial "propia" de segundo orden, f_{ii}. Esta función muestra la influencia marginal de x_i en $y\left(\text{es decir, } \frac{\partial y}{\partial x_i}\right)$ a medida que aumenta el valor de x_i. El valor negativo de f_{ii} es la forma matemática de indicar el concepto económico de la productividad marginal decreciente. Asimismo, la parcial cruzada f_{ij} refleja los cambios que registra la productividad marginal de x_i a medida que x_j aumenta. El signo de este efecto puede ser positivo o negativo. El teorema de Young indica que, en general, los efectos cruzados son simétricos. En términos más generales, las derivadas parciales de segundo orden de una función brindan información acerca de la cur-

[2]El teorema de Young implica que la matriz de derivadas parciales de segundo orden de una función es una matriz simétrica. Esta simetría ofrece una serie de ideas económicas. Para una breve introducción a los conceptos matriciales utilizados en economía véase la ampliación de este capítulo.

vatura de la función. Más adelante, en este mismo capítulo, se verá el importante papel que tiene la información para determinar si se satisfacen o no las diversas condiciones de segundo orden para alcanzar un máximo.

Maximización de funciones con varias variables

Ahora, con ayuda de las derivadas parciales, se puede explicar cómo determinar el valor máximo para una función con varias variables. Para comprender los conceptos matemáticos utilizados para la resolución de este problema, será de mucha utilidad recurrir a una analogía con el caso de una sola variable. En el caso de una sola variable, podemos imaginar a un agente que varía x en una cuantía muy pequeña, dx, y observa la variación de y (denominada dy). Esta variación está determinada por la expresión

$$dy = f'(x)\, dx. \tag{2.17}$$

La identidad de la ecuación 2.17 refleja el hecho de que la variación de y es igual a la variación de x multiplicada por la pendiente de la función. Esta fórmula es equivalente a la de la *pendiente en un punto* que se utiliza para las ecuaciones lineales en álgebra básica. Al igual que antes, la condición necesaria para alcanzar el máximo es que $dy = 0$ para pequeñas variaciones de x en torno al punto óptimo. De lo contrario, y aumentaría acorde con los correspondientes cambios de x. Sin embargo, como dx no es necesariamente igual a cero en la ecuación 2.7, $dy = 0$ debe implicar que, en el punto deseado, $f'(x) = 0$. Ésta es otra forma de obtener la condición de primer orden de un máximo que ya hemos derivado.

Utilizando esta analogía, veamos las decisiones que toma un agente económico que debe elegir los niveles de varias variables. Supóngase que este agente quiere encontrar un conjunto de x que maximice el valor de $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El agente podría considerar la posibilidad de cambiar sólo una de las x, por decir x_1, al tiempo que mantiene constantes todas las demás. La variación de y (es decir, dy) que se derivaría de una variación de x_1 está determinada por

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 = f_1 dx_1.$$

Esta expresión afirma que la variación de y es igual a la variación de x_1 multiplicada por la pendiente calculada en la dirección de x_1. Utilizando una vez más la analogía de la montaña, esta expresión diría que la cantidad que avanza un montañista que se dirige hacia el norte está determinada por la distancia que recorra hacia el norte multiplicada por la pendiente de la montaña medida en dirección norte.

Diferencial total

Si se varían todas las x en una cantidad pequeña, el efecto total en y será la suma de todos los efectos, tal y como se ha demostrado antes. Por tanto, la variación total de y se define como

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Esta expresión se denomina *diferencial total* de f y es directamente análoga a la expresión del caso de una sola variable de la ecuación 2.17. La intuición indica que la ecuación es razonable: la variación total de y es la suma de las variaciones provocadas por la variación de cada una de las x.[3]

---

[3]Podemos usar la diferencial total de la ecuación 2.18 para derivar la regla de la cadena, aplicada a funciones con varias variables. Supongamos que $y = f(x_1, x_2)$ y que $x_1 = g(z)$ y $x_2 = h(z)$. Si todas estas funciones son diferenciables, entonces podremos calcular los efectos que una variación de z tiene en y. La diferencial total de y es

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2.$$

Si dividimos esta ecuación entre dz tendremos

$$\frac{dy}{dz} = f_1 \frac{dx_1}{dz} + f_2 \frac{dx_2}{dz} = f_1 \frac{dg}{dz} + f_2 \frac{dh}{dz}.$$

Por tanto, para calcular el efecto de z en y tendremos que calcular cómo z afecta los dos determinantes de y (es decir, x_1 y x_2). Si y depende de más de dos variables, entonces obtendremos un resultado análogo. Este resultado nos recuerda que debemos tener el cuidado de incluir todos los efectos posibles cuando calculamos derivadas de funciones con varias variables.

Condición de primer orden para un máximo

Una condición necesaria para un máximo (o un mínimo) de una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es que $dy = 0$ para una combinación de pequeñas variaciones de las x. Esto sólo puede ocurrir si, en el punto considerado

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0. \tag{2.19}$$

El punto en el que es válida la ecuación 2.19 se llama *punto crítico*. Esta ecuación es la condición necesaria para obtener un máximo local. Para comprobar lo anterior guiados por la intuición, veamos que en el caso de que una de las derivadas parciales (por ejemplo, f_i) fuera mayor (o menor) que cero, entonces podría incrementarse y aumentando (o disminuyendo) x_i. Entonces, un agente económico podría determinar este punto máximo encontrando el punto donde y no reacciona a movimientos muy pequeños de ninguna de las x. Este resultado es extremada-

EJEMPLO 2.3

Cálculo del máximo

Supóngase que y es una función de x_1 y x_2 determinada por

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \tag{2.20}$$

o

$$y = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5.$$

Por ejemplo, y podría representar la salud de un individuo (medida en una escala del 0 al 10) y x_1 y x_2 serían las dosis diarias de dos medicamentos para mejorar su salud. Se quiere calcular los valores de x_1 y x_2 que hacen que y tenga el mayor valor posible. Partiendo de las derivadas parciales de y respecto a x_1 y x_2 y aplicando las condiciones necesarias dadas por las ecuaciones 2.19, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= -2x_1 + 2 = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} &= -2x_2 + 4 = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

o

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1 \\ x_2^* &= 2. \end{aligned}$$

Por tanto, la función está en el punto crítico cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. En este punto, $y = 10$ es el mejor estado de salud posible. Si se experimenta un poco tendremos pruebas convincentes de que éste es el valor más alto que puede tener y. Por ejemplo, si $x_1 = x_2 = 0$, entonces $y = 5$, o si $x_1 = x_2 = 1$, entonces $y = 9$. Los valores de x_1 y x_2 mayores que 1 y 2, respectivamente, disminuyen y debido a que los términos cuadráticos negativos de la ecuación 2.20 aumentan. Por consiguiente, el punto que hemos calculado aplicando las condiciones necesarias es, de hecho, un máximo local (y global).[4]

Pregunta: Suponga que y toma un valor fijo (por ejemplo, 5). ¿Cómo luciría la relación implícita entre x_1 y x_2? ¿Qué pasaría si $y = 7$? ¿O si $y = 10$? (Estas gráficas son *líneas envolventes* de la función y las analizaremos con más detalle en varios capítulos posteriores. Véase también el problema 2.1.)

[4]De manera más formal, el punto $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ es un máximo global porque la función descrita en la ecuación 2.20 es cóncava (véase más adelante la explicación en este mismo capítulo).

mente importante para el análisis económico. Afirma que deberíamos llevar una actividad (es decir, las x) al punto donde su contribución "marginal" al objetivo (es decir, y) es cero. Detenernos antes de ese punto no maximizaría y.

Condiciones de segundo orden

Sin embargo, de nuevo, las condiciones de la ecuación 2.19 no son suficientes para garantizar el máximo. Podemos ilustrarlo retomando nuestra consabida analogía: todas las cumbres de las colinas son (más o menos) planas, pero no todos los lugares planos son la cumbre de una colina. Es necesaria una condición de segundo orden, análoga a la de la ecuación 2.6, para asegurarnos de que el punto que se calcule al aplicar la ecuación 2.19 es un máximo local. La intuición indica que, para un máximo local, y debería decrecer en el caso de variaciones pequeñas de las x que se alejen del punto crítico. Como en el caso de una sola variable, esto implica necesariamente que se recurra a las derivadas parciales de segundo orden de la función f. Estas parciales de segundo orden se deben sujetar a ciertas restricciones (análogas a la restricción que derivamos en el caso de una sola variable) para que el punto crítico calculado con la ecuación 2.19 sea un máximo local. Más adelante, en este mismo capítulo, se analizarán estas restricciones.

Funciones implícitas

Con frecuencia, se escriben las ecuaciones matemáticas con una variable "dependiente" (y) en función de una o más variables independientes (x), pero ésta no es la única forma de escribir esta relación. Como ejemplo trivial, la ecuación

$$y = mx + b \tag{2.22}$$

también se puede escribir como

$$y - mx - b = 0 \tag{2.23}$$

o, de forma incluso más general, como

$$f(x, y, m, b) = 0 \tag{2.24}$$

donde esta notación funcional indica una relación entre x y y que también depende de la pendiente (m) y de los parámetros de la intersección (b) que no varían. Las funciones que escribimos con estas fórmulas a veces se conocen como *funciones implícitas* porque las relaciones entre las variables y los parámetros están presentes de forma implícita en la ecuación, en vez de ser calculados de forma explícita como, por decir, y como función de x y de los parámetros m y b.

A menudo, resulta fácil pasar de funciones implícitas a funciones explícitas. Por ejemplo, la función implícita

$$x + 2y - 4 = 0 \tag{2.25}$$

se puede "resolver" para x como

$$x = -2y + 4 \tag{2.26}$$

o para y como

$$y = \frac{-x}{2} + 2. \tag{2.27}$$

Derivadas de las funciones implícitas

En muchas circunstancias, es muy útil calcular las derivadas directamente de las funciones implícitas, sin resolver una de las variables de manera directa. Por ejemplo, la función implícita de $f(x, y) = 0$ tiene una diferencial total de $0 = f_x dx + f_y dy$, por tanto

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}. \tag{2.28}$$

De aquí que se pueda calcular la derivada implícita dy/dx como el cociente de las derivadas parciales de la función implícita, con signo negativo, siempre y cuando $f_y \neq 0$.

EJEMPLO 2.4

Otra vez, una frontera de posibilidades de producción

En el ejemplo 1.3 analizamos una frontera de posibilidades de producción para dos bienes con la fórmula

$$2x^2 + y^2 = 225 \tag{2.29}$$

o, escrita en la fórmula implícita

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 225 = 0. \tag{2.30}$$

De aquí que,

$$f_x = 4x,$$
$$f_y = 2y$$

y, por la ecuación 2.28, el costo de oportunidad del intercambio entre x y y es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = \frac{-4x}{2y} = \frac{-2x}{y}, \tag{2.31}$$

que es justo el resultado que se obtuvo antes, con bastante menos trabajo.

Pregunta: ¿En este caso, el intercambio entre x y y por qué depende exclusivamente el cociente de x entre y, pero no del "tamaño de la economía" como lo refleja la constante 225?

Teorema de la función implícita

Tal vez no siempre podamos resolver las funciones implícitas de la forma $g(x, y) = 0$ para funciones explícitas únicas de la forma $y = f(x)$. Los matemáticos han analizado las condiciones que se deben cumplir para que se pueda resolver, en forma explícita, una función implícita determinada cuando una variable es una función de otras variables y de diversos parámetros. Aquí no se analizarán esas condiciones, pero éstas entrañan requisitos para las diversas derivadas parciales de la función que son suficientes para garantizar que existe, en efecto, una relación única entre la variable dependiente y las variables independientes.[5] En muchas aplicaciones matemáticas, estas condiciones de las derivadas son precisamente las que se necesitan para asegurarnos de que se cumplan las condiciones de segundo orden para un máximo (o un mínimo). De aquí que, en estos casos, afirmemos que se cumple el *teorema de la función implícita* y que, por tanto, podemos resolver de manera explícita los intercambios entre las variables en cuestión.

El teorema de la envolvente

Una de las principales aplicaciones del teorema de la función implícita, que se utilizará en muchas partes de este libro, se llama *teorema de la envolvente*; éste se refiere a cómo varía el valor óptimo de una función determinada cuando cambia un parámetro de la función. Dado que muchos de los problemas económicos que se analizarán tratan de los efectos del cambio de un parámetro (por ejemplo, los efectos que el cambio del precio de mercado de un bien tendrá en las compras de un individuo), haremos este tipo de cálculos con frecuencia. El teorema de la envolvente suele proporcionar un buen atajo.

[5]Encontrará una explicación detallada del teorema de la función implícita en diversos contextos en, Carl P. Simon y Lawrence Blume. *Mathematics for Economists*, W. W. Norton, Nueva York, 1994, cap. 15.

Un ejemplo específico

La forma más sencilla de comprender el teorema de la envolvente podría ser mediante un ejemplo. Supóngase que y es una función de una sola variable (x) y de un parámetro (a) dada por

$$y = -x^2 + ax. \tag{2.32}$$

Para distintos valores del parámetro a, esta función representa una familia de parábolas invertidas. Si se asigna un valor determinado a a, la ecuación 2.32 sólo es una función de x y podremos calcular el valor de x que maximiza y. Por ejemplo, si $a = 1$, $x^* = \frac{1}{2}$ y, para estos valores de x y a, $y = \frac{1}{4}$ (su valor máximo). De igual manera, si $a = 2$, $x^* = 1$ y $y^* = 1$. Por tanto, el incremento de una unidad en el valor del parámetro a habrá incrementado el valor máximo de y en $\frac{3}{4}$. En la tabla 2.1, se utilizan los valores enteros de a entre 0 y 6 para calcular los valores óptimos de x y los valores asociados del objetivo, y. Nótese que a medida que aumenta a el valor máximo de y también aumenta. La figura 2.3 también ilustra lo anterior, mostrando que la relación entre a y y^* es cuadrática. Ahora se quiere calcular de manera explícita cómo varía y^* a medida que varía el parámetro a.

Un arduo planteamiento directo

El teorema de la envolvente afirma que hay dos formas equivalentes para realizar este cálculo. Primero, podemos calcular la pendiente de la función directamente en la figura 2.3. Para ello, se debe resolver la ecuación 2.32 para el valor óptimo de x para cualquier valor de a:

$$\frac{dy}{dx} = -2x + a = 0;$$

por tanto,

$$x^* = \frac{a}{2}.$$

Si se sustituye este valor de x^* en la ecuación 2.32 se obtendrá

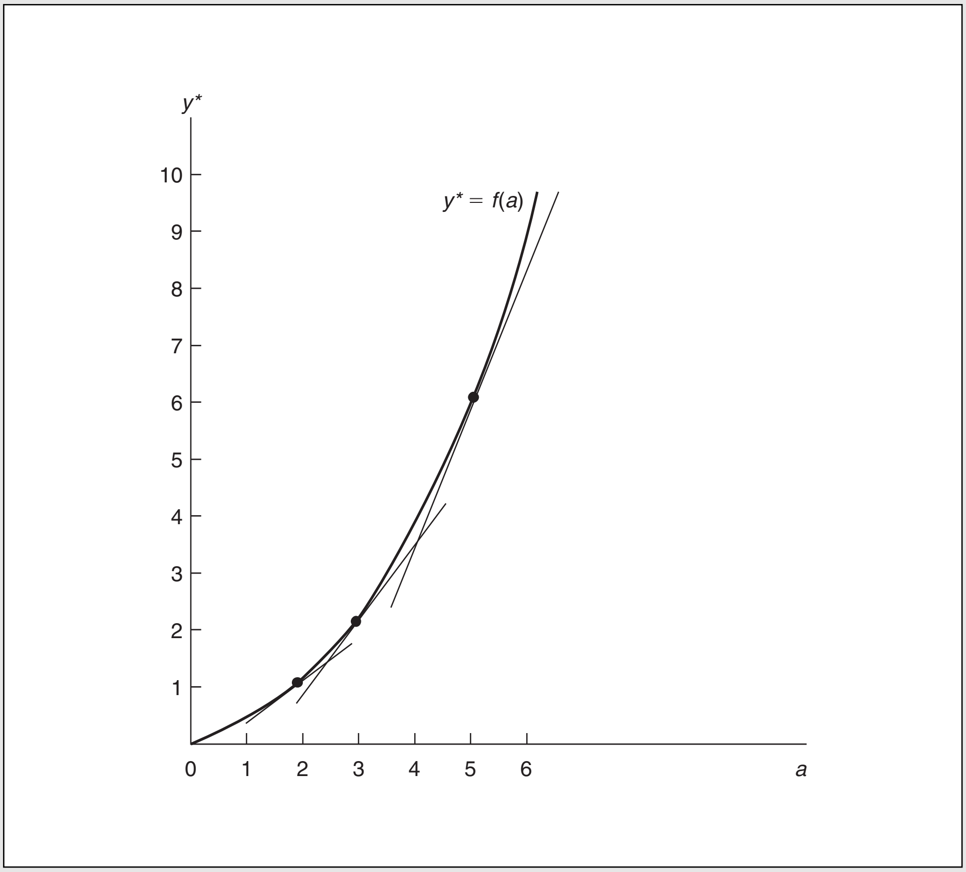
$$\begin{aligned} y^* &= -(x^*)^2 + a(x^*) \\ &= -\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(\frac{a}{2}\right) \\ &= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}, \end{aligned}$$

TABLA 2.1 **Valores óptimos de y y x para valores alternativos de a en $y = -x^2 + ax$**

Valor de a	Valor de x^*	Valor de y^*
0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
2	1	1
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
4	2	4
5	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$
6	3	9

FIGURA 2.3 **Ilustración del teorema de la envolvente**

El teorema de la envolvente dice que se puede determinar la pendiente de la relación entre y^* (el valor máximo de y) y el parámetro a si se calcula la pendiente de la relación auxiliar, que se encuentra al sustituir los valores óptimos respectivos de x en la función objetivo y al calcular $\partial y/\partial a$.



y ésta es precisamente la relación que muestra la figura 2.3. De la ecuación anterior, resulta fácil ver que

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2} \tag{2.33}$$

y, por ejemplo, para $a = 2$, $dy^*/da = 1$. Es decir, cerca de $a = 2$ el efecto marginal del incremento de a es que incrementa y^* en la misma cantidad. Cerca de $a = 6$, todo pequeño incremento en a incrementará y^* al triple de esta variación. La tabla 2.1 ilustra este resultado.

El atajo de la envolvente

Llegar a esta conclusión ha sido un tanto complicado. Hemos tenido que encontrar el valor óptimo de x para cada valor de a y después sustituir este valor por x^* en la ecuación de y. En casos más generales, este proceso puede ser muy tedioso porque exige que se maximice la función objetivo repetidas veces. El teorema de la envolvente, al ofrecer un planteamiento alternativo, dice que se pueden calcular variaciones pequeñas en a, dy^*/da manteniendo x constante en su *valor óptimo* y calculando simplemente $\partial y/\partial a$ directamente a partir de la función objetivo.

Si se procede de esta manera, se obtendrá

$$\frac{\partial y}{\partial a} = x \tag{2.34}$$

y, para x^* se tendrá

$$\frac{\partial y^*}{\partial a} = x^* = \frac{a}{2}. \tag{2.35}$$

Éste es precisamente el resultado que se obtuvo antes. La figura 2.3 ilustra la razón por la cual los dos planteamientos ofrecen resultados idénticos. Las tangentes que ilustran la figura muestran valores de y para un *fijo* x^*. Las pendientes de las tangentes son $\partial y/\partial a$. Evidentemente, en y^* esta pendiente produce el valor que buscamos.

Este resultado es bastante general y se utilizará en diversos momentos a lo largo de este libro para simplificar nuestros resultados. Para resumir, el teorema de la envolvente afirma que se puede determinar la variación del valor óptimo de una función respecto a un parámetro de esa función si derivamos parcialmente la función objetivo al mismo tiempo que mantenemos x (o varias x) constante en su valor óptimo. Es decir,

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial y}{\partial a}\{x = x^*(a)\}, \tag{2.36}$$

donde la notación nos recuerda que se debe calcular $\partial y/\partial a$ en el valor de x que sea el óptimo para el valor específico del parámetro a que estamos analizando.

El caso de muchas variables

Un teorema análogo de la envolvente es válido para el caso donde y es una función de varias variables. Supóngase que y depende de un conjunto de x ($x_1, \ldots, x_n$) y de un parámetro particular de interés, por decir, a,

$$y = f(x_1, \ldots, x_n, a). \tag{2.37}$$

Para determinar un valor óptimo de y tendríamos que resolver n ecuaciones de primer orden con la fórmula

$$\partial y/\partial x_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2.38}$$

y una solución a este proceso produciría valores óptimos para estas x ($x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$) que dependerían implícitamente del parámetro a. Suponiendo que las condiciones de segundo orden se cumplen, en este caso aplicaría el teorema de la función implícita y garantizaría que podamos resolver cada x_i^* como una función del parámetro a:

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1^*(a) \\ x_2^* &= x_2^*(a) \\ &\vdots \\ x_n^* &= x_n^*(a). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Si se sustituyen estas funciones en nuestro objetivo inicial (ecuación 2.37) se obtendrá una expresión en la cual el valor óptimo de y (por decir, y^*) dependerá del parámetro a tanto directa como indirectamente, en razón del efecto de a sobre las x^*.

$$y^* = f[x_1^*(a), x_2^*(a), \ldots, x_n^*(a), a]$$

Si se deriva totalmente esta expresión respecto a a se obtendrá

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{da} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{da}\cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{da} + \frac{\partial f}{\partial a}. \tag{2.40}$$

Sin embargo, dadas las condiciones de primer orden, todos estos términos, excepto el último, son igual a cero si las x toman sus valores óptimos. De aquí que, de nueva cuenta, se obtenga el resultado de la envolvente:

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial f}{\partial a}, \qquad (2.41)$$

donde se debe calcular esta derivada para los valores óptimos de las x.

EJEMPLO 2.5

El teorema de la envolvente: otra vez el estado de salud

Antes, en el ejemplo 2.3, se analizaron los valores máximos de la función del estado de salud

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \qquad (2.42)$$

y se determinó que

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1 \\ x_2^* &= 2 \end{aligned} \qquad (2.43)$$

y

$$y^* = 10.$$

Supóngase ahora que se utiliza el parámetro arbitrario a en vez de la constante 10 en la ecuación 2.42. Aquí a puede representar un indicador de la mejor salud posible de una persona, pero este valor variará, evidentemente, de una persona a otra. Por tanto,

$$y = f(x_1, x_2, a) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + a. \qquad (2.44)$$

En este caso, los valores óptimos de x_1 y x_2 no dependen de a (siempre son $x_1^* = 1$, $x_2^* = 2$), por lo que, para esos valores óptimos, se obtienen

$$y^* = a \qquad (2.45)$$

y

$$\frac{dy^*}{da} = 1. \qquad (2.46)$$

Las personas que tengan "mejor salud por naturaleza" tendrán siempre valores más altos para y^*, siempre y cuando elijan x_1 y x_2 de forma óptima. Empero, esto es precisamente lo que indica el teorema de la envolvente, debido a que

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial f}{\partial a} = 1 \qquad (2.47)$$

de la ecuación 2.44. El incremento del parámetro a sencillamente aumenta el valor óptimo de y^* en una cantidad idéntica (de nuevo, suponiendo que se elijan correctamente las dosis de x_1 y x_2).

Pregunta: Suponga que, por el contrario, observamos la dosis óptima de x_1 en la ecuación 2.42, es decir, suponga que se utiliza un parámetro general, por decir, b, en lugar de 1. Explique, en palabras y en términos matemáticos, por qué $\partial y^*/\partial b$ en este caso, sería necesariamente igual a cero.

Maximización con restricciones

Hasta ahora nos hemos centrado en determinar el valor máximo de una función sin restringir la posibilidad de elegir entre las x disponibles. Sin embargo, en la mayor parte de los problemas económicos, no todos los valores de las x son factibles. Por ejemplo, en muchas situaciones es necesario que todas las x sean positivas. Este requisito se presentaría en el caso del problema que afronta el administrador que elige el nivel de producción que maximiza las ganancias, o sea que una producción negativa no tendría sentido. En otros casos, las x pueden estar restringidas por cuestiones económicas. Por ejemplo, cuando un individuo elige los artículos que consumirá, no puede elegir las cantidades que desea. Sus elecciones están restringidas por el monto del poder adquisitivo que tiene; es decir, por la restricción de su presupuesto. Estas restricciones pueden reducir el valor máximo de la función que se quiere maximizar. Dado que no podemos elegir libremente entre todas las x, y tal vez no sea tan grande como podría ser. Así, diríamos que las restricciones son inactivas si se puede obtener el mismo nivel de y indepedientemente de que se imponga o no la restricción.

El método del multiplicador lagrangiano

Un método para resolver los problemas de maximización con restricciones es el *método del multiplicador lagrangiano,* el cual entraña un inteligente truco matemático que también tiene una interpretación económica muy útil. La lógica de este método es bastante sencilla, pero aquí no se pretende hacer una presentación rigurosa.[6] En una sección anterior, ya se analizaron las condiciones necesarias para obtener un máximo local. Ahí, se demostró que en el punto óptimo, todas las derivadas parciales de f deben ser igual a cero. Por tanto, hay n ecuaciones ($f_i = 0$ de $i = 1, \ldots, n$) para n incógnitas (las x). Por lo general, se pueden resolver estas ecuaciones para los valores óptimos de las x. Sin embargo, cuando existen restricciones para las x se tendrá, cuando menos, una ecuación adicional (la restricción), pero sin variables adicionales. Por tanto, el sistema de ecuaciones está sobredeterminado. La técnica lagrangiana introduce una variable adicional (el multiplicador lagrangiano), el cual no sólo ayuda a resolver el problema en cuestión (puesto que ahora hay $n + 1$ ecuaciones en $n + 1$ incógnitas), sino que también tiene una interpretación útil en diversas circunstancias económicas.

El problema formal

Más concretamente, suponga que se desea calcular los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que maximizan

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.48}$$

sujeto a una restricción que sólo permite utilizar ciertos valores de las x. Una forma general de escribir esa restricción es

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{2.49}$$

donde la función[7] g representa la relación que se debe cumplir en todas las x.

Condiciones de primer orden

El método del multiplicador lagrangiano parte de la formulación de la expresión

$$\mathscr{L} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.50}$$

donde λ es una variable adicional llamada multiplicador lagrangiano. Más adelante se interpretará esta nueva variable. Sin embargo, primero nótese que cuando se cumple la restricción, $\mathscr{L}$ y f tienen el mismo valor [porque $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$]. Por tanto, si limitamos nuestra atención únicamente a los valores de las x que cumplen la restricción, entonces determinar el valor máximo restringido de f es equivalente a determinar el valor crítico de $\mathscr{L}$. Hagamos este cálculo,

---

[6]Para una presentación detallada, véase A. K. Dixit. *Optimization in Economic Theory,* 2a. ed., Oxford University Press, Oxford, 1990, cap. 2.

[7]Como se señaló antes, es posible escribir una función de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de esta forma implícita. Por ejemplo, la restricción $x_1 + x_2 = 10$ se puede escribir como $10 - x_1 - x_2 = 0$. En capítulos posteriores seguiremos habitualmente este procedimiento para tratar las restricciones. Por lo normal, las restricciones que analizaremos serán lineales.

considerando que λ también es una variable (además de las x). A partir de la ecuación 2.50, las condiciones para alcanzar un punto crítico son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= f_1 + \lambda g_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= f_2 + \lambda g_2 = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_n} &= f_n + \lambda g_n = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Así, las ecuaciones 2.51 son las condiciones para obtener un punto crítico de la función $\mathscr{L}$. Nótese que hay $n + 1$ ecuaciones (una para cada x y otra más para λ) en $n + 1$ incógnitas. En general, es posible resolver las ecuaciones para $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y para λ. Esta solución tendrá dos propiedades: 1) las x obedecerán a la restricción porque la última ecuación en 2.51 impone esta condición; y 2) entre todos aquellos valores de las x que satisfacen la restricción, es decir, aquellos que también satisfagan las ecuaciones 2.51 harán que $\mathscr{L}$ (y por tanto f) sea tan grande como es posible (suponiendo que se cumplen las condiciones de segundo orden). Por tanto, el método del multiplicador lagrangiano ofrece un camino para encontrar una solución al problema de la maximización con restricciones que se plantearon al principio.[8]

La solución de las ecuaciones 2.51 normalmente será diferente de la del caso sin restricciones (vease la ecuación 2.19). En lugar de proseguir hasta el punto donde la contribución marginal de cada x es cero, las ecuaciones 2.52 nos obliga a “detenernos en un punto” debido a la restricción. Sólo en el caso de que la restricción no sea efectiva (en el cual, como se demostrará más adelante, λ sería cero), entonces coincidirían ecuaciones con restricciones con las que no tienen restricciones (así como sus respectivas soluciones). Estas condiciones marginales revisadas tienen una interpretación económica en distintas situaciones.

Interpretación del multiplicador lagrangiano

Hasta aquí se ha utilizado el multiplicador lagrangiano (λ) únicamente como un “truco” matemático para llegar a la solución que se quería. De hecho, esta variable también tiene una importante interpretación económica, la cual será fundamental para nuestro análisis en muchos puntos de este libro. Para desarrollar esta interpretación, es necesario volver a escribir las primeras n ecuaciones de 2.51 como

$$\frac{f_1}{-g_1} = \frac{f_2}{-g_2} = \cdots = \frac{f_n}{-g_n} = \lambda. \tag{2.52}$$

En otras palabras, en el punto máximo, la proporción de f_i respecto a g_i es la misma para todas las x_i. Los numeradores de las ecuaciones 2.52 son las contribuciones marginales de cada x a la función f. Éstas muestran el *beneficio marginal* que una unidad adicional de x_i obtendrá en la función que se está maximizando (es decir f).

Es probable que sea más recomendable dejar la interpretación completa de los denominadores de las ecuaciones 2.51 hasta encontrar estos cocientes en aplicaciones económicas prácticas. Entonces se verá que éstas suelen tener una interpretación del “costo marginal”. Es decir, reflejan la carga que se añade a la restricción por utilizar un poco más de x_i. Como ejemplo sencillo, suponga que la restricción exigiera que el gasto total en x_1 y x_2 (por decir) está dado por una cantidad fija de dólares, F. Por tanto, la restricción sería $p_1x_1 + p_2x_2 = F$ (donde p_i es el costo por

[8]En términos estrictos, se trata de condiciones necesarias para un máximo local interior. En algunos problemas económicos es necesario modificar estas condiciones (de forma bastante obvia) para tener en cuenta la posibilidad de que algunas de las x estén en la frontera de la zona de las x factibles. Por ejemplo, si se requiere que todas las x no sean negativas, entonces es posible que las condiciones de las ecuaciones 2.51 no se cumplan de manera estricta, porque estas condiciones pueden exigir x negativas. Analizaremos esta situación más adelante en este mismo capítulo.

unidad de x_i). Utilizando terminología actual, podría escribirse esta restricción de forma implícita como

$$g(x_1, x_2) = F - p_1x_1 - p_2x_2 = 0. \tag{2.53}$$

En esta situación, se tendría

$$-g_i = p_i \tag{2.54}$$

y la derivada $-g_i$ refleja, en efecto, el costo marginal por unidad derivado de utilizar x_i. Prácticamente todos los problemas de optimización que se encontrarán en capítulos posteriores hacen una interpretación similar de los denominadores de las ecuaciones 2.52.

El multiplicador lagrangiano como proporción de costos a beneficios

Ahora es posible interpretar las ecuaciones 2.52 en forma intuitiva. Éstas indican que, para los valores óptimos de las x, la proporción de beneficios marginales por incrementar x_i con relación a los costos marginales por incrementar x_i debería ser la misma para cada x. A efecto de ver que se trata de una condición evidente para alcanzar un máximo, supóngase que no fuera cierto: supóngase que la "proporción de costos a beneficios" fuera mayor para x_1 que para x_2. En este caso, debería utilizarse un poco más de x_1 para alcanzar un máximo. Considérese la posibilidad de utilizar más x_1 pero renunciando a una cantidad justa suficiente de x_2 para mantener g (la restricción) constante. Por tanto, el costo marginal de la x_1 adicional utilizada sería igual al costo ahorrado por utilizar menos x_2. Sin embargo, dado que la proporción de costos a beneficios (la cantidad de beneficios por unidad de costos) es mayor para x_1 que para x_2, los beneficios adicionales de utilizar más x_1 superarían la pérdida de beneficios derivada de utilizar menos x_2. Al utilizar una cantidad mayor de x_1 y, por tanto, menor de x_2 incrementaría y porque x_1 ofrece "más por su dinero". Sólo si las proporciones de los beneficios y los costos marginales son iguales para todas las x habrá un máximo local, uno en el que ningún cambio pequeño de las x puede hacer que la función objetivo aumente. En muchos puntos de este libro se desarrollarán aplicaciones prácticas de este principio básico. El resultado es fundamental para la teoría microeconómica del comportamiento para optimizar.

También es posible interpretar el multiplicador lagrangiano (λ) a la luz de este análisis. λ es la proporción común de costos a beneficios de todas las x. Es decir,

$$\lambda = \frac{\textbf{beneficio marginal de } x_i}{\textbf{costo marginal de } x_i} \tag{2.55}$$

para cada x_i. Si relajáramos ligeramente la restricción, no importaría cuál de las x cambia (de hecho, podrían variarse todas las x porque, en el margen, cada una promete la misma proporción de beneficios respecto a los costos. En consecuencia, el multiplicador lagrangiano proporciona una medida de cómo esta relajación general de la restricción afectaría el valor de y. En esencia λ asigna un "precio sombra" a la restricción. Un λ alto indica que se podría aumentar y sustancialmente si se relaja la restricción, porque cada x tiene una proporción alta de costos a beneficios. De otra parte, un valor bajo de λ, indica que no es posible ganar mucho si se relaja la restricción. Si la restricción es inactiva en absoluto, entonces λ tendrá un valor de cero, indicando así que la restricción no limita el valor de y. En este caso, el cálculo del valor máximo de y sujeto a la restricción sería idéntico al cálculo de un máximo sin restricciones. El precio sombra de la restricción es cero. También es posible demostrar esta interpretación de λ utilizando el teorema de la envolvente como se describirá más adelante en este capítulo.[9]

Dualidad

Esta explicación demuestra que existe una clara relación entre el problema de maximizar una función sujeta a restricciones y el problema de asignar valores a las restricciones. Esto refleja lo que se conoce como el principio matemático de la "dualidad": todo problema de maximización con restricciones trae asociado un problema dual de *minimización* con restricciones, el cual se centra en las restricciones del problema original (primitivo). Por ejemplo, adelantándonos un

[9]En el texto, el análisis gira en torno a problemas que sólo tienen una restricción. Por lo general, podemos manejar m restricciones ($m < n$) introduciendo simplemente m variables nuevas (multiplicadores lagrangianos) y procediendo de forma análoga al análisis anterior.

poco al caso, diremos que los economistas suponen que los individuos maximizan su utilidad, sujeto a la restricción de su presupuesto. Éste es el problema original del consumidor. La dualidad del problema del consumidor consiste en minimizar el gasto que necesita para alcanzar un nivel determinado de utilidad. De otra parte, el problema primitivo de una empresa tal vez sea minimizar el costo total de los insumos que utiliza para producir una cantidad determinada, mientras que la dualidad de su problema será maximizar la producción dado un costo determinado de los insumos que adquiere. En capítulos posteriores se desarrollarán muchos ejemplos similares. Cada uno ejemplifica que hay dos formas de abordar un problema de optimización con restricciones. A veces, emprender un ataque frontal, analizando el problema primero, nos puede llevar a mayor cantidad de información. En otras ocasiones, el planteamiento de la dualidad del problema puede resultar más instructivo. Con independencia del camino que se opte por seguir, los resultados casi siempre serán idénticos, por lo cual esta elección será, fundamentalmente, cuestión de conveniencia.

EJEMPLO 2.6

Maximización con restricciones: el estado de salud una vez más

Volvamos otra vez al problema de la maximización de la salud. Al igual que antes, el objetivo del individuo es maximizar

$$y = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5,$$

pero ahora supóngase que las opciones de x_1 y x_2 están restringidas por el hecho de que el individuo sólo tolera una dosis de medicamentos por día. Es decir,

$$x_1 + x_2 = 1 \tag{2.56}$$

o

$$1 - x_1 - x_2 = 0.$$

Nótese que, dada la restricción de las dosis posibles, ya no es viable alcanzar el punto óptimo original ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$) por lo cual se deben determinar otros valores. Para ello, primero se escribe la expresión lagrangiana:

$$\mathscr{L} = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5 + \lambda\,(1 - x_1 - x_2). \tag{2.57}$$

Si derivamos $\mathscr{L}$ respecto a x_1, x_2 y λ se obtiene la siguiente condición necesaria para obtener un máximo con restricciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= -2x_1 + 2 - \lambda = 0\\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= -2x_2 + 4 - \lambda = 0\\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= 1 - x_1 - x_2 = 0.\end{aligned} \tag{2.58}$$

Se deben resolver estas ecuaciones para obtener los valores óptimos de x_1, x_2 y λ. Al utilizar la primera y la segunda ecuación se obtiene

$$-2x_1 + 2 = \lambda = -2x_2 + 4$$

o

$$x_1 = x_2 - 1. \tag{2.59}$$

La sustitución de este valor por x_1 en la restricción ofrece la solución:

$$\begin{aligned}x_2 &= 1\\ x_1 &= 0.\end{aligned} \tag{2.60}$$

(*continúa*)

EJEMPLO 2.6 ***CONTINUACIÓN***

En otras palabras, si esta persona sólo tolera una dosis de medicamentos, entonces debe optar por tomar sólo el segundo medicamento. Al utilizar una de las dos primeras ecuaciones, es fácil completar la solución al demostrar que

$$\lambda = 2. \tag{2.61}$$

Por tanto, esta es la solución al problema de maximización con restricciones. Si $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, entonces y toma el valor 8. La restricción de los valores de x_1 y x_2 para que su suma sea igual a 1 ha disminuido el valor máximo del estado de salud, y, de 10 a 8.

Pregunta: Suponga que este individuo pudiera tolerar dos dosis por día. ¿Esperaría usted que y aumentara? ¿Los incrementos en su tolerancia más allá de tres dosis al día tendrían efecto en y?

EJEMPLO 2.7

Vallas óptimas y maximización con restricciones

Suponga que un agricultor tiene una valla de determinada longitud, P, y que quiere cercar el área rectangular más grande posible. ¿Qué forma de área debería cercar el agricultor? Se trata claramente de un problema de maximización con restricciones. Para resolverlo, dejemos que x sea la longitud de un lado del rectángulo y y la longitud del otro lado. Por tanto, el problema consiste en elegir x y y de forma que maximice el área del campo (dado por $A = x \cdot y$), sujeto a la restricción de que el perímetro está fijo en $P = 2x + 2y$.

Si se escribe la expresión lagrangiana se tendrá

$$\mathscr{L} = x \cdot y + \lambda(P - 2x - 2y), \tag{2.62}$$

donde λ es la incógnita del multiplicador lagrangiano. Las condiciones de primer orden para el máximo son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} &= y - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} &= x - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= P - 2x - 2y = 0. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Deben resolverse las tres ecuaciones de 2.63 de manera simultánea para x, y y λ. Las dos primeras ecuaciones expresan que $y/2 = x/2 = \lambda$, por lo cual x debe ser igual a y (el campo debe ser cuadrado). También implican que se deben elegir x y y de forma que la proporción de los beneficios marginales respecto a los costos marginales sea la misma para ambas variables. El beneficio (en términos del área cercada) de una unidad más de x está determinado por y (el área aumenta en $1 \cdot y$), y el costo marginal (en términos del perímetro) es 2 (el perímetro disponible se reduce en 2 por cada unidad que aumenta la longitud del lado x). Las condiciones del máximo dicen que esta proporción debe ser igual para cada una de las variables.

Puesto que se ha demostrado que $x = y$, es posible utilizar la restricción para demostrar que

$$x = y = \frac{P}{4}, \tag{2.64}$$

(*continúa*)

EJEMPLO 2.7 *CONTINUACIÓN*

y, puesto que $y = 2\lambda$,

$$\lambda = \frac{P}{8}. \tag{2.65}$$

INTERPRETACIÓN DEL MULTIPLICADOR LAGRANGIANO. Si el agricultor quisiera saber cuánto campo más puede cercar añadiendo un metro más de valla, el multiplicador lagrangiano sugiere que podría calcularlo al dividir el perímetro actual entre 8. Algunas cifras específicas dejarían en claro lo anterior. Suponga que el campo actualmente tiene un perímetro de 400 metros. Si el agricultor ha hecho una planificación "óptima", entonces el campo será un cuadrado de 100 metros (= $P/4$) por lado. El área cercada medirá 10 000 metros cuadrados. Supóngase ahora que el perímetro (es decir, la valla disponible) aumentara en un metro. Entonces, la ecuación 2.65 "predeciría" que el área total aumentaría, aproximadamente 50 (= $P/8$) metros cuadrados. De hecho, se puede demostrar lo anterior de la manera siguiente: dado que ahora el perímetro mide 401 metros, cada lado del cuadrado tendrá 401/4 metros. Por tanto, el área total del campo es $(401/4)^2$, que, según la calculadora del autor de este texto, da por resultado 10 050.06 metros cuadrados. Por tanto, la "predicción" de un incremento de 50 metros cuadrados que presenta el multiplicador lagrangiano es bastante atinada. Como en todos los problemas de maximización con restricciones, en este caso el multiplicador lagrangiano proporciona información útil sobre el valor implícito de la restricción.

DUALIDAD. La dualidad de este problema de maximización con restricciones es que, para un área dada de un campo rectangular, el agricultor quiere minimizar el tamaño de la valla que necesita para cercarlo. Matemáticamente, el problema consiste en minimizar

$$P = 2x + 2y, \tag{2.66}$$

sujeto a la restricción

$$A = x \cdot y. \tag{2.67}$$

Escribiendo la expresión lagrangiana

$$\mathscr{L}^D = 2x + 2y + \lambda^D(A - x \cdot y) \tag{2.68}$$

(donde D indica el concepto de dualidad) se obtendrán las siguientes condiciones de primer orden para el mínimo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}^D}{\partial x} &= 2 - \lambda^D \cdot y = 0\\ \frac{\partial \mathscr{L}^D}{\partial y} &= 2 - \lambda^D \cdot x = 0\\ \frac{\partial \mathscr{L}^D}{\partial \lambda^D} &= A - x \cdot y = 0.\end{aligned} \tag{2.69}$$

Si se resuelven estas ecuaciones como antes, se obtendrá el resultado

$$x = y = \sqrt{A}. \tag{2.70}$$

De nueva cuenta, el campo debe ser cuadrado para poder minimizar la longitud de la valla. El valor del multiplicador lagrangiano en este problema es

$$\lambda^D = \frac{2}{y} = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{A}}. \tag{2.71}$$

Al igual que antes, este multiplicador lagrangiano indica la relación entre el objetivo (minimizar la valla) y la restricción (la necesidad de cercar el campo). Si el campo tuviera 10 000 metros cuadrados, como se vio antes, sería necesaria una valla de 400 metros de longitud. El incremento del campo en un metro cuadrado exigiría aproximadamente 0.02 metros más de valla

(*continúa*)

EJEMPLO 2.7 *CONTINUACIÓN*

($= 2/\sqrt{A} = 2/100$). Usted tal vez quiera utilizar su calculadora para comprobar que, en efecto, es así: una valla de 100 005 metros en cada lado cercaría exactamente 10 001 metros cuadrados. Aquí, como en la mayoría de los problemas de dualidad, el valor del lagrangiano de la dualidad es sencillamente la inversa del valor del lagrangiano en el problema inicial. Ambos ofrecen la misma información, pero de forma ligeramente distinta.

Pregunta: En este caso, una restricción implícita es que el campo del agricultor es rectangular. Si no se impusiera esta restricción, ¿qué forma del campo permitiría cercar una área máxima? ¿Cómo puede demostrarlo?

El teorema de la envolvente en problemas de maximización con restricciones

El teorema de la envolvente, que se analizó anteriormente con relación a los problemas de maximización sin restricciones, también tiene importantes aplicaciones en los problemas de maximización con restricciones. Aquí se ofrecerá únicamente una breve presentación del teorema. Más adelante se verá una serie de sus aplicaciones.

Supóngase que se quiere obtener el valor máximo de

$$y = f(x_1 \ldots x_n; a), \tag{2.72}$$

sujeto a la restricción

$$g(x_1 \ldots x_n; a) = 0, \tag{2.73}$$

donde se ha hecho explícito que las funciones f y g dependen de un parámetro, a. Como se ha demostrado, una forma de solucionar este problema consiste en escribir la expresión lagrangiana

$$\mathscr{L} = f(x_1 \ldots x_n; a) + \lambda g(x_1 \ldots x_n; a) \tag{2.74}$$

y resolver las condiciones de primer orden (véanse las ecuaciones 2.51) para los valores óptimos con restricciones $x_1^* \ \ldots \ x_n^*$. De manera alternativa, es posible demostrar que

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial a}(x_1^* \cdots x_n^*; a). \tag{2.75}$$

Es decir, se puede determinar la variación del valor máximo de y que resulta de un cambio en el parámetro a (y volvemos a calcular los nuevos valores óptimos de las x) al diferenciar parcialmente la expresión lagrangiana (ecuación 2.74) y evaluando la derivada parcial resultante en el punto óptimo.[10] Por tanto, la expresión lagrangiana desempeña el mismo papel si se aplica el teorema de la envolvente a problemas con restricciones que el que desempeña la función objetivo en los problemas sin restricciones. Como simple ejercicio, usted tal vez quiera demostrar que este resultado es válido en el problema de la cerca alrededor del campo rectangular descrito en el ejemplo 2.7.[11]

[10]Encontrará un análisis más exhaustivo del teorema de la envolvente en problemas de maximización con restricciones en, Eugene Silberger y Wing Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis,* 3a. ed., Irwin/McGraw-Hill, Boston, 2001, pp. 159-161.

[11]En el caso del primer problema, el perímetro P es el parámetro de principal interés. Al calcular los valores óptimos de x y de y y al sustituirlos en la expresión del área (A) del campo, resulta fácil demostrar que $dA/dP = P/8$. La diferenciación de la expresión lagrangiana (ecuación 2.62) produce la expresión $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial P} = \lambda$ y, en los valores óptimos de x y y, $\frac{dA}{dP} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial P} = \lambda = \frac{P}{8}$. Así, el teorema de la envolvente, en este caso ofrece una prueba más de que podemos usar el multiplicador lagrangiano para asignar un valor implícito a la restricción.

Restricciones de desigualdad

En algunos problemas económicos las restricciones no necesariamente se cumplen con exactitud. Por ejemplo, la restricción del presupuesto de un individuo requiere que éste no gaste más de cierta cantidad por periodo, no obstante, él puede gastar menos de esa cantidad. Las restricciones de desigualdad, también aparecen en los valores permitidos para algunas variables de los problemas económicos. Por ejemplo, por lo general, las variables económicas no deben ser negativas (pero pueden tener un valor de cero). En esta sección se demostrará cómo se puede adaptar la técnica lagrangiana a estas circunstancias. Más adelante, sólo encontraremos problemas que requieren esta solución matemática en unos cuantos lugares de este libro, pero su desarrollo aquí ilustrará algunos principios generales bastante congruentes con la intuición económica.

Un ejemplo con dos variables

A efecto de evitar demasiadas expresiones engorrosas, sólo se estudiarán las restricciones de desigualdad en un caso simple que incluye la elección de dos variables. Sin embargo, es posible generalizar los resultados derivados. Supóngase que se quiere maximizar $y = f(x_1, x_2)$ sujeto a tres restricciones de desigualdad:

$$\begin{aligned} &\mathbf{1.}\ g(x_1, x_2) \geq 0; \\ &\mathbf{2.}\ x_1 \geq 0, \text{ y} \\ &\mathbf{3.}\ x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.76}$$

De ahí que se está dando cabida a la posibilidad de que la restricción introducida antes no se cumpla con exactitud (una persona no necesita gastar todo su ingreso) y al hecho de que las dos x no necesariamente sean negativas (como ocurre en la mayor parte de los problemas económicos).

Variables de holgura

Una forma de resolver este problema de optimización es introducir tres variables nuevas (a, b y c) que convierten las restricciones de desigualdad de la ecuación 2.76 en igualdades. Para asegurarnos de que las desigualdades siguen siendo válidas, se elevarán al cuadrado estas nuevas variables para asegurarnos de que sus valores sean positivos. Con este procedimiento, las restricciones de desigualdad serán

$$\begin{aligned} &\mathbf{1.}\ g(x_1, x_2) - a^2 = 0; \\ &\mathbf{2.}\ x_1 - b^2 = 0, \text{ y} \\ &\mathbf{3.}\ x_2 - c^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Toda solución que obedezca estas tres restricciones de igualdad también obedecerá las restricciones de desigualdad. Asimismo, dará por resultado que los valores óptimos de a, b y c ofrezcan información respecto a la naturaleza de las soluciones para un problema de este tipo.

Solución con el método de Lagrange

Una vez convertido el problema original que entraña desigualdades a otro que entraña igualdades, estaremos en posición de utilizar métodos lagrangianos para resolverlo. Dado que hay tres restricciones, se deben introducir tres multiplicadores lagrangianos: λ_1, λ_2 y λ_3. La expresión lagrangiana completa será

$$\mathscr{L} = f(x_1, x_2) + \lambda_1 [g(x_1, x_2) - a^2] + \lambda_2(x_1 - b^2) + \lambda_3(x_2 - c^2). \tag{2.78}$$

Se quiere determinar los valores de x_1, x_2, a, b, c, λ_1, λ_2 y λ_3 que constituyen un punto crítico para esta expresión. Esto requerirá ocho condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= f_1 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= f_2 + \lambda_1 g_2 + \lambda_3 = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial a} &= -2a\lambda_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial b} &= -2b\lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c} &= -2c\lambda_3 = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1} &= g(x_1, x_2) - a^2 = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_2} &= x_1 - b^2 = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_3} &= x_2 - c^2 = 0
\end{aligned} \tag{2.79}$$

En muchos sentidos estas condiciones son similares a las que se derivaron antes para el caso de una sola restricción de igualdad (véase la ecuación 2.51). Por ejemplo, las tres condiciones finales meramente repiten las tres restricciones revisadas. Esto garantiza que toda solución obedecerá estas condiciones. Las dos primeras ecuaciones también son similares a las condiciones óptimas calculadas antes. Si λ_2 y λ_3 fueran igual a cero, las condiciones de hecho serían idénticas. Sin embargo, la presencia de multiplicadores lagrangianos adicionales en las expresiones muestra que, en este caso, las condiciones óptimas comunes podrían no cumplirse con exactitud.

Flexibilidad complementaria

Las tres ecuaciones que incluyen las constantes a, b y c proporcionan la información más importante acerca de la naturaleza de las soluciones a problemas que entrañan restricciones de desigualdad. Por ejemplo, la tercera línea de la ecuación 2.79 implica que, en la solución óptima λ_1 o a deben ser igual a cero.[12] En el segundo caso ($a = 0$), la restricción $g(x_1, x_2) = 0$ se cumple exactamente y el valor calculado de λ_1 indica su importancia relativa para la función objetivo, f. De otra parte, si $a \neq 0$, entonces $\lambda_1 = 0$ lo cual demuestra que aun cuando la restricción se relaja, su valor para la función objetivo es cero. En el contexto del consumidor esto significa que si una persona no gasta todo su ingreso, entonces una cantidad mayor de ingreso no contribuiría en absoluto a mejorar su bienestar.

Otras relaciones de flexibilidad complementaria también cumplen con las variables elegidas x_1 y x_2. Por ejemplo, la cuarta línea de la ecuación 2.79 requiere que en la solución óptima b o λ_2 sean igual a cero. Si $\lambda_2 = 0$ entonces la solución óptima tendrá $x_1 > 0$, y esta variable elegida cumplirá con la prueba precisa del costo-beneficio que dice que $f_1 + \lambda_1 g_1 = 0$. Por otra parte, las soluciones donde $b = 0$ tienen $x_1 = 0$, y también requieren que $\lambda_2 > 0$. Por tanto, estas soluciones no involucran la utilización de x_1 porque esa variable no cumple con la prueba del costo-beneficio, como demuestra el hecho de que $f_1 + \lambda_1 g_1 < 0$. Un resultado idéntico cumple con cada variable x_2 elegida.

Estos resultados, que en ocasiones se conocen como las *condiciones Kuhn-Tucker* en honor de sus descubridores, demuestran que las soluciones para los problemas de optimización que involucran restricciones de desigualdad diferirán, en formas bastante simples, de problemas simi-

[12] Aquí no nos ocuparemos del caso degenerado en el cual estas dos variables son cero.

lares que involucran restricciones de igualdad. Por tanto, no podemos equivocarnos mucho si trabajamos primordialmente con restricciones que involucran igualdades y suponiendo que se puede recurrir a la intuición para expresar lo que podría ocurrir si los problemas involucraran, de hecho, desigualdades. Éste es el planteamiento general que se adoptará en este libro.[13]

Condiciones de segundo orden

Hasta ahora, nuestro análisis de la optimización se ha centrado fundamentalmente en las condiciones necesarias (de primer orden) para determinar el máximo. Ésta será, en efecto, la práctica que se aplicará en gran parte de este libro porque, como se verá, la mayor parte de los problemas económicos utilizan funciones en cuyo caso también se cumplen las condiciones de segundo orden para alcanzar un máximo. En esta sección se presenta un breve análisis de la relación entre las condiciones de segundo orden para alcanzar un máximo y las correspondientes condiciones de curvatura que deben tener esas funciones para asegurarnos de que se cumplan aquellas. A lo largo de todo el libro se irán presentando las explicaciones económicas de estas condiciones de curvatura.

Funciones con una variable

Primero analicemos el caso en el cual nuestro objetivo, y, es una función de una sola variable, x. Es decir,

$$y = f(x). \tag{2.80}$$

Una condición necesaria para que esta función alcance su valor máximo en algún punto es que

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0 \tag{2.81}$$

en ese punto. Para asegurarnos de que ese punto es, en efecto, el máximo y tiene que decrecer cuando nos alejamos de él. Ya se sabe (de la ecuación 2.81) que, para pequeñas variaciones de x, el valor de y no cambia y lo que se tiene que comprobar es si y aumenta antes de alcanzar esa "meseta" y después disminuye. Ya hemos derivado una expresión de la variación de y (dy), que está dada por la derivada total

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{2.82}$$

Ahora, lo que se necesita es que dy disminuya en el caso de pequeños incrementos del valor de x. La diferencial de la ecuación 2.82 está determinada por

$$d(dy) = d^2y = \frac{d[f'(x)\,dx]}{dx} \cdot dx = f''(x)\,dx \cdot dx = f''(x)\,dx^2. \tag{2.83}$$

pero

$$d^2y < 0$$

implica que

$$f''(x)\,dx^2 < 0 \tag{2.84}$$

y dado que dx^2 debe ser positiva (porque algo al cuadrado siempre es positivo), se obtendrá

$$f''(x) < 0 \tag{2.85}$$

como exige la condición de segundo orden. Dicho en palabras, esta condición exige que la función f tenga una forma cóncava en el punto crítico (compare las figuras 2.1 y 2.2). A lo largo de esta sección se encontrarán condiciones similares de curvatura.

[13]La situación puede ser mucho más compleja cuando no podemos confiar que el cálculo nos ofrezca una solución, tal vez porque las funciones de un problema no son diferenciables. Encontrará una explicación en, Avinask K. Dixit. *Optimization in Economic Theory,* 2a. ed., Oxford University Press, Oxford, 1990.

EJEMPLO 2.8

La maximización de las ganancias, otra vez

En el ejemplo 2.1 se analizó el problema de determinar el máximo de la función

$$\pi = 1000q - 5q^2. \tag{2.86}$$

La condición de primer orden para alcanzar un máximo exige que

$$\frac{d\pi}{dq} = 1000 - 10q = 0 \tag{2.87}$$

o

$$q^* = 100. \tag{2.88}$$

La segunda derivada de la función está determinada por

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -10 < 0, \tag{2.89}$$

y, por tanto, el punto $q^* = 100$ obedece condiciones suficientes para un máximo local.

Pregunta: En este caso, la segunda derivada no sólo es negativa en el punto óptimo, sino que siempre es negativa. ¿Esto qué implica respecto al punto óptimo? ¿Cómo debe interpretarse el hecho de que la segunda derivada es una constante?

Funciones con dos variables

Veamos un segundo caso, donde y es una función con dos variables independientes:

$$y = f(x_1, x_2). \tag{2.90}$$

Una condición necesaria para que esta función alcance su valor máximo es que las derivadas parciales, en las direcciones tanto de x_1 como de x_2 sean igual a cero. Es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= f_1 = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} &= f_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.91}$$

Un punto que cumpla estas condiciones será un sitio "plano" de la función (un punto donde $dy = 0$) y, por tanto, será candidato para un máximo. Para asegurarnos de que ese punto es un máximo local, debe disminuir para movimientos en una dirección que se aleje del punto crítico, o sea que, en términos gráficos, sólo hay una forma de alejarse de la cima de una montaña y ésta es disminuir.

Un argumento intuitivo

Antes de describir las propiedades matemáticas requeridas de ese punto, tal vez resulte útil adoptar un planteamiento intuitivo. Si sólo se analizan los movimientos en la dirección de x_1 la condición necesaria es clara: la pendiente en la dirección de x_1 (es decir, la derivada parcial f_1) debe bajar a partir del punto crítico. Esto es sencillamente una aplicación del análisis del caso de una sola variable y muestra que, para alcanzar un máximo, la segunda derivada parcial en la dirección x_1 debe ser negativa. Un argumento idéntico es válido para los movimientos que van exclusivamente en dirección de x_2. Por tanto, las dos segundas derivadas parciales (f_{11} y f_{22})

deben ser negativas para alcanzar un máximo local. Utilizando la analogía de la montaña, si se presta atención tan sólo a los movimientos norte-sur o este-oeste, entonces la pendiente de la montaña debe empezar a bajar cuando se cruza la cumbre; es decir, la pendiente debe pasar de positiva a negativa.

La complejidad particular que surge en el caso de dos variables implica movimientos a través del punto óptimo que no son exclusivamente en la dirección de x_1 o de x_2 (por ejemplo, movimientos del noreste al sudoeste). En estos casos, las derivadas parciales de segundo orden no ofrecen información completa sobre cómo cambia la pendiente cerca del punto crítico. También se deben imponer condiciones en las derivadas parciales cruzadas ($f_{12} = f_{21}$) para asegurarnos de que dy es decreciente en el caso de movimientos que pasan del punto crítico en una dirección. Como se verá, estas condiciones implican que se exige que las derivadas parciales propias de segundo orden sean lo bastante negativas como para contrarrestar todas las posibles derivada parciales cruzadas "perversas" que pudieran existir. La intuición sugiere que si la montaña tiene suficiente pendiente en las direcciones norte-sur y este-oeste, entonces el hecho de que la pendiente no sea excesiva en otras direcciones se puede compensar.

Un análisis formal

Ahora pasaremos a reflejar estas cuestiones de manera más formal. Lo que se quiere determinar son las condiciones que deben imponerse a las segundas derivadas parciales de la función f para asegurarnos de que d^2y es negativa en el caso de movimientos en una dirección a partir del punto crítico. Recuerde primero que la diferencial total de la función está determinada por

$$dy = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2. \tag{2.92}$$

La diferencial de esa función está determinada por

$$d^2y = (f_{11}\, dx_1 + f_{12}\, dx_2)\, dx_1 + (f_{21}\, dx_1 + f_{22}\, dx_2)\, dx_2 \tag{2.93}$$

o

$$d^2y = f_{11}\, dx_1^2 + f_{12}\, dx_2\, dx_1 + f_{21}\, dx_1\, dx_2 + f_{22}\, dx_2^2. \tag{2.94}$$

Porque, según el teorema de, $f_{12} = f_{21}$, se pueden ordenar los términos para obtener

$$d^2y = f_{11}\, dx_1^2 + 2\, f_{12}\, dx_1\, dx_2 + f_{22}\, dx_2^2. \tag{2.95}$$

Para que la ecuación 2.95 sea negativa sin ambigüedad alguna ante una variación de las x (es decir, para las opciones de dx_1 y de dx_2), evidentemente es necesario que f_{11} y f_{22} sean negativas. Por ejemplo, si $dx_2 = 0$, entonces

$$d^2y = f_{11}\, dx_1^2 \tag{2.96}$$

y $d^2y < 0$ implica que

$$f_{11} < 0. \tag{2.97}$$

Puede esgrimirse el mismo argumento para f_{22} haciendo que $dx_1 = 0$. Si ni dx_1 ni dx_2 son igual a cero, entonces se debe considerar la parcial cruzada, f_{12}, para decidir si d^2y es o no negativa sin ambigüedades. Puede utilizarse un poco de álgebra para demostrar que la condición requerida es[14]

$$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0. \tag{2.98}$$

[14]La prueba empieza por sumar y restar el término $(f_{12}dx_2)^2/f_{11}$ a la ecuación 2.95 y factorizar. Sin embargo, este planteamiento sólo es aplicable a este caso concreto. Un planteamiento más fácil de generalizar, que utiliza el álgebra matricial, reconoce que la ecuación 2.95 es una "forma cuadrática" en dx_1 y dx_2, y que las ecuaciones 2.97 y 2.98 son lo mismo que exigir que la matriz hessiana

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

esté "definida negativa". En particular, la ecuación 2.98 exige que el determinante de esta matriz hessiana sea positivo. Para un análisis de esta cuestión, véanse las "Ampliaciones" de este capítulo.

Funciones cóncavas

La intuición sugiere que la ecuación 2.98 exige que las segundas derivadas parciales propias (f_{11} y f_{22}) sean lo bastante negativas para compensar todos los efectos perversos posibles de las derivadas parciales cruzadas ($f_{12} = f_{21}$). Las funciones que obedecen esta condición se llaman *funciones cóncavas*. En tres dimensiones, estas funciones parecen tazas de té colocadas al revés. (Véase el ejemplo 2.10 para una ilustración.) Esta imagen deja en claro que un punto plano en este tipo de función es, en efecto, un auténtico máximo, porque la función siempre tiene pendiente negativa a partir de ese punto. En términos más generales, las funciones cóncavas tienen la propiedad de que siempre están por debajo de un plano tangente a ellas: el plano definido por el valor máximo de la función es, simplemente, un caso especial de esta propiedad.

EJEMPLO 2.9

Condiciones de segundo orden: la salud por última vez

En el ejemplo 2.3 se analizó la función del estado de salud

$$y = f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5. \tag{2.99}$$

Las condiciones de primer orden para el máximo son

$$\begin{aligned} f_1 &= -2x_1 + 2 = 0 \\ f_2 &= -2x_2 + 4 = 0 \end{aligned} \tag{2.100}$$

o

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1 \\ x_2^* &= 2. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Las derivadas parciales de segundo orden de la ecuación 2.99 son

$$\begin{aligned} f_{11} &= -2 \\ f_{22} &= -2 \\ f_{12} &= 0. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Estas derivadas obedecen claramente a las ecuaciones 2.97 y 2.98, por lo cual se cumplen las condiciones necesarias y las suficientes para obtener un máximo local.[15]

Pregunta: Describa la forma cóncava de la función del estado de salud y explique por qué únicamente tiene un solo valor máximo global.

Maximización con restricciones

Por último, analicemos el caso del problema de elegir x_1 y x_2 para maximizar

$$y = f(x_1, x_2), \tag{2.103}$$

sujeto a la restricción lineal

$$c - b_1x_1 - b_2x_2 = 0 \tag{2.104}$$

(donde c, b_1, b_2 son parámetros constantes en el problema). Este problema es de un tipo que se encontrará con frecuencia en este libro y es un caso especial de los problemas de maximización

[15]Nótese que las ecuaciones 2.102 cumplen las condiciones suficientes, no sólo en el punto crítico, sino también para todas las posibles opciones de x_1 y x_2. Es decir, la función es cóncava. En ejemplos más complejos no tiene por qué ser así: las condiciones de segundo orden sólo tienen que ser satisfechas en el punto crítico para que exista un máximo local.

con restricciones analizados antes. Ahí, se demostró que se pueden derivar las condiciones de primer orden para el máximo si se escribe el lagrangiano

$$\mathscr{L} = f(x_1, x_2) + \lambda(c - b_1x_1 - b_2x_2). \tag{2.105}$$

La diferenciación parcial respecto a x_1, x_2 y λ ofrece resultados familiares:

$$\begin{aligned} f_1 - \lambda b_1 &= 0 \\ f_2 - \lambda b_2 &= 0 \\ c - b_1x_1 - b_2x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.106}$$

Por lo general, es posible resolver estas ecuaciones para determinar los valores óptimos de x_1, x_2 y λ. Para asegurarnos de que el punto derivado de esta manera es un máximo local, se deben analizar de nuevo los movimientos que se alejan de los puntos críticos utilizando la "segunda" diferencial total:

$$d^2y = f_{11}\ dx_1^2 + 2f_{12}\ dx_1\ dx_2 + f_{22}\ dx_2^2. \tag{2.107}$$

Sin embargo, en este caso, no es posible hacer todos los pequeños cambios posibles en las x sino que sólo es posible considerar que los valores de x_1 y x_2 que sigan cumpliendo la restricción serán alternativas válidas para el punto crítico. Para analizar estos cambios, debe calcularse la diferencial total de la restricción:

$$-b_1\ dx_1 - b_2\ dx_2 = 0 \tag{2.108}$$

o

$$dx_2 = -\frac{b_1}{b_2}dx_1. \tag{2.109}$$

Esta ecuación muestra los cambios relativos de x_1 y x_2 que se pueden hacer cuando se consideran los movimientos desde el punto crítico. Para seguir avanzando en la resolución de este problema, es necesario utilizar las condiciones de primer orden. Las dos primeras implican que

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{b_1}{b_2}, \tag{2.110}$$

y, al combinar este resultado con la ecuación 2.109, se obtendrá

$$dx_2 = -\frac{f_1}{f_2}dx_1. \tag{2.111}$$

Ahora se puede sustituir esta expresión por dx_2 en la ecuación 2.107 para mostrar la condición que se debe mantener para que d^2y sea negativa:

$$\begin{aligned} d^2y &= f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1\left(-\frac{f_1}{f_2}dx_1\right) + f_{22}\left(-\frac{f_1}{f_2}dx_1\right)^2 \\ &= f_{11}dx_1^2 - 2f_{12}\frac{f_1}{f_2}dx_1^2 + f_{22}\frac{f_1^2}{f_2^2}dx_1^2. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Si se combinan términos y se colocan sobre un denominador común se obtendrá

$$d^2y = (f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2)\frac{dx_1^2}{f_2^2}. \tag{2.113}$$

Por tanto, para que $d^2y < 0$, se debe cumplir que

$$f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2 < 0. \tag{2.114}$$

Funciones cuasi cóncavas

Esta ecuación parece poco más que una masa compleja y desordenada de símbolos matemáticos, pero, de hecho, se trata de una condición bastante importante. Representa un conjunto de funciones llamadas *funciones cuasi cóncavas*. Éstas tienen la propiedad de que el conjunto de todos los puntos donde esa función toma un valor mayor que el de una constante específica, es un conjunto convexo (es decir, podemos unir dos puntos cualesquier del conjunto con una línea contenida enteramente dentro del conjunto). Muchos modelos económicos se caracterizan por este tipo de funciones y, como se verá con más detalle en el capítulo 3, en estos casos la condición de cuasi concavidad tiene una interpretación económica relativamente sencilla. Los problemas 2.9 y 2.10 analizan dos funciones cuasi cóncavas concretas que se encontrarán con frecuencia en este libro. El ejemplo 2.10 muestra la relación entre la función cóncava y la cuasi cóncava.

EJEMPLO 2.10

Funciones cóncavas y cuasi cóncavas

Puede ilustrarse la diferencia entre las funciones cóncavas y las cuasi cóncavas con la función[16]

$$y = f(x_1, x_2) = (x_1 \cdot x_2)^k \tag{2.115}$$

donde las x sólo toman valores positivos y el parámetro k puede tomar diversos valores positivos.

Sea cual fuere el valor que toma k esta función es cuasi cóncava. Una forma de demostrar lo anterior es analizar las curvas de nivel de la función, estableciendo y igual a un valor específico, por decir c. En este caso

$$y = c = (x_1 x_2)^k \quad \text{o} \quad x_1 x_2 = c^{\frac{1}{k}} = c'. \tag{2.116}$$

Empero, esto tan sólo es la ecuación de una hipérbole rectangular normal. Queda claro que el conjunto de puntos en los cuales y toma valores superiores a c es convexa porque está limitada por esta hipérbole.

Un camino más matemático para demostrar la cuasi concavidad aplicaría la ecuación 2.114 a esta función. El álgebra necesaria para hacerlo tal vez sea un tanto compleja, pero vale la pena el esfuerzo. Éstos son los distintos componentes de la ecuación 2.114:

$$\begin{aligned}
f_1 &= kx_1^{k-1}x_2^k \\
f_2 &= kx_1^k x_2^{k-1} \\
f_{11} &= k(k-1)x_1^{k-2}x_2^k \\
f_{22} &= k(k-1)x_1^k x_2^{k-2} \\
f_{12} &= k^2 x_1^{k-1} x_2^{k-1}
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2 &= k^3(k-1)x_1^{3k-2}\,x_2^{3k-2} - 2k^4\,x_1^{3k-2}x_2^{3k-2} \\
&\quad + k^3(k-1)x_1^{3k-2}\,x_2^{3k-2} \\
&= 2k^3x_1^{3k-2}\,x_2^{3k-2}\,(-1)
\end{aligned} \tag{2.118}$$

que es claramente negativa, como lo requiere la cuasi concavidad.

El hecho de que la función f sea cóncava o no dependerá del valor de k. Si $k < 0.5$ la función es, en efecto, cóncava. Una forma intuitiva de ver lo anterior radica en considerar exclusivamente los puntos donde $x_1 = x_2$. En el caso de estos puntos,

$$y = (x_1^2)^k = x_1^{2k} \tag{2.119}$$

que, para $k < 0.5$, es cóncava. De otra parte, para $k > 0.5$, esta función es convexa.

(*continúa*)

[16]Esta función es un caso especial de la función Cobb-Douglas. Véase también el problema 2.9 en las ampliaciones de este capítulo donde encontrará más detalles sobre esta función.

EJEMPLO 2.10 ***CONTINUACIÓN***

Una prueba más contundente utiliza las derivadas parciales de la ecuación 2.117. En este caso, se puede expresar la condición de la concavidad como

$$\begin{aligned} f_{11}f_{22} - f_{12}^2 &= k^2(k-1)^2\, x_1^{2k-2}\, x_2^{2k-2} - k^4\, x_1^{2k-2}\, x_2^{2k-2} \\ &= x_1^{2k-2}\, x_2^{2k-2}\, [k^2(k-1)^2 - k^4] \\ &= x_1^{2k-1}\, x_2^{2k-1}\, [k^2(-2k+1)] \end{aligned} \tag{2.120}$$

y esta expresión es positiva (como se requiere para la concavidad) para

$$(-2k+1) > 0 \quad \text{o} \quad k < 0.5.$$

De otra parte, la función es convexa para $k > 0.5$.

Una ilustración gráfica

La figura 2.4 presenta ilustraciones tridimensionales de los tres ejemplos específicos de esta función: para $k = 0.2$, $k = 0.5$ y $k = 1$. Nótese que en los tres casos las curvas de nivel de la función tienen formas hiperbólicas convexas. Es decir, para un valor fijo de y las funciones son bastante similares. Esto demuestra la cuasi concavidad de la función. Las diferencias principales entre las funciones están ilustradas por la forma en que el valor de y aumenta a medida que las dos x aumentan juntas. En la figura 2.4a (donde $k = 0.2$) el incremento de y disminuye a medida que las x incrementan. Esto imprime en la función una forma redonda, parecida a una taza, que indica la concavidad. Para $k = 0.5$, y parece que se incrementa linealmente conforme las dos x aumentan. Ésta es la frontera entre la concavidad y la convexidad. Por último, cuando $k = 1$ (como en la figura 2.4c) los incrementos simultáneos en los valores de las dos x incrementan a y muy velozmente. La esencia de la función luce convexa para reflejar el incremento de las ganancias.

Una mirada atenta a la figura 2.4a sugiere que toda función que sea cóncava también será cuasi cóncava. El problema 2.8 le pide que demuestre si esto es así. Este ejemplo muestra que lo contrario de esta afirmación no es cierto, o sea que las funciones cuasi cóncavas no necesariamente son cóncavas. La mayor parte de las funciones que se encontrarán en este libro también ilustrarán este hecho, o sea que la mayor parte serán cuasi cóncavas, pero no necesariamente cóncavas.

Pregunta: Explique por qué las funciones que ilustran la figura 2.4a y 2.4c tendrían valores máximos si las x estuvieran sujetas a una restricción lineal, pero sólo la gráfica de la figura 2.4a tendría un máximo sin restricciones.

Funciones homogéneas

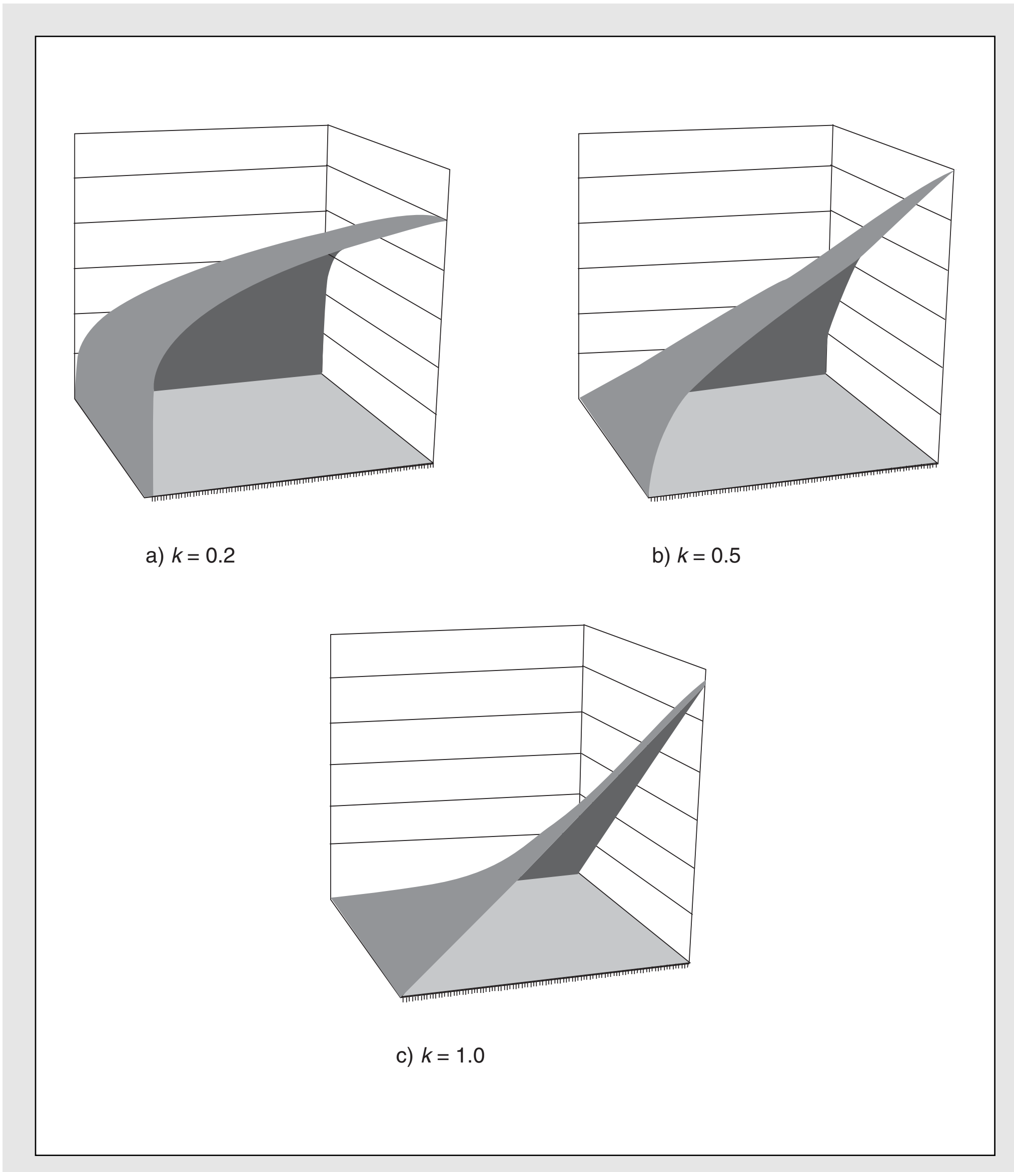
Muchas de las funciones que surgen de forma natural de la teoría económica tienen otras propiedades matemáticas. Un conjunto de propiedades particularmente importante se refiere al comportamiento que observan estas funciones cuando todos (o la mayor parte de) sus argumentos incrementan proporcionalmente. Estas situaciones se presentan cuando nos planteamos preguntas como qué ocurriría si todos los precios incrementaran 10% o cómo cambiaría la producción de una empresa si duplicara todos los insumos que utiliza. El análisis de estas preguntas conduce, de forma natural, al concepto de las funciones homogéneas. En concreto, se dice que una función $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es homogénea de grado k si

$$f(tx_1, tx_2 \ldots tx_n) = t^k f(x_1, x_2 \ldots x_n). \tag{2.121}$$

Los ejemplos de funciones homogéneas más importantes son aquellos donde $k = 1$ o $k = 0$. Dicho en palabras, cuando una función es homogénea de grado uno, la duplicación de todos sus argumentos duplica el valor de la función misma. En el caso de funciones homogéneas de

FIGURA 2.4 **Funciones cóncavas y cuasi cóncavas**

En los tres casos estas funciones son cuasi cóncavas. Para una *y* fija, sus curvas de nivel son convexas, pero la función es estrictamente cóncava tan sólo para $k = 0.2$. El caso $k = 1.0$ demuestra con claridad la falta de concavidad porque la función no está por debajo de su plano tangente.



grado 0, la duplicación de todos sus argumentos hace que el valor de la función no sufra cambio alguno. Las funciones también deben ser homogéneas cuando cambian sólo ciertas subseries de sus argumentos; es decir, la duplicación de algunas de las *x* podría duplicar el valor de la función si los otros argumentos de la función se mantienen constantes. No obstante, usualmente, la homogeneidad se aplica a los cambios de todos los argumentos de una función.

Homogeneidad y derivadas

Si una función de grado *k* es homogénea y si es posible diferenciarla, entonces las derivadas parciales de la función serán homogéneas de grado $k - 1$. La prueba de la anterior se deriva directamente de la definición de homogeneidad. Por ejemplo, si se diferencia la ecuación 2.121 con relación a su primer argumento tendremos

$$\frac{\partial f(tx_1, \ldots tx_n)}{\partial x_1} \cdot t = t^k \frac{\partial f(x_1 \ldots x_n)}{\partial x_1}$$

o

$$f_1\ (tx_1 \ldots tx_n) = t^{k-1} f_1\ (x_1 \ldots x_n) \tag{2.122}$$

que demuestra que f_1 cumple la definición de homogeneidad de grado $k - 1$. Dado que las ideas de marginalidad son tan prevalecientes en la teoría microeconómica, esta propiedad demuestra que algunas propiedades importantes de los efectos marginales pueden ser inferidas de las propiedades de la función subyacente misma.

Teorema de Euler

Es posible demostrar otra característica muy útil de las funciones homogéneas si se diferencia la definición de homogeneidad con respecto al factor de proporcionalidad, t. En este caso, se diferencia primero el lado derecho de la ecuación 2.121:

$$kt^{k-1} f(x_1 \ldots x_n) = x_1 f_1\ (tx_1 \ldots tx_n) + \ldots + x_n f_n\ (tx_1 \ldots tx_n)$$

y, si se deja que $t = 1$, esta ecuación será

$$kf(x_1 \ldots x_n) = x_1 f_1\ (x_1 \ldots x_n) + \ldots + x_n f_n\ (x_1 \ldots x_n) \tag{2.123}$$

Esta ecuación se llama teorema de Euler (por el matemático que descubrió la constante e) para las funciones homogéneas. Demuestra que, en el caso de una función homogénea, existe una relación contundente entre los valores de la función y los valores de sus derivadas parciales. Diversas relaciones económicas entre funciones que son muy importantes están fundadas en esta observación.

Funciones homotéticas

Una función homotética es aquella que se forma tomando una transformación monótona de una función homogénea.[17] Las transformaciones monótonas, por definición, conservan el orden de la relación entre los argumentos de una función y el valor de ésta. Si ciertos conjuntos de x producen valores más altos de f, también producirán valores más altos para una transformación monótona de f. Sin embargo, dado que las transformaciones monótonas pueden adoptar muchas formas, no podemos esperar que conserven una relación matemática exacta como la que encarnan las funciones homogéneas. Por ejemplo, consideremos la función $f(x, y) = x \cdot y$. Está claro que esta función es homogénea de grado 2; es decir la duplicación de sus dos argumentos multiplicará el valor de la función por 4. No obstante, la transformación monótona, F, que simplemente suma 1 a f (es decir, $F(f) = f + 1 = xy + 1$) no es homogénea en absoluto. Por tanto, salvo en casos especiales, las funciones homotéticas no poseen las propiedades de homogeneidad de las funciones subyacentes y, sin embargo, sí conservan una característica importante de las funciones homogéneas: que los intercambios implícitos entre las variables de una función tan sólo dependen de los cocientes de dichas variables y no de sus valores absolutos. Aquí, se demostrará lo anterior en el caso de una función implícita simple de dos variables $f(x, y) = 0$. Será más fácil demostrar casos más generales cuando se llegue al aspecto económico del asunto más adelante en este libro.

[17]Dado que un caso límite de una transformación monótona es dejar la función inalterada, todas las funciones homogéneas son también homotéticas.

La ecuación 2.28 demostraba que el intercambio implícito entre x y y en el caso de una función con dos variables está determinado por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Si se supone que f es homogénea de grado k, sus derivadas parciales serán homogéneas de grado $k - 1$ y que el intercambio implícito entre x y y es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{t^{k-1} f_x(tx, ty)}{t^{k-1} f_y(tx, ty)} = -\frac{f_x(tx, ty)}{f_y(tx, ty)}. \quad \textbf{(2.124)}$$

Ahora dejemos que $t = \frac{1}{y}$ y la ecuación 1.124 se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x\left(\frac{x}{y}, 1\right)}{f_y\left(\frac{x}{y}, 1\right)} \quad \textbf{(2.125)}$$

que muestra que el intercambio dependerá exclusivamente de la proporción de x a y. Ahora, si se aplica una transformación monótona F (donde $F' > 0$), a la función homogénea original f, se obtendrá

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F' f_x\left(\frac{x}{y}, 1\right)}{F' f_y\left(\frac{x}{y}, 1\right)} = -\frac{f_x\left(\frac{x}{y}, 1\right)}{f_y\left(\frac{x}{y}, 1\right)} \quad \textbf{(2.126)}$$

lo cual demuestra tanto que la transformación monótona no afecta el intercambio, como que ésta sigue siendo función tan sólo de la proporción de x a y. En el capítulo 3 (y en otras partes del libro) esta propiedad facilitará mucho explicar algunos resultados teóricos con gráficas bidimensionales simples, en las cuales no es necesario considerar los grados generales de las variables clave, sino tan sólo sus cocientes.

Propiedades cardinales y ordinales

En economía aplicada muchas veces es importante conocer la relación numérica exacta que existe entre las variables. Por ejemplo, al estudiar la producción tal vez queramos saber con exactitud cuánto producto extra se produciría con la contratación de un trabajador más. Ésta es una interrogante sobre las propiedades "cardinales" (es decir, numéricas) de la función de producción. En otros casos, quizá sólo nos interese el orden que siguen diversos puntos en su clasificación. Por ejemplo, en la teoría de la utilidad, suponemos que las personas clasifican por orden paquetes de bienes y que elegirán el paquete que ocupa el lugar más alto de la clasificación, pero no asignan valores numéricos únicos a esta clasificación. En términos matemáticos, toda transformación monótona conserva las propiedades ordinales de las funciones porque, por definición, una transformación monótona conserva las clasificaciones ordinales. Sin embargo, las transformaciones monótonas arbitrarias normalmente no conservan las propiedades cardinales.

Las funciones analizadas en el ejemplo 2.10 ilustran estas diferencias. Ahí se observaron las transformaciones monótonas de la función

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^k \quad \textbf{(2.127)}$$

Considerando diversos valores para el parámetro k. Se demostró que la cuasi concavidad (una propiedad ordinal) se conservaba para todos los valores de k. Por tanto, cuando se abordan problemas que se concentran en maximizar o minimizar tal función, sujeto a restricciones lineales, no debemos preocuparnos respecto a cual transformación se utilizará. Por otra parte, la función de la ecuación 2.127 es cóncava (propiedad cardinal) tan sólo para una serie reducida de valores de k. Muchas transformaciones monótonas destruyen la concavidad de f.

También se puede utilizar la función de la ecuación 2.127 para ilustrar la diferencia entre las funciones homogéneas y las homotéticas. Un incremento proporcional en los dos argumentos de f nos daría

$$f(tx_1, tx_2) = t^{2k}x_1x_2 = t^{2k}f(x_1, x_2). \tag{2.128}$$

Por tanto, el grado de homogeneidad de esta función dependerá de k; es decir, el grado de homogeneidad no se conserva independientemente de la transformación monótona que se utilice. De otra parte, la función de la ecuación 2.127 es homotética porque

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{kx_1^{k-1}x_2^k}{kx_1^k x_2^{k-1}} = \frac{x_2}{x_1}. \tag{2.129}$$

Es decir, el intercambio entre x_2 y x_1 dependerá exclusivamente de la proporción de estas dos variables y no se verá afectado por el valor de k. Por tanto, la homoteticidad es ordinal. Como se verá, esta propiedad es muy útil para desarrollar argumentos gráficos sobre proposiciones económicas.

Pregunta: ¿La explicación de este ejemplo cómo cambiaría si se tomaran en cuenta transformaciones monótonas de forma $f(x_1, x_2, k) = x_1x_2 + k$ para diversos valores de k?

RESUMEN

A pesar de que algunas partes de este capítulo parecen imponentes, el tema de este libro no son las matemáticas. Por el contrario, nuestra intención fue reunir diversos instrumentos que se utilizarán para crear modelos económicos a lo largo de la parte restante del texto. Ahí, el material de este capítulo servirá de útil referencia.

Una forma de resumir los instrumentos matemáticos presentados en este capítulo es destacar de nueva cuenta las lecciones económicas que ilustran:

- La posibilidad de utilizar las matemáticas ofrece a los economistas una vía cómoda y rápida para crear sus modelos. Así, utilizando estos instrumentos matemáticos, pueden estudiar las implicaciones de diversos supuestos económicos en un marco simplificado.
- En sus modelos, los economistas emplean mucho el concepto matemático de las derivadas de una función porque con frecuencia les interesa saber cómo los cambios marginales de una variable afectan a otra variable. Las derivadas parciales son de especial utilidad para este fin porque, por definición, representan estos cambios marginales cuando todos los demás factores permanecen constantes. Así, las derivadas parciales incorporan el supuesto ceteris paribus que aparece en la mayor parte de los modelos económicos.
- Las matemáticas de la optimización son un instrumento importante para crear modelos que suponen que los agentes económicos intentan alcanzar una meta de forma racional. En el caso sin restricciones, las condiciones de primer orden indican que se debe expandir cualquier actividad que contribuya a la meta del agente hasta el punto donde la contribución marginal de una mayor expansión sea igual a cero. En términos matemáticos, la condición de primer orden para alcanzar un óptimo exige que todas las derivadas parciales sean igual a cero.

- Casi todos los problemas económicos de optimización incluyen restricciones para las elecciones que pueden hacer los agentes. En este caso, las condiciones de primer orden para alcanzar un máximo sugieren que cada actividad debe operar en el nivel donde la proporción del beneficio marginal de la actividad con relación a su costo marginal sea igual para todas las actividades utilizadas de hecho. Este cociente común del beneficio y el costo marginales también es igual al multiplicador lagrangiano, que muchas veces se introduce para ayudar a resolver los problemas de optimización con restricciones. También es posible interpretar el multiplicador lagrangiano como el valor implícito (o precio sombra) de la restricción.

- El teorema de la función implícita es un recurso matemático útil para ilustrar que las elecciones derivadas de un problema de optimización dependen de los parámetros de ese problema (por ejemplo, los precios de mercado). El teorema de la envolvente es útil para analizar la variación que registran estas elecciones óptimas cuando cambian los parámetros (precios) del problema.

- Algunos problemas de optimización pueden involucrar restricciones que son desigualdades y no igualdades. Las soluciones de estos problemas muchas veces ilustran una "flexibilidad complementaria"; es decir, las restricciones se mantienen con la igualdad y sus multiplicadores lagrangianos no son igual a cero o, de lo contrario, las restricciones son desigualdades estrictas y sus multiplicadores lagrangianos son igual a cero. De nueva cuenta, esto ilustra que el multiplicador lagrangiano implica algo respecto a la "importancia" que tienen las restricciones.

- Las condiciones marginales de primer orden presentadas en este capítulo tan sólo son las condiciones necesarias para obtener un máximo o un mínimo locales. También deben comprobarse las condiciones que requieren que se cumplan ciertas condiciones de curvatura.

- Hay ciertos tipos de funciones que se presentan en muchos problemas económicos. Las funciones cuasi cóncavas (las funciones en las que las curvas de nivel forman conjuntos convexos) obedecen las condiciones de segundo orden de problemas de restricciones para el máximo y el mínimo cuando las restricciones son lineales. Las funciones homotéticas tienen la útil propiedad que hace que los intercambios implícitos entre las variables de las funciones dependan exclusivamente de los cocientes de dichas variables.

PROBLEMAS

2.1

Suponga que $U(x, y) = 4x^2 + 3y^2$.

a. Calcule $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$.

b. Calcule el valor de estas derivadas parciales para $x = 1$, $y = 2$.

c. Escriba el diferencial total de U.

d. Calcule dy/dx para $dU = 0$; es decir, ¿cuál es el intercambio implícito entre x y y si se mantiene U constante?

e. Demuestre que $U = 16$ cuando $x = 1$, $y = 2$.

f. ¿En qué proporción deben cambiar x y y para mantener U constante en 16 en el caso de movimientos que se alejan de $x = 1$, $y = 2$?

g. En términos más generales, ¿cuál es la forma de la línea de nivel de $U = 16$ en el caso de esta función? ¿Cuál es la pendiente de esa línea?

2.2

Suponga que los ingresos totales de una empresa dependen de la cantidad producida (q) según la función

$$R = 70q - q^2.$$

Los costos totales también dependen de q:

$$C = q^2 + 30q + 100$$

a. ¿Qué nivel de producción debe generar la empresa para maximizar las ganancias ($R - C$)? ¿A cuánto ascenderán las ganancias?

b. Demuestre que se cumplen las condiciones de segundo orden para el máximo en el nivel de producción obtenido en el inciso a.

c. ¿Esta solución cumple la ley que dice que el "ingreso marginal es igual al costo marginal"? Explique.

2.3

Suponga que $f(x, y) = xy$. Calcule el valor máximo de f si x y y están restringidas a sumar 1. Resuelva este problema de dos formas: por sustitución y utilizando el método del multiplicador lagrangiano.

2.4

La dualidad del problema en comparación con el descrito en el problema 2.3 es

$$\text{Minimizar } x + y$$
$$\text{Sujeto a } xy = 0.25$$

Resuelva este problema utilizando la técnica lagrangiana. A continuación, compare el valor que obtenga para el multiplicador lagrangiano con el valor que obtuvo en el problema 2.3. Explique la relación entre las dos soluciones.

2.5

La altura que alcanza una pelota lanzada al aire hacia arriba con cierta fuerza es una función del tiempo (t) que tarda a partir del momento en que se arroja, dada por $f(t) = -0.5gt^2 + 40t$ (donde g es una constante determinada por la fuerza de gravedad).

a. ¿El valor de t en el punto máximo de altura de la pelota cómo depende del parámetro g?

b. Utilice la respuesta del inciso anterior para describir las variaciones que registra la altura máxima a medida que g va cambiando.

c. Utilice el teorema de la envolvente para responder directamente el inciso b.

d. En la Tierra $g = 32$, pero este valor varía ligeramente en todo el orbe. Si dos lugares tuvieran constantes de gravedad que difirieran en 0.1, ¿cuál sería la diferencia de la altura máxima de una pelota lanzada en estos dos lugares?

2.6

Una manera sencilla para modelar la construcción de un buque petrolero sería empezar con una gran plancha rectangular de acero que mide x metros de ancho y $3x$ metros de largo. Después, de cada esquina de la lámina grande, se cortaría un cuadrado más pequeño que mide t metros por lado y se doblarían y soldarían los lados de la lámina de acero para producir una estructura semejante a una caja sin tapa.

a. Demuestre que el volumen de petróleo que puede contener esta caja está determinado por

$$V = t(x - 2t)\ (3x - 2t) = 3tx^2 - 8t^2x + 4t^3.$$

b. ¿Cómo debe elegirse t para maximizar V para un valor dado de x?

c. ¿Hay un valor de x que maximice el volumen de petróleo que puede transportar?

d. Suponga que el astillero está restringido a emplear exclusivamente 1 000 000 de metros cuadrados de lámina de acero para construir el buque petrolero. La restricción estaría representada por la ecuación $3x^2 - 4t^2 = 1\,000\,000$ (porque el astillero puede regresar los cuadrados cortados a cambio de crédito). Compare la solución de este problema de un máximo con restricciones con las soluciones descritas en los incisos b y c?

2.7

Considere este problema de maximización con restricciones:

$$\textbf{Maximizar } y = x_1 + 5 \ln x_2$$
$$\textbf{Sujeto a } k - x_1 - x_2 = 0$$

Donde k es una constante a la que podemos asignar un valor específico.

a. Demuestre que si $k = 10$, entonces podemos resolver el problema como uno que sólo involucra restricciones de igualdad.

b. Demuestre que resolver el problema de $k = 4$ requiere que $x_1 = -1$.

c. Si las x de este problema no deben ser negativas, ¿cuál es la solución óptima cuando $k = 4$?

d. ¿Cuál es la solución de este problema cuando $k = 20$? ¿Qué conclusión obtendría si compara esta solución con la del inciso a?

(*Nota*: Este problema involucra la función llamada “cuasi lineal”. Estas funciones proporcionan importantes ejemplos de algunos tipos de comportamiento en la teoría de consumo, como se verá más adelante.)

2.8

Demuestre que si $f(x_1, x_2)$ es una función cóncava, también es una función cuasi cóncava. Para ello, compare la ecuación 2.114 (que define la cuasi concavidad) con la ecuación 2.98 (que define la concavidad). ¿Puede dar una razón intuitiva de este resultado? ¿La afirmación contraria también es cierta? ¿Las funciones cuasi cóncavas son necesariamente cóncavas?

2.9

Una de las funciones más importantes que se encontrará a lo largo de este libro es la función Cobb-Douglas:

$$y = (x_1)^{\alpha}(x_2)^{\beta}$$

donde α y β son constantes positivas e inferiores a uno.

a. Utilice un método de “fuerza bruta” y aplique la ecuación 2.114 para demostrar que esta función es cuasi cóncava.

b. Demuestre que la función Cobb-Douglas es cuasi cóncava demostrando que cualquier línea envolvente de la forma $y = c$ (donde c es una constante positiva) es convexa y, por tanto, que el conjunto de puntos donde $y > c$ es un conjunto convexo.

c. Demuestre que si $\alpha + \beta > 1$ entonces la función Cobb-Douglas no es cóncava (demostrando así que no todas las funciones cuasi cóncavas son cóncavas). (*Nota*: Se analizará la función Cobb-Douglas con más detalle en las “Ampliaciones” de este capítulo.)

2.10

Otra función que se encontrará a menudo en este libro es la "función potencial":

$$y = x^{\delta}$$

donde $0 \le \delta \le 1$ (a veces también se analizará esta función para los casos en que δ también puede ser negativo, en cuyo caso se utilizará la forma $y = x^{\delta}/\delta$ para asegurarnos de que todas las derivadas tienen el signo correcto).

a. Demuestre que esta función es cóncava (y por tanto, también, de acuerdo con el resultado del problema 2.8, cuasi cóncava). Nótese que la $\delta = 1$ es un caso especial y que la función es "estrictamente" cóncava sólo para $\delta < 1$.

b. Demuestre que la forma multivariante de la función potencial

$$y = f(x_1, x_2) = (x_1)^{\delta} + (x_2)^{\delta}$$

también es cóncava (y cuasi cóncava). Explique por qué, en este caso, el hecho de que $f_{12} = f_{21} = 0$ hace que la determinación de la concavidad sea especialmente sencilla.

c. Una forma de incorporar efectos de "escala" en la función descrita en el inciso b consiste en utilizar la transformación monótona

$$g(x_1, x_2) = y^{\gamma} = [(x_1)^{\delta} + (x_2)^{\delta}]^{\gamma}$$

donde γ es una constante positiva. ¿Esta transformación conserva la concavidad de la función? ¿g es cuasi cóncava?

LECTURAS RECOMENDADAS

Dixit, A. K. *Optimization in Economic Theory,* 2a. ed., Oxford University Press, Nueva York, 1990.

Un estudio completo y moderno de las técnicas de la optimización. Emplea métodos analíticos relativamente avanzados.

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston y Jerry R. Green. *Microeconomic Theory,* Oxford University Press, Nueva York, 1995.

Un tratamiento enciclopédico de las matemáticas en la microeconomía. Muchos apéndices matemáticos cubren temas de un análisis de nivel relativamente alto.

Samuelson, Paul A. *Foundations of Economic Analysis,* Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947, Apéndice de matemáticas A.

Una referencia básica. El apéndice A de matemáticas presenta un análisis avanzado de las condiciones necesarias y suficientes para un máximo.

Silberberg, E. y W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis,* 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2001.

Un texto de matemáticas para microeconomía que hace hincapié en las predicciones observables de la teoría económica. El texto usa mucho el teorema de la envolvente.

Simon, Carl P. y Lawrence Blume. *Mathematics for Economists,* W.W. Norton, Nueva York, 1994.

Un texto muy útil que cubre casi todos los campos de las matemáticas importantes para los economistas. La explicación es a nivel bastante alto. Dos temas expuestos aquí mejor que en otros textos son las ecuaciones diferenciales y la topología básica del conjunto de puntos.

Sydsaeter, K., A. Strom y P. Berck. *Economists' Mathematical Manual,* 3a. ed., Springer-Verlag, Berlín, 2000.

Un instrumento indispensable para un repaso de las matemáticas. Contiene 32 capítulos que abordan la mayor parte de los instrumentos matemáticos que utilizan los economistas. Las explicaciones son breves, de modo que no es el lugar para encontrar conceptos nuevos por primera vez.

Taylor, Angus E. y W. Robert Mann. *Advanced Calculus,* 3a. ed., John Wiley, Nueva York, 1983, pp. 183-195.

Un texto general de cálculo que tiene una buena explicación de la técnica lagrangiana.

Thomas, George B. y Ross L. Finney. *Calculus and Analytic Geometry,* 8a. ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.

Texto básico de cálculo con una estupenda explicación de las técnicas de diferenciación.

AMPLIACIONES

Condiciones de segundo orden y álgebra matricial

Es posible escribir, de forma muy compacta, las condiciones de segundo orden descritas en el capítulo 2 si se utiliza el álgebra matricial. En esta ampliación se analizará brevemente este tipo de notación. Volveremos a ella en algunas otras partes de las ampliaciones y los problemas de capítulos posteriores.

Revisión del álgebra matricial

Las extensiones que aquí se presentan suponen cierto conocimiento general del álgebra matricial. Un breve recordatorio de sus principios sería:

1. Una *matriz* $n \times k$, **A,** es una serie rectangular de términos que tiene la fórmula

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nk} \end{bmatrix}.$$

   Aquí $i = 1, n$; $j = 1, k$. Podemos sumar, restar o multiplicar las matrices siempre y cuando sus dimensiones sean acordes.
2. Si $n = k$, **A** es una matriz cuadrada. Una matriz cuadrada es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$. La *matriz identidad*, $\mathbf{I}_n$, es una $n + n$ matriz cuadrada donde $a_{ij} = 1$ si $i = j$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
3. La **determinante** de una matriz cuadrada (que se escribe $|\mathbf{A}|$) es un escalar (es decir, un solo término) que se calcula al multiplicar todos los términos de la matriz. Si **A** es 2×2,

$$|\mathbf{A}| = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}.$$

   Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = 2 - 15 = -13.$$

4. La *inversa* de una matriz cuadrada $n \times n$, **A,** es otra matriz $n \times n$, $\mathbf{A}^{-1}$ de tal modo que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n.$$

   No todas las matrices cuadradas tienen una inversa. Una condición suficiente y necesaria para la existencia de $\mathbf{A}^{-1}$ es que $|\mathbf{A}| \neq 0$.
5. Los *menores principales de una matriz cuadrada* $n \times n$, **A** son la serie de determinantes de las primeras p filas y columnas de **A,** donde $p = 1, n$. Si **A** es 2×2, entonces el primer menor principal es a_{11} y el segundo es $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$.
6. Una matriz cuadrada $n \times n$, **A,** es *definida positiva* si todos sus menores principales son positivos. La matriz es *definida negativa* si los menores principales alternan de signo partiendo de un signo menos.[1]
7. Una matriz simétrica de especial utilidad es la *matriz hesiana*, formada por todas las derivadas parciales de segundo orden de una función. Si f es una función continua y derivable dos veces de n variables, la hesiana está determinada por

$$H(f) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

   Con ayuda de estas notaciones ahora es posible volver a examinar algunas de las condiciones de segundo orden derivadas en el capítulo 2.

A2.1 Funciones cóncavas y convexas

Una función cóncava es una función que siempre está por debajo (o sobre) de una tangente a la misma. Alternativamente, una *función convexa* siempre está por debajo de una tangente. La concavidad o convexidad de una función está determinada por su(s) segunda(s) derivada(s). Para una función de una sola variable, $f(x)$, el requisito es claro. Si se utiliza la aproximación de Taylor en un punto (x_0)

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx + f''(x_0)\frac{dx^2}{2} + \text{términos de orden superior.}$$

Si se supone que los términos de orden superior sean igual a 0, tendremos

$$f(x_0 + dx) \leq f(x_0) + f'(x_0)dx$$

si $f''(x_0) \leq 0$ y

$$f(x_0 + dx) \geq f(x_0) + f'(x_0)dx$$

[1] Si algunos de los determinantes de esta definición pueden ser iguales a cero, decimos que la matriz es semidefinida positiva o semidefinida negativa. En aras de la sencillez de nuestro análisis, aquí no utilizaremos esta terminología.

si $f''(x_0) \geq 0$. Dado que las expresiones a la derecha de estas desigualdades son, de hecho, la ecuación de la tangente a la función en x_0, es evidente que la función es (localmente) cóncava si $f''(x_0) \leq 0$ y (localmente) convexa si $f''(x_0) \geq 0$.

Ampliar esta idea intuitiva a muchas dimensiones es bastante engorroso en términos de su notación funcional, pero relativamente sencillo cuando se utiliza el álgebra matricial. La concavidad exige que la matriz hesiana sea definida negativa, mientras que la convexidad exige que esta matriz sea definida positiva. Como en el caso de una sola variable, estas condiciones equivalen a exigir que la función se aleje siempre de cualquier tangente independientemente de la dirección que se emprenda.[2]

Si $f(x_1, x_2)$ es una función de dos variables, la matriz hesiana está determinada por

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es definida negativa si

$$f_{11} < 0 \text{ y } f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12} > 0,$$

que es precisamente la condición descrita en el capítulo 2 en la ecuación 2.98. Las generalizaciones a funciones de tres o más variables siguen el mismo patrón matricial.

Ejemplo 1

Para la función de la salud del capítulo 2 (ecuación 2.20), la matriz hesiana está determinada por

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

y el primer y segundo menores principales son

$$\mathbf{H}_1 = -2 < 0$$
$$\mathbf{H}_2 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0.$$

Por tanto, la función es cóncava.

Ejemplo 2

Se utiliza la función Cobb-Douglas $x^a y^b$ donde $a, b \in (0, 1)$ para mostrar funciones de utilidad y funciones de producción en muchas partes de este libro. Las derivadas de primer y segundo orden de la función son

$$f_x = ax^{a-1}y^b$$
$$f_y = bx^a y^{b-1}$$
$$f_{xx} = a(a-1)x^{a-2}y^b$$
$$f_{yy} = b(b-1)x^a y^{b-2}.$$

Por tanto, la hesiana de esta función es

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a(a-1)x^{a-2}y^b & abx^{a-1}y^{b-1} \\ abx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)x^a y^{b-2} \end{bmatrix}.$$

El primer menor principal de esta hesiana es

$$\mathbf{H}_1 = a(a-1)x^{a-2}y^b < 0,$$

por lo que la función será cóncava siempre y cuando

$$\mathbf{H}_2 = a(a-1)(b)(b-1)\, x^{2a-2}y^{2b-2} - a^2b^2x^{2a-2}y^{2b-2}$$
$$= ab(1 - a - b)x^{2a-2}y^{2b-2} > 0.$$

Esta condición se cumple claramente si $a + b < 1$. Es decir, en términos de la función de producción, la función debe mostrar rendimientos decrecientes a escala para ser cóncava. Geométricamente, la función debe caer a medida que aumentan los dos insumos simultáneamente.

A2.2 Maximización

Como se vio en el capítulo 2, las condiciones de primer orden para un máximo sin restricciones de una función con muchas variables exigen que se ubique un punto en el cual las derivadas parciales sean igual a cero. Si la función es cóncava, estará por debajo del plano tangente en este punto y, por tanto, el punto será un auténtico máximo.[3] Puesto que la función de salud es cóncava, por ejemplo, las condiciones de primer orden para el máximo también son suficientes.

A2.3 Máximos con restricciones

Cuando las x en un problema de maximización o de minimización están sujetas a restricciones, se deben considerar al expresar las condiciones de segundo orden. De nuevo, el álgebra matricial ofrece una forma compacta (aunque no muy intuitiva) para mostrar estas condiciones. La notación implica la adición de filas y columnas a la matriz hesiana para el problema sin restringir, y después comprobar las propiedades de esta matriz aumentada.

En concreto, se quiere maximizar

$$f(x_1 \ldots x_n)$$

sujeto a la restricción[4]

$$g(x_1 \ldots x_n) = 0.$$

Vimos en el capítulo 2 que las condiciones de primer orden para un máximo adoptan la forma

[2] Encontrará una prueba usando la versión multivariable de la aproximación de Taylor en Simon y Blume (1944), cap. 21.

[3] Este punto será un máximo "local" si la función sólo es cóncava en una región o "global" si la función es cóncava en todas partes.

[4] Aquí sólo veremos el caso de una sola restricción. La generalización a muchas restricciones es conceptualmente sencilla, pero compleja en cuanto a notación. Encontrará una definición precisa en Sydsaeter A. y P. Berck (2000), p. 93.

$$f_i + \lambda g_i = 0$$

donde λ es el multiplicador lagrangiano de este problema. Las condiciones de segundo orden para un máximo parten de la hesiana aumentada ("bordeada")[5]

$$\mathbf{H}_b = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & & f_{1n} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & & f_{2n} \\ \vdots & & & & \\ g_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

Para el máximo, $(-1)\,\mathbf{H}_b$ debe ser definida negativa; es decir, los menores principales de $\mathbf{H}_b$ deben seguir el patrón – + – + –, etc., partiendo del segundo menor.[6]

Las condiciones de segundo orden para un mínimo exigen que $(-1)\,\mathbf{H}_b$ sea definida positiva; es decir, que todos los menores principales de $\mathbf{H}_b$ (excepto el primero) sean negativos.

Ejemplo

El lagrangiano del problema restringido de salud (ejemplo 2.6) es

$$\mathscr{L} = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5 + \lambda\,(1 - x_1 - x_2)$$

y la hesiana bordeada de este problema es

$$\mathbf{H}_b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

El segundo menor principal aquí es

$$\mathbf{H}_{b2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = -1$$

y el tercero es

$$\mathbf{H}_{b3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-2) - 0 - (-2) = 4,$$

por lo que los menores principales de $\mathbf{H}_b$ tienen el patrón exigido y el punto

$$x_2 = 1,\ x_1 = 0$$

es un máximo con restricciones.

Ejemplo

En el problema de la valla óptima (ejemplo 2.7), la hesiana bordeada es

$$\mathbf{H}_b = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{H}_{b2} = -4$$
$$\mathbf{H}_{b3} = 8$$

por lo que, de nuevo, los menores principales tienen el patrón exigido para un máximo.

A2.4 Cuasi concavidad

Si la restricción, g, es lineal, es posible relacionar las condiciones de segundo orden analizadas en la ampliación 2.3 exclusivamente con la forma de la función que se optimizará, f. En este caso, se escribiría la restricción como

$$g(x_1 \ldots x_n) = c - b_1x_1 - b_2x_2 - \ldots - b_nx_n = 0$$

y las condiciones de primer orden del máximo son

$$f_i = \lambda b_i \qquad i = 1 \ldots n.$$

Si se parte de estas condiciones, es evidente que la hesiana bordeada, $\mathbf{H}_b$ y la matriz

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & & f_{2n} \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix},$$

tienen los mismos menores principales excepto para la constante (positiva) de proporcionalidad.[7] Las condiciones para el máximo de f sujeto a una restricción lineal se cumplirán siempre que $\mathbf{H}'$ tenga las mismas convenciones de signo que $\mathbf{H}_b$; es decir, $(-1)\mathbf{H}'$ debe ser definida negativa. Se dice que una función, f, para la cual $\mathbf{H}'$ sigue este patrón, es *cuasi cóncava*. Como se verá, tiene la propiedad de que el conjunto de puntos x para los cuales $f(x) \geq c$ (donde c es una constante) es convexo. Para este tipo de función, las condiciones necesarias para el máximo también son suficientes.

---

[5]Nótese que si $g_{ij} = 0$ para todas las i y j, entonces podemos considerar que $\mathbf{H}_b$ es una hesiana simple asociada a la expresión lagrangiana de la ecuación 2.50 que es una función de $n + 1$ variables $\lambda, x_1 \ldots x_n$.

[6]Nótese que el primer menor principal de $\mathbf{H}_b$ es 0.

[7]Esto se puede demostrar señalando que, al multiplicar una fila (o una columna) de una matriz por una constante, el determinante queda multiplicado por la misma constante.

Ejemplo

Para el problema de las vallas $f(x, y) = xy$ y $\mathbf{H}'$ está determinada por

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo que

$$\mathbf{H}'_2 = -y^2 < 0$$
$$\mathbf{H}'_3 = 2xy > 0$$

y la función es cuasi cóncava.[8]

[8]Dado que $f(x, y) = xy$ es una forma de función Cobb-Douglas que no es cóncava, esto demuestra que no todas las funciones cuasi cóncavas son cóncavas. Sin embargo, nótese que una función monótona de f (como $f^{1/3}$) sería cóncava.

Ejemplo

En términos más generales, si f es una función de sólo dos variables, la cuasi concavidad exige que

$$\mathbf{H}'_2 = -(f_1)^2 < 0$$
$$\mathbf{H}'_3 = -f_{11} f_2^2 - f_{22} f_1^2 + 2 f_1 f_2 f_{12} > 0,$$

que es precisamente la condición definida en la ecuación 2.114. Por tanto, se tiene una forma relativamente sencilla para determinar la cuasi concavidad.

Referencias

Simon, C. P. y L. Blume. *Mathematics for Economists,* W.W. Norton, Nueva York, 1994.

Sydsaeter, R., A. Strom y P. Berck. *Economists' Mathematical Manual,* 3a. ed., Springer-Verlag, Berlín, 2000.

Parte 2

ELECCIÓN Y DEMANDA

En la parte 2 se analizará la teoría económica de la elección. *Un objetivo de este análisis consiste en desarrollar el concepto de demanda de mercado de manera formal, de modo que podamos utilizar este concepto en secciones posteriores del texto donde estudiaremos los mercados. Un objetivo más general de esta parte del libro consiste en ilustrar la teoría que utilizan los economistas para explicar cómo realizan sus elecciones los individuos en una amplia variedad de contextos.*

La parte 2 comienza con una descripción de la forma en que los economistas hacen modelos de las preferencias individuales y, generalmente se refieren a ellas empleando el término formal de utilidad. *El capítulo 3 muestra cómo los economistas manejan el concepto de utilidad en forma matemática. Esto les permite crear "curvas de indiferencia", las cuales muestran los diversos intercambios que los individuos están dispuestos a realizar de forma voluntaria.*

En el capítulo 4 usamos el concepto de utilidad para ilustrar la teoría de la elección. La hipótesis fundamental del capítulo es que los individuos que cuentan con ingresos limitados, realizarán sus elecciones económicas de tal modo que les permita alcanzar la máxima utilidad posible. El capítulo 4 utiliza análisis, tanto matemáticos como intuitivos, para reflejar la información que esta hipótesis brinda en tanto del comportamiento económico.

Los capítulos 5 y 6 utilizan el modelo de la maximización de la utilidad para analizar las reacciones que tendrán los individuos ante los cambios de circunstancias. El capítulo 5 aborda primordialmente las respuestas ante variaciones del precio de un bien, con un análisis que lleva directamente al concepto de curva de demanda. El capítulo 6 abunda en este tipo de análisis y lo aplica a efecto de que nos permita comprender las relaciones de la demanda de distintos bienes.

Capítulo 3

PREFERENCIAS Y UTILIDAD

Este capítulo trata de la forma en que los economistas describen las preferencias de los individuos. Partimos de una explicación bastante abstracta de la "relación entre preferencias", pero enseguida pasamos al instrumento principal que utilizan los economistas para estudiar las elecciones individuales: la función de utilidad. Analizamos algunas características generales de esta función, así como algunos ejemplos específicos de funciones de utilidad sencillas que encontraremos a lo largo de este libro.

Axiomas de la elección racional

Una forma de iniciar el análisis de las elecciones de los individuos es plantear un conjunto básico de postulados, o axiomas, que describen el comportamiento "racional". Si bien distintos conjuntos de tales axiomas han sido propuestos, todos ellos se asemejan en que parten del concepto de "preferencia"; es decir, cuando un individuo afirma que "A es preferible a B", se entiende que, tomando en cuenta todos los elementos, él considera que estará mejor en la situación A que en la B. Se supone que la relación de esta preferencia tiene tres propiedades básicas:

I. *Completas:* Si A y B son dos situaciones *cualesquier*, el individuo siempre podrá especificar con exactitud una de las tres posibilidades siguientes:
   1. "A es preferible a B",
   2. "B es preferible a A", o
   3. "A y B son igual de atractivas".

   Por tanto, se supone que la indecisión no paraliza a los individuos; es decir, éstos comprenden totalmente las dos alternativas y siempre son capaces de decidir cuál de las dos es la deseable. El supuesto también excluye la posibilidad de que un individuo pueda afirmar que A es preferible a B y también que B es preferible a A.

II. *Transitivas:* Si un individuo afirma que "A es preferible a B" y que "B es preferible a C", entonces también afirmará que "A es preferible a C".

   Este supuesto plantea que las elecciones internas de un individuo son consistentes. Podemos someter este supuesto a un estudio empírico. Por lo general, estos estudios concluyen que las elecciones de una persona son, de hecho, transitivas, pero que es preciso modificar estas conclusiones cuando el individuo no comprende totalmente las consecuencias de sus elecciones. Dado que asumiremos que, en la mayor parte de los casos, los individuos eligen con información completa (aun cuando en la parte 7 y en otras secciones analizaremos la incertidumbre), la propiedad de la transitividad sería un supuesto acertado cuando hablamos de preferencias.

III. *Continuas:* Si un individuo afirma que "A es preferible a B", entonces las situaciones que se "acercan" convenientemente a A también serán preferibles a B.

Necesitaremos este supuesto relativamente técnico para poder analizar las respuestas de los individuos ante los cambios relativamente pequeños de los ingresos y los precios. El objeto de este supuesto es descartar ciertos tipos de preferencias discontinuas que están en el límite y serían un problema para formular, en términos matemáticos, una teoría de la elección. Al parecer, el hecho de asumir la continuidad no pasaría por alto algunos tipos de comportamiento económico que son importantes en el mundo real.

Utilidad

Dado que las preferencias son completas, transitivas y continuas, ahora podremos demostrar, formalmente, que la gente es capaz de ordenar todas las situaciones posibles, clasificándolas de la menos a la más deseable.[1] Los economistas, siguiendo la terminología que introdujo Jeremy Bentham, el teórico político del siglo XIX, se refieren a esta clasificación llamándola ***utilidad***.[2] También seguiremos a Bentham cuando afirmamos que las situaciones más deseables aportan más utilidad que las menos deseables. Es decir, si una persona prefiere la situación A a la B, entonces diríamos que la utilidad que asigna a la opción A, que escribiremos como $U(A)$, es mayor que la utilidad que asigna a B, $U(B)$.

Ausencia de unicidad en las mediciones de la utilidad

Incluso podríamos asignar números a estas clasificaciones de la utilidad, pero éstos no serán únicos. Cuando asignamos arbitrariamente una serie de números para reflejar con exactitud el orden original de preferencias, ello implicará el mismo conjunto de elecciones. No habrá diferencia alguna si decimos que $U(A) = 5$ y $U(B) = 4$ o si decimos $U(A) = 1\ 000\ 000$ y $U(B) = 0.5$. En ambos casos, los números implican que A es preferible a B. En términos técnicos, nuestro concepto de utilidad sólo se definiría como una transformación ("monótona")[3] que conserva un orden. Un conjunto cualquiera de números que refleje con precisión el orden de preferencias de una persona será suficiente. Por tanto, no tiene sentido preguntar: "¿Qué tanto más preferible es A que B?" porque esta pregunta no tiene una respuesta única. Las encuestas que piden a la gente que clasifique su "felicidad" en una escala del 1 al 10 también podrían utilizar una escala del 7 al 1 000 000. Casi lo único que podríamos esperar es saber que la persona que un día dice estar en el "6" de la escala y al siguiente dice estar en el "7", de hecho, está más contenta el segundo día. Por tanto, las clasificaciones de la utilidad son como las clasificaciones ordinales de los restaurantes o de las películas que utilizan una, dos, tres o cuatro estrellas. Éstas simplemente reflejan que unos bienes son más deseables en relación con otros del mismo conjunto.

Esta falta de unicidad cuando se asignan números a la utilidad también explica por qué no podemos comparar las utilidades de dos personas. Si una persona afirma que comer un filete le aporta una utilidad de "5" y otra afirma que el mismo filete le aporta una utilidad de "100", no podemos saber cuál de los dos individuos concede más valor al filete porque ellos podrían estar empleando escalas muy distintas. De manera análoga, no tenemos manera de medir si el paso de la situación A a la situación B ofrece más utilidad a una persona que a otra. No obstante, como veremos, los economistas dicen mucho respecto a la clasificación de la utilidad cuando analizan lo que la gente escoge voluntariamente.

---

[1]Estas propiedades y su relación con la representación de las preferencias mediante una función de utilidad, están analizadas con gran detalle en Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston y Jerry R. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Nueva York, 1995.

[2]J. Bentham. *Introduction to the Principles of Morals and Legislation*, Hafner, Londres, 1848.

[3]Podemos expresar esta idea matemáticamente diciendo que una clasificación numérica cualquiera de la utilidad (U) se puede transformar en otro conjunto de números mediante la función F siempre y cuando $F(U)$ mantiene un orden. Esta condición se garantiza si $F'(U) > 0$. Por ejemplo, la transformación $F(U) = U^2$ mantiene un orden, al igual que la transformación $F(U) = \ln U$. En algunos puntos de este libro y de los problemas tal vez encontremos que es conveniente realizar estas transformaciones para facilitar el análisis de determinado orden de utilidades.

El supuesto ceteris paribus

Dado que la *utilidad* se refiere a la satisfacción general, es evidente que diversos factores afectarán este indicador. La utilidad de una persona no sólo depende de los bienes materiales que consume, sino también de sus actitudes psicológicas, de las presiones de su grupo social, de sus experiencias personales y del entorno cultural en general. Los economistas tienen un interés general por analizar estas influencias, pero normalmente tienen que estrechar su enfoque. Por tanto, una práctica común consiste en dirigir nuestra atención exclusivamente a las elecciones entre opciones cuantificables (por ejemplo, las cantidades relativas de alimentos y cobijo que han sido adquiridas, el número de horas trabajadas por semana o la elección entre tasas fiscales concretas), pero manteniendo constantes todos los demás factores que afectan el comportamiento. Todos los análisis económicos de las elecciones para maximizar la utilidad recurren al supuesto ceteris paribus (manteniendo todos los demás factores como constantes), a efecto de facilitar el análisis de las elecciones en un contexto simplificado.

Utilidad derivada del consumo de bienes

Como un ejemplo importante del supuesto ceteris paribus, veamos el problema de un individuo que debe elegir, en un momento determinado, si consume n bienes de entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supondremos que podemos representar la forma en que el individuo clasifica estos bienes empleando una función de utilidad con la fórmula

$$\textbf{utilidad} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n; \textbf{otras cosas}), \tag{3.1}$$

donde las x se refieren a las cantidades de los bienes que podría elegir y la notación "otras cosas" nos recuerda que, para el análisis, mantenemos constantes muchos aspectos del bienestar del individuo.

Con frecuencia es más fácil escribir la ecuación 3.1 como

$$\textbf{utilidad} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3.2}$$

o, si sólo estamos considerando dos bienes,

$$\textbf{utilidad} = U(x, y), \tag{3.2'}$$

donde es evidente que todo lo demás permanece constante (es decir, fuera del marco de análisis) excepto los bienes expresados explícitamente en la función de utilidad. Resultaría muy tedioso recordar en cada paso qué es lo que estamos manteniendo constante en el análisis, pero es preciso recordar que siempre estará operando alguna forma de supuesto ceteris paribus.

Argumentos de las funciones de utilidad

Utilizamos la notación de la función de utilidad para indicar cómo un individuo clasifica los argumentos de la función en cuestión. En el caso más frecuente, utilizaríamos la función de utilidad (ecuación 3.2) para representar cómo un individuo clasifica ciertos conjuntos de bienes que podría adquirir en un momento determinado. En algunos casos utilizaremos otros argumentos para la función de utilidad, por lo cual es conveniente dejar en claro algunas convenciones de la notación desde el principio. Por ejemplo, tal vez sea útil hablar de la utilidad que un individuo recibe de su riqueza real (W). Por tanto, utilizaremos la notación

$$\textbf{utilidad} = U(W). \tag{3.3}$$

A menos de que el individuo sea una persona muy avariciosa, la riqueza, por sí misma, no aporta ninguna utilidad directa. Por el contrario, la riqueza sólo produce utilidad cuando se gasta en el consumo de bienes. Por tal razón, supondremos que la ecuación 3.3 quiere decir que la utilidad derivada de la riqueza proviene, de hecho, de gastarla de tal manera que produzca la máxima utilidad posible.

En capítulos posteriores utilizaremos otros dos argumentos en las funciones de utilidad. En el capítulo 16 nos ocuparemos de la elección del individuo que escoge entre trabajo y ocio y, por tanto, tendremos que considerar la presencia del ocio en la función de utilidad. Utilizaremos una función con la siguiente forma

$$\textbf{utilidad} = U(c, h) \tag{3.4}$$

En este caso, c representa el consumo y h representa las horas en las que no trabaja (es decir, el ocio) durante determinado periodo de tiempo.

En el capítulo 17 nos interesarán las decisiones de consumo del individuo en distintos periodos de tiempo. En ese capítulo utilizaremos una función de utilidad con la fórmula

$$\textbf{utilidad} = U(c_1, c_2), \tag{3.5}$$

donde c_1 es el consumo en el periodo presente y c_2 es el consumo en el periodo siguiente. Por tanto, al cambiar los argumentos de la función de utilidad, podremos centrarnos en aspectos concretos de las elecciones de un individuo en contextos simplificados.

Así, en resumen, iniciaremos nuestro análisis del comportamiento del individuo con la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Utilidad. Se supone que las preferencias de los individuos están representadas por una función de utilidad de la forma

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{3.6}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las cantidades de cada uno de los n bienes que podrían consumirse en un periodo. Esta función es única hasta que la transformación de la misma altere el orden.

Bienes económicos

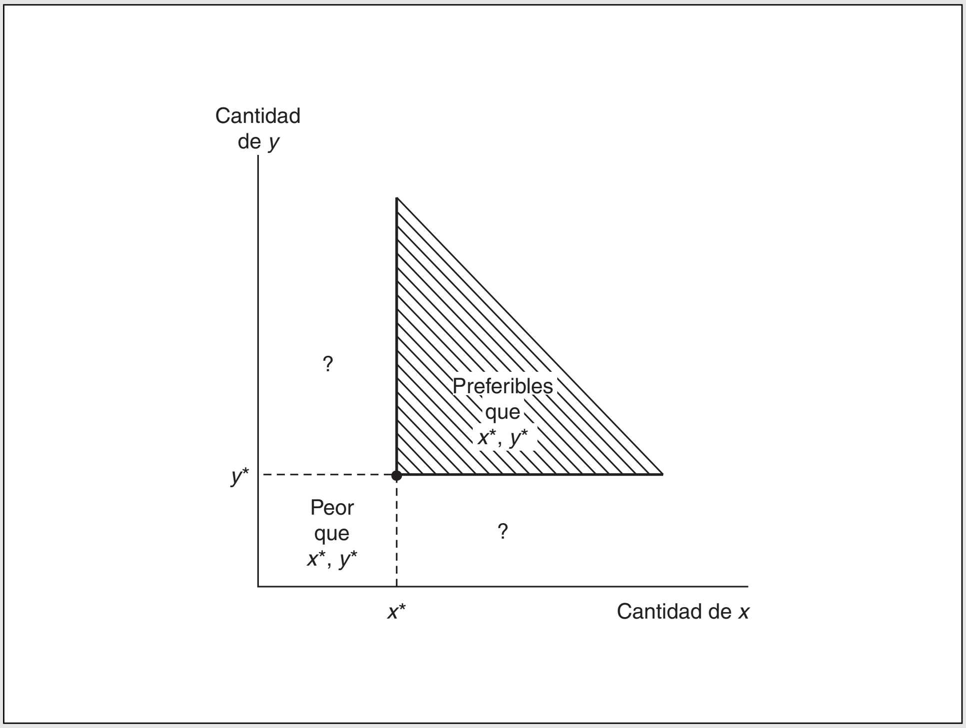
En esta representación consideramos que las variables son "bienes"; es decir, independientemente de las cantidades económicas que representen, suponemos que, dentro de un periodo, los individuos prefieren más de un x_i particular que menos. Suponemos que esto ocurre con todos los bienes, ya sea un bien de consumo simple, como una hamburguesa, o un agregado complejo, como la riqueza o el ocio. La figura 3.1 representa esta convención en el caso de una función de utilidad de dos bienes. En la misma, todos los conjuntos de consumo dentro del área sombreada son preferibles al paquete x^*, y^* porque un paquete cualquiera en el área sombreada ofrece, cuando menos, más de uno de los bienes. Por lo tanto, de acuerdo con nuestra definición de "bienes", las canastas de bienes del área sombreada tienen una clasificación más alta que x^*, y^*. Asimismo, las canastas en el área señalada como "peor" son claramente inferiores a x^*, y^* porque, cuando menos, incluyen menos de uno de los bienes y no incluyen más del otro. Las canastas de bienes en las dos áreas señaladas con signos de interrogación resultan difíciles de comparar con el par x^*, y^* porque incluyen más de uno de los bienes pero menos del otro. Los movimientos para entrar en estas áreas implican intercambios entre los dos bienes.

Intercambios y sustitución

La mayor parte de la actividad económica implica que los individuos realizan transacciones voluntarias. Por ejemplo, cuando una persona compra una barra de pan, al hacerlo estará renunciando voluntariamente a algo (dinero), a cambio de otra cosa (pan) que tiene más valor. A efecto de analizar este tipo de transacción voluntaria, tendremos que crear un marco formal para poder ilustrar los intercambios en el contexto de la función de utilidad.

FIGURA 3.1 **Los individuos prefieren más que menos de un bien**

El área sombreada representa las combinaciones de x y y que son contundentemente preferibles a la combinación x^*, y^*. Ceteris paribus, los individuos prefieren más que menos de un bien cualquiera. Las combinaciones señaladas con "?" implican cambios ambiguos del bienestar, porque incluyen más de un bien pero menos del otro.



Curvas de indiferencia y tasa marginal de sustitución

La idea de una *curva de indiferencia* es de utilidad para explicar estos intercambios voluntarios. En la figura 3.2, la curva U_1 representa todas las combinaciones alternativas de x y y con las cuales un individuo obtiene el mismo bienestar (recuerde de nuevo que todos los demás argumentos de la función de utilidad se mantienen constantes). Esta persona está igual de feliz si consume, por ejemplo, la combinación de bienes x_1, y_1 o la combinación x_2, y_2. La curva que representa todas las canastas de consumo que el individuo clasifica como iguales se llama *curva de indiferencia*:

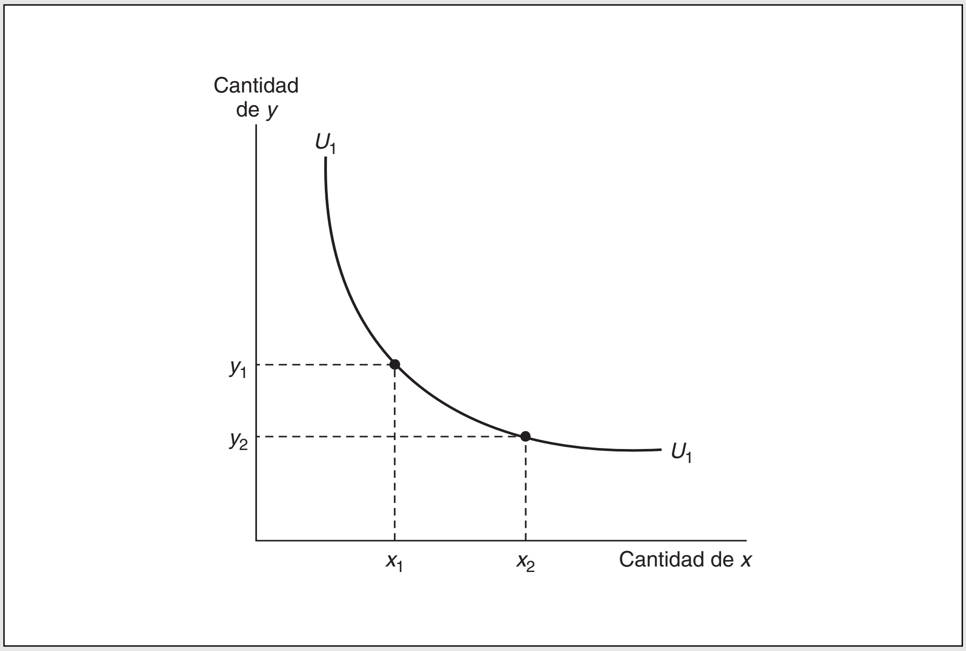
DEFINICIÓN

Curva de indiferencia. Una *curva de indiferencia* (o superficie de indiferencia, si se habla de n dimensiones) muestra un conjunto de paquetes de consumo que no hacen diferencia para el individuo. Es decir, todos estos paquetes le ofrecen el mismo nivel de utilidad.

La pendiente de la curva de indiferencia de la figura 3.2 es negativa y demuestra que si el individuo se ve obligado a renunciar a cierta cantidad de y, entonces tendrá que ser compensado con una cantidad adicional de x para permanecer indiferente entre los dos paquetes de bienes. La curva también está trazada de modo que su pendiente aumenta a medida que x aumenta (es decir, la pendiente empieza siendo infinitamente negativa y aumenta hacia 0). Se trata de una representación gráfica del supuesto de que los individuos estarán cada vez menos dispuestos a

FIGURA 3.2 **Una sola curva de indiferencia**

La curva U_1 representa las combinaciones x y y que permiten al individuo obtener la misma utilidad. La pendiente de esta curva representa la tasa a la cual el individuo está dispuesto a intercambiar x por y sin que ello afecte su nivel de bienestar. Esta pendiente (o, más bien, que la pendiente sea negativa) se conoce como *tasa marginal de sustitución*. La curva de indiferencia de la figura ha sido trazada con base en el supuesto de que la tasa marginal de sustitución es decreciente.



renunciar a cantidades de y para obtener más de x. En términos matemáticos, la pendiente disminuye a medida que x aumenta. Por tanto, llegamos a la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Tasa marginal de sustitución. La pendiente negativa de una curva de indiferencia en un punto dado (U_1) se denomina *tasa marginal de sustitución* (*TMS*) en ese punto. Es decir,

$$TMS = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{U = U_1} \tag{3.7}$$

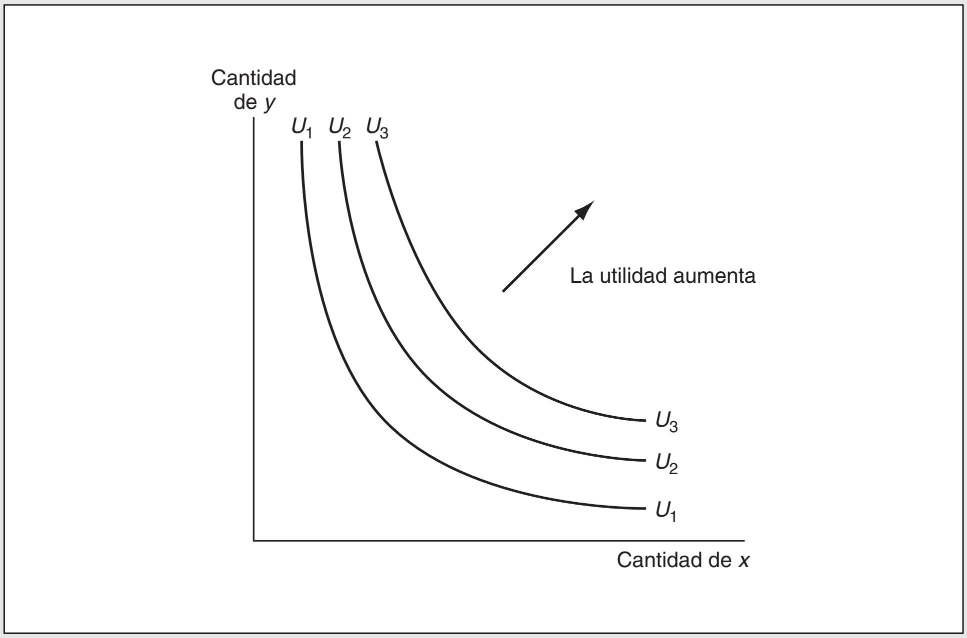
donde la notación indica que la pendiente se debe calcular a lo largo de la curva de indiferencia U_1.

Por tanto, la pendiente de U_1 y la *TMS* indican algo sobre los intercambios que esta persona estará dispuesta a realizar de forma voluntaria. En un punto como x_1, y_1, la persona tiene mucho y y está dispuesta a intercambiar una cantidad importante del mismo para conseguir una unidad más de x. Por tanto, la curva de indiferencia en x_1, y_1 es muy pronunciada. Ésta sería una situación en la cual la persona tiene, por ejemplo, muchas hamburguesas (y) y pocas bebidas (x) para acompañarlas. Esta persona gustosamente cedería unas cuantas hamburguesas (por ejemplo, 5) para saciar su sed con una bebida más.

De otra parte, en x_2, y_2, la curva de indiferencia es más plana. En este caso, la persona tiene unas cuantas bebidas y está dispuesta a renunciar a relativamente menos hamburguesas (por ejemplo, 1), para conseguir una bebida más. Por tanto, la *TMS* disminuye entre x_1, y_1 y x_2, y_2.

FIGURA 3.3 **Existen infinitas curvas de indiferencia en el plano *x*-*y***

Hay una curva de indiferencia que pasa por cada punto del plano *x*-*y*. Cada una de estas curvas muestra combinaciones de *x* y *y* que proporcionan al individuo determinado nivel de satisfacción. Los movimientos en dirección nordeste representan movimientos hacia niveles más altos de satisfacción.



El cambio de la pendiente a lo largo de U_1 muestra que la canasta de consumo disponible afecta los intercambios que esta persona realizará libremente.

Mapa de curvas de indiferencia

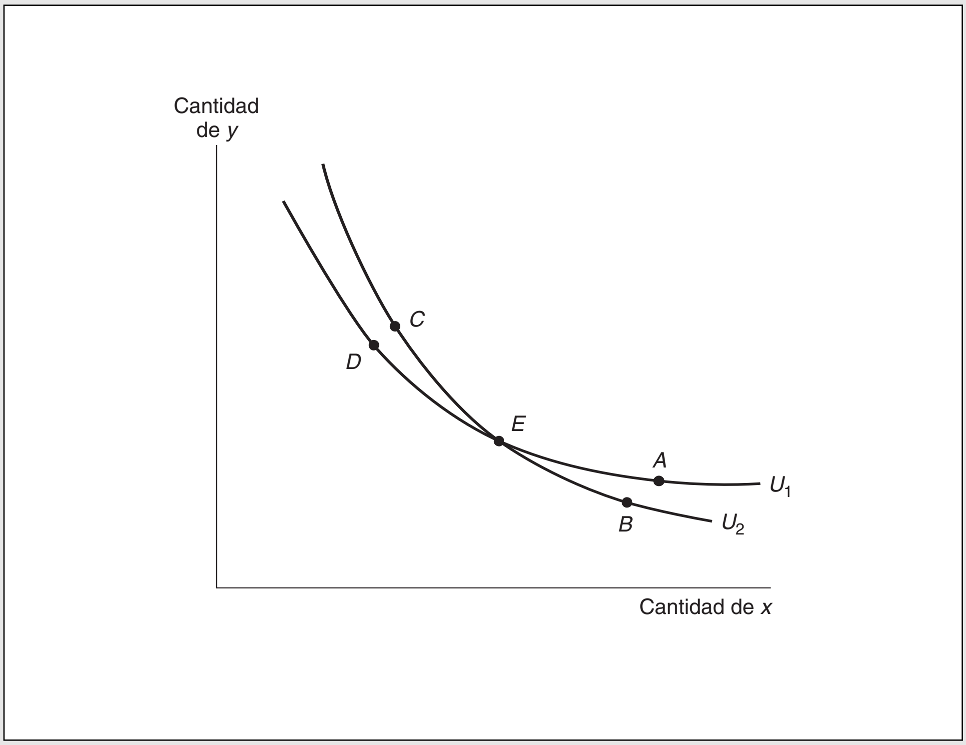
En la figura 3.2 sólo trazamos una curva de indiferencia. Sin embargo, el cuadrante *x, y* está densamente poblado con estas curvas y cada una de ellas corresponde a un nivel de utilidad distinto. Dado que todo paquete de bienes puede ser clasificado y produce un nivel de utilidad, cada punto de la figura 3.2 debe tener una curva de indiferencia que pasa por él. Las curvas de indiferencia son como las curvas de altitud de un mapa, en tanto que representan líneas que ofrecen la misma "altitud" de utilidad. La figura 3.3 muestra varias curvas de indiferencia para indicar que hay infinitas curvas en un plano. El nivel de utilidad que representan estas curvas aumenta a medida que nos desplazamos en dirección nordeste; es decir, la utilidad de la curva U_1 es menor que la utilidad de U_2, la cual es inferior a la de U_3. Esto se debe al supuesto planteado en la figura 3.1: los individuos prefieren más que menos de un bien. Como vimos antes, no hay una forma única de asignar números a estos niveles de utilidad. Todo lo que nos muestran las curvas es que las combinaciones de bienes que están en U_3 son preferibles a las que están en U_2, las cuales, a su vez, son preferibles a las que están en U_1.

Curvas de indiferencia y transitividad

Como ejercicio para analizar la relación entre preferencias consistentes y la representación de las preferencias mediante funciones de utilidad, veamos la siguiente pregunta: ¿es posible que dos curvas de indiferencia cualesquier de un individuo se crucen? La figura 3.4 ilustra esta interesante intersección de dos curvas. Queremos saber si violan nuestros axiomas básicos de la racionalidad. Si usamos la analogía del mapa, al parecer hay algo extraño en el punto *E*. En ese punto, la "altitud" es igual a dos números distintos, U_1 y U_2. Pero ningún punto puede estar al mismo tiempo a 100 y a 200 metros sobre el nivel del mar.

FIGURA 3.4 **La intersección de dos curvas de indiferencia implica que las preferencias no son consistentes**

Las combinaciones *A* y *D* están sobre la misma curva de indiferencia y, por tanto, son igual de deseables. Sin embargo, podemos recurrir al axioma de la transitividad para demostrar que *A* es preferible a *D*. Por tanto, la intersección de dos curvas de indiferencia no es consistente con las preferencias racionales.



Para proceder formalmente, analicemos las canastas de bienes representados por los puntos *A, B, C* y *D*. Dado el supuesto de insaciabilidad, "*A* es preferible a *B*" y "*C* es preferible a *D*". Pero el individuo obtiene la misma satisfacción con *B* que con *C* (porque están sobre la misma curva de indiferencia), por lo cual el axioma de la transitividad implica que *A* debe ser preferible a *D*. Sin embargo, esto no puede ser cierto, porque *A* y *D* están sobre la misma curva de indiferencia y, por definición, son considerados bienes igual de deseables. Por tanto, el axioma de la transitividad demuestra que las curvas de indiferencia no se pueden cruzar. Por tanto, siempre dibujaremos los mapas de curvas de indiferencia como aparecen en la figura 3.3.

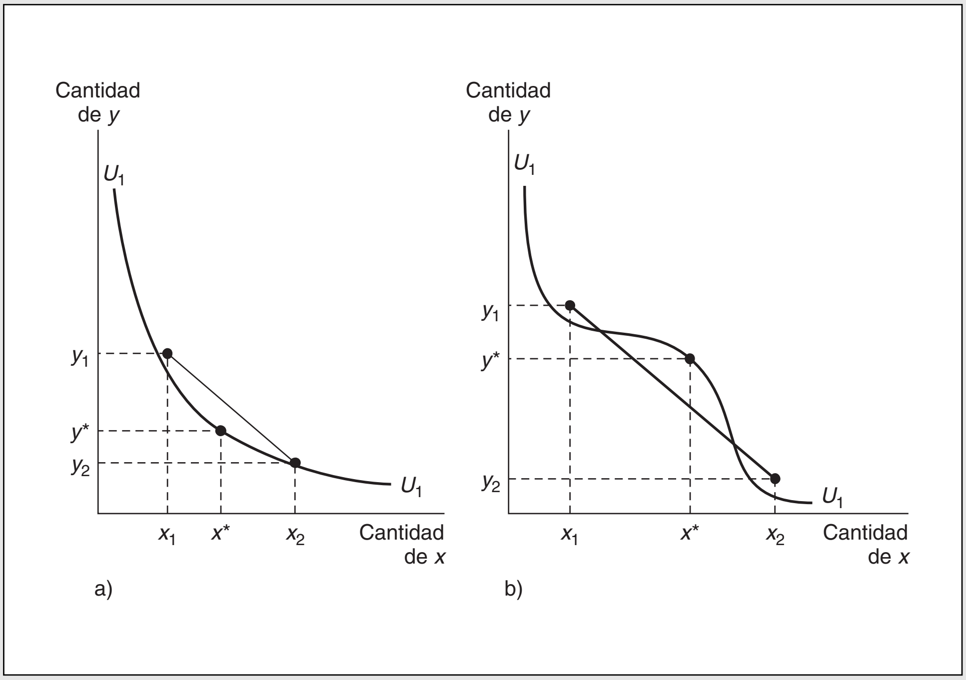
Convexidad de las curvas de indiferencia

Otra forma de enunciar el principio de la tasa marginal de sustitución decreciente utiliza el concepto matemático de conjunto convexo. Se dice que un conjunto de puntos es *convexo* si podemos unir dos puntos cualesquier del conjunto con una línea recta contenida totalmente en el conjunto. El supuesto de una *TMS* decreciente es equivalente al supuesto de que todas las combinaciones de x y y, que son preferidas a x^*, y^*, o indiferentes a una determinada combinación de éstos, constituyen un conjunto convexo.[4] La figura 3.5a muestra esta posibilidad y, en ella,

[4]Esta definición es lo mismo que suponer que la función de utilidad es cuasi cóncava. Estas funciones fueron analizadas en el capítulo 2 y volveremos a analizarlas en la próxima sección. Algunas veces se utiliza el término *cuasi concavidad estricta* para excluir la posibilidad de que las curvas de indiferencia tengan segmentos lineales. Por lo general, supondremos que existe una cuasi concavidad estricta, pero en algunas partes ilustraremos las complicaciones que plantean los segmentos lineales de las curvas de indiferencia.

FIGURA 3.5 **El concepto de convexidad como definición alternativa de una *TMS* decreciente**

En a) la curva de indiferencia es *convexa* (toda recta que une dos puntos por encima de U_1 también estará sobre U_1). En b) no es así y la curva ilustrada no tiene una *TMS*.



todas las combinaciones preferidas a x^*, y^* o indiferentes a ellos, están en el área sombreada. Dos combinaciones cualesquier de estas combinaciones, por ejemplo, x_1, y_1 y x_2, y_2 pueden ser unidas por una línea recta que también está contenida en el área sombreada. Esto no ocurre en la figura 3.5b. Una recta que una a x_1, y_1 y x_2, y_2 quedaría fuera del área sombreada. Por tanto, la curva de indiferencia que pasa por x^*, y^* en la figura 3.5b no cumple el supuesto de la *TMS* decreciente porque el conjunto de puntos preferidos a x^*, y^* o de indiferencia, no es convexo.

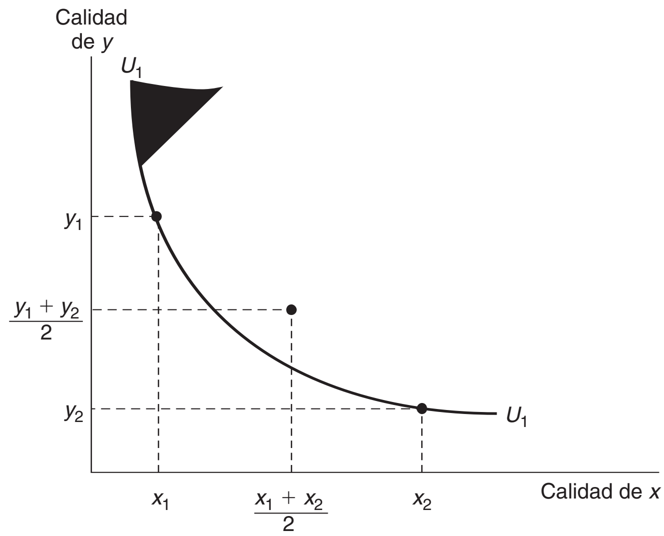
Convexidad y equilibrio en el consumo

Si utilizamos el concepto de convexidad, podemos demostrar que los individuos prefieren cierto equilibrio en su consumo. Supongamos que a un individuo le es indiferente escoger la combinación x_1, y_1 y x_2, y_2. Si la curva de indiferencia es estrictamente convexa, entonces preferirá la combinación $(x_1 + x_2)/2$, $(y_1 + y_2)/2$ a alguna de las combinaciones iniciales.[5] Por intuición, podemos decir que las canastas de bienes "bien equilibrados" son preferibles a las canastas que tienen una cantidad mucho mayor de uno de los bienes. La figura 3.6 ilustra lo anterior. Dado que suponemos que la curva de indiferencia es convexa, todos los puntos de la línea recta que unen (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son preferibles a estos puntos iniciales. Por tanto, lo anterior se aplicará al punto $(x_1 + x_2)/2$, $(y_1 + y_2)/2$, el cual está en el punto medio de esta recta. En efecto, cualquier combinación proporcionada de dos canastas de bienes indiferentes será preferible a los pares iniciales, porque representará una combinación más equilibrada. Así pues, la convexidad estricta equivale al supuesto de una *TMS* decreciente. Ambos supuestos excluyen la posibilidad de que la curva de indiferencia sea recta en un segmento cualquiera de la línea.

[5]Cuando la curva de indiferencia tiene un segmento lineal, entonces las tres combinaciones le serán indiferentes al individuo.

FIGURA 3.6 **Las canastas equilibradas de bienes son preferibles a las canastas extremas**

Si las curvas de indiferencia son convexas (si cumplen el supuesto de una *TMS* decreciente), entonces la línea que une dos puntos indiferentes cualesquier incluirá puntos preferibles a alguna de las dos combinaciones iniciales. Por intuición, podemos decir que las canastas equilibradas son preferibles a las extremas.



Utilidad y la *TMS*

Supongamos que una persona clasifica las hamburguesas *(y)* y las bebidas *(x)* de acuerdo con la función de utilidad

$$\textbf{utilidad} = \sqrt{x \cdot y}. \qquad \textbf{(3.8)}$$

En el caso de esta función, obtenemos la curva de indiferencia identificando un conjunto de combinaciones de x y y en el cual la utilidad tiene el mismo valor. Suponga que arbitrariamente decimos que la utilidad tiene un valor de 10. Entonces, la ecuación de esta curva de indiferencia será

$$\textbf{utilidad} = 10 = \sqrt{x \cdot y}. \qquad \textbf{(3.9)}$$

Si elevamos esta función al cuadrado se mantiene el mismo orden, por lo cual también podemos representar esta curva de indiferencia como

$$100 = x \cdot y, \qquad \textbf{(3.10)}$$

que es más fácil trazar. La figura 3.7 muestra esta curva de indiferencia, la cual es una conocida hipérbola rectangular. Una forma de calcular la *TMS* consiste en resolver la ecuación 3.10 despejando y,

$$y = 100/x, \qquad \textbf{(3.11)}$$

y, a continuación, utilizando la definición (ecuación 3.7):

$$TMS = -dy/dx \text{ (a lo largo de } U_1) = 100/x^2. \qquad \textbf{(3.12)}$$

Queda claro que a medida que la *TMS* baja x sube. En un punto como el A sobre la curva de indiferencia, con muchas hamburguesas (por ejemplo, $x = 5$, $y = 20$), la pendiente es muy pronunciada, por lo cual la *TMS* es alta:

$$\textit{TMS} \text{ en } (5, 20) = 100/x^2 = 100/25 = 4. \qquad (3.13)$$

En este caso, la persona está dispuesta a renunciar a 4 hamburguesas para conseguir una bebida más. De otra parte, en B donde hay relativamente pocas hamburguesas (en este caso $x = 20$, $y = 5$), la pendiente es plana y la *TMS* es baja:

$$\textit{TMS} \text{ en } (20, 5) = 100/x^2 = 100/400 = 0.25. \qquad (3.14)$$

Ahora, la persona sólo estará dispuesta a renunciar a la cuarta parte de una hamburguesa para conseguir una bebida más. Nótese que este ejemplo numérico también ilustra la convexidad de la curva de indiferencia U_1. El punto C está en medio de los puntos A y B, o sea que en C esta persona tiene 12.5 hamburguesas y 12.5 bebidas. En este caso, su utilidad está dada por

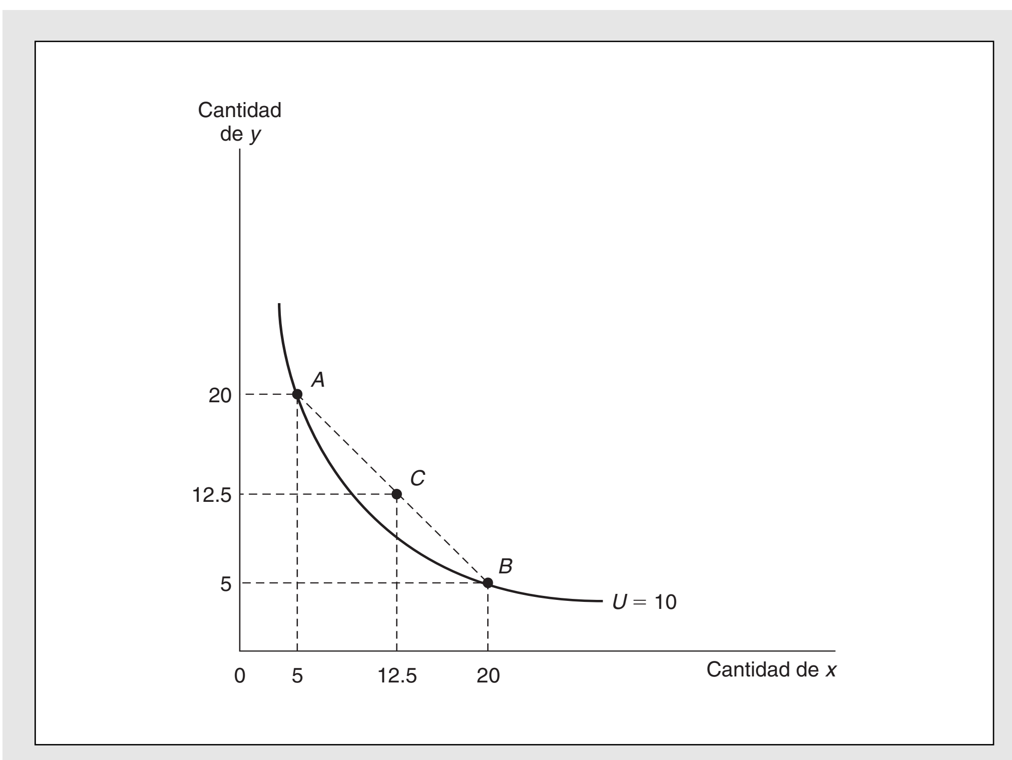
$$\text{utilidad} = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{(12.5)^2} = 12.5, \qquad (3.15)$$

que claramente está por arriba de la utilidad a lo largo de U_1 (la cual supusimos que era de 10).

Pregunta: Partiendo de la derivada anterior, parecería que la *TMS* depende exclusivamente de la cantidad de x que consuma el individuo. ¿Por qué no es verdaderamente así? ¿La cantidad de y cómo entra, implícitamente, en las ecuaciones 3.13 y 3.14?

FIGURA 3.7 **Curva de indiferencia para la utilidad = $\sqrt{x \cdot y}$**

Esta curva de indiferencia ilustra la función $10 = U = \sqrt{x \cdot y}$. En el punto A (5, 20), la *TMS* es 4, lo cual implica que esta persona está dispuesta a intercambiar $4y$ por una unidad más de x. Sin embargo, en el punto B (20, 5), la *TMS* es 0.25, lo cual implica que su disposición a realizar un intercambio ahora es mucho menor.



Una derivación matemática

Una derivación matemática del concepto de la *TMS* proporcionará más información sobre la forma de las curvas de indiferencia y la naturaleza de las preferencias. En esta sección presentamos la derivación para el caso de una función de utilidad que sólo involucra dos bienes. Esto permitirá comparar las matemáticas con un mapa bidimensional de curvas de indiferencia. Al final del capítulo analizaremos un caso que incluye numerosos bienes, pero veremos que ese análisis, mucho más complicado, en realidad ofrece muy poco más.

La *TMS* y la utilidad marginal

Si la utilidad que una persona obtiene de dos bienes está representada por $U(x, y)$, entonces podemos expresar el diferencial total de esta función como

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy. \tag{3.16}$$

A lo largo de una curva de indiferencia dada $dU = 0$, por tanto una sencilla manipulación de la ecuación 3.16 nos dará

$$TMS = -\frac{dy}{dx}\bigg|_{U=constante} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}}{\dfrac{\partial U}{\partial y}}. \tag{3.17}$$

Con palabras, diríamos que la *TMS* de x por y es igual a la proporción de la utilidad marginal de x (es decir, $\partial U/\partial x$) a la utilidad marginal de y ($\partial U/\partial y$). La intuición nos dice que el resultado tiene sentido. Por el momento, supongamos que, de hecho, podemos medir la utilidad de la persona, por decir, en unidades llamadas "útiles". Supongamos también que esta persona tan sólo consume dos bienes: comida (x) y ropa (y) y que cada unidad extra de comida proporciona 6 útiles, mientras que cada unidad extra de ropa proporciona 2 útiles. Entonces, la ecuación 3.17 significaría que la *TMS* está dada por $TMS = \frac{dy}{dx}\Big|_{U=constante} = \frac{6\ \acute{u}tiles}{2\ \acute{u}tiles} = 3,$ de modo que esta persona está dispuesta a deshacerse de 3 unidades de ropa a cambio de obtener una unidad más de comida. Este intercambio no daría por resultado un cambio neto en la utilidad, porque las ganancias compensarían exactamente las pérdidas. Nótese que las unidades que utilizamos para medir la utilidad (es decir, a falta de un término mejor, lo que hemos llamado "útiles"), se eliminan entre sí cuando hacemos este cálculo. Si bien las unidades que utilizamos para medir la utilidad evidentemente afectan la utilidad marginal, la *TMS* es independiente de la medida que hemos elegido.[6]

La convexidad de las curvas de indiferencia

En el capítulo 1 describimos cómo Marshall empleó el supuesto de la utilidad marginal decreciente para resolver la paradoja del agua y los diamantes. En su teoría afirmaba que el valor marginal que un individuo adjudica a un bien es lo que determina su valor; es decir, la cantidad que un individuo está dispuesto a pagar por un vaso de agua más es la que determina el precio del agua. Dado que cabe suponer que este valor marginal disminuye a medida que aumenta la cantidad de agua que consume el individuo, Marshall demostró por qué el agua tiene un valor comercial muy bajo. La intuición nos dice que, al parecer, el supuesto de la utilidad marginal decreciente de un bien está relacionado con el supuesto de una *TMS* decreciente; es decir, los

[6]En términos más formales, si $F(U)$ es una transformación arbitraria que conserva el orden de U (es decir, $F'(U) > 0$), entonces, para la función de utilidad transformada

$$TMS = \frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \frac{F'(U)\,\partial U/\partial x}{F'(U)\,\partial U/\partial y} = \frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y}$$

que es la *TMS* para la función original U; el hecho de que los términos $F'(U)$ se cancelen uno al otro demuestra que la *TMS* es independiente de la forma de medir la utilidad.

dos conceptos aparentemente se refieren a la misma idea de sentido común, que dice que un individuo se irá saciando relativamente de un bien a medida que consume mayor cantidad del mismo. Por desgracia, los dos conceptos son bastante diferentes (véase el problema 3.7). Técnicamente, el supuesto de una *TMS* decreciente es lo mismo que exigir que la función de utilidad sea cuasi cóncava. Esta exigencia está relacionada, de forma bastante compleja, con el supuesto de que cada bien tiene una utilidad marginal decreciente (es decir, que f_{ii} es negativa para cada bien).[7] Pero esto era de esperar porque el concepto de utilidad marginal decreciente no es independiente de la forma en que se mida la utilidad misma, mientras que la convexidad de las curvas de indiferencia sí es independiente de la medición.

EJEMPLO 3.2

Cómo mostrar la convexidad de las curvas de indiferencia

Calcular la *TMS* en el caso de funciones específicas de utilidad muchas veces representa un atajo conveniente para demostrar la convexidad de las curvas de indiferencia. En concreto, el proceso puede ser mucho más sencillo que aplicar la definición de la cuasi concavidad, si bien es más difícil generalizarlo a una cantidad superior a los dos bienes. En este caso, veremos cómo podemos usar la ecuación 3.17 para tres funciones de utilidad diferentes (para mayor práctica, véase el problema 3.1).

1. $U(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$

Este ejemplo simplemente repite el caso ilustrado en el ejemplo 3.1. Un atajo para aplicar la ecuación 3.17 que puede simplificar el álgebra en este caso es tomar el logaritmo de esta función de utilidad. Dado que tomar logaritmos conserva el orden, ello no alterará la *TMS* que hemos de calcular, Por tanto, si

$$U^*(x, y) = \ln[U(x, y)] = 0.5 \ln x + 0.5 \ln y. \qquad (3.18)$$

Si aplicamos la ecuación 3.17 tendremos

$$TMS = \frac{\dfrac{\partial U^*}{\partial x}}{\dfrac{\partial U^*}{\partial y}} = \frac{\dfrac{0.5}{x}}{\dfrac{0.5}{y}} = \frac{y}{x}. \qquad (3.19)$$

(*continúa*)

[7]Hemos demostrado que si la utilidad está dada por $U = f(x, y)$, entonces

$$TMS = \frac{f_x}{f_y} = \frac{f_1}{f_2} = -\frac{dy}{dx}.$$

El supuesto de una *TMS* decreciente significa que $dTMS/dx < 0$, pero

$$\frac{dTMS}{dx} = \frac{f_2(f_{11} + f_{12} \cdot dy/dx) - f_1(f_{21} + f_{22} \cdot dx/dy)}{f_2^2}.$$

Utilizando el hecho de que $f_1/f_2 = -dy/dx$, tendremos

$$\frac{dTMS}{dx} = \frac{f_2[f_{11} - f_{12}(f_1/f_2)] - f_1[f_{21} - f_{22}(f_1/f_2)]}{f_2^2}.$$

Al combinar términos y reconocer que $f_{12} = f_{21}$ obtendremos

$$\frac{dTMS}{dx} = \frac{f_2 f_{11} - 2f_1 f_{12} + (f_{22} f_1^2)/f_2}{f_2^2},$$

o, al multiplicar el numerador y el denominador por f_2,

$$\frac{dTMS}{dx} = \frac{f_2^2 f_{11} - 2f_1 f_2 f_{12} + f_1^2 f_{22}}{f_2^3}.$$

Si suponemos que $f_2 > 0$ (la utilidad marginal es positiva), entonces la *TMS* disminuirá siempre y cuando

$$f_2^2 f_{11} - 2f_1 f_2 f_{12} + f_1^2 f_{22} < 0.$$

Nótese que la utilidad marginal decreciente ($f_{11} < 0$ y $f_{22} < 0$) no garantiza esta desigualdad. También hay que fijarse en el término f_{12}. Es decir, es necesario saber cómo las disminuciones de y afectan la utilidad marginal de x. Por lo general, no es posible predecir el signo de ese término.

La condición exigida para que la *TMS* sea decreciente es precisamente la que analizamos en el capítulo 2 para garantizar que la función f fuera estrictamente cuasi cóncava. La condición demuestra que las condiciones necesarias para obtener un máximo de f sujeto a una restricción lineal también son condiciones suficientes. Utilizaremos este resultado en el capítulo 4 y en otras partes de este libro.

EJEMPLO 3.2 *CONTINUACIÓN*

que, aparentemente, es un planteamiento mucho más sencillo que el utilizado antes.[8] Queda claro que esta *TMS* decrece a medida que x sube y que y baja. Por tanto, las curvas de indiferencia son convexas.

2. $U(x, y) = x + xy + y$

En este caso, transformar esta función de utilidad no ofrece ventaja alguna. Si aplicamos la ecuación 3.17 tendremos

$$TMS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{1 + y}{1 + x}. \tag{3.20}$$

De nueva cuenta, esta proporción claramente disminuye a medida que x aumenta y que y disminuye, de modo que las curvas de indiferencia en el caso de esta función son convexas.

3. $U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

En este ejemplo es más fácil usar la transformación

$$U^*(x, y) = [U(x, y)]^2 = x^2 + y^2. \tag{3.21}$$

Dado que se trata de la ecuación para un círculo, debemos empezar a sospechar que las curvas de indiferencia para esta función de utilidad podrían tener algunos problemas. Estas sospechas se confirman cuando, de nueva cuenta, aplicamos la definición de la *TMS* para obtener

$$TMS = \frac{\frac{\partial U^*}{\partial x}}{\frac{\partial U^*}{\partial y}} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}. \tag{3.22}$$

En el caso de esta función, queda claro que a medida que x aumenta y que y disminuye, ¡la *TMS aumenta*! Por tanto, las curvas son cóncavas y no convexas, y queda claro que esta función no es cuasi cóncava.

Pregunta: ¿Duplicar la x y la y cambia la *TMS* en cada uno de estos tres ejemplos? Es decir, ¿la *TMS* depende de la proporción de x a y, y no de la escala absoluta de las compras? (Véase también el ejemplo 3.3.)

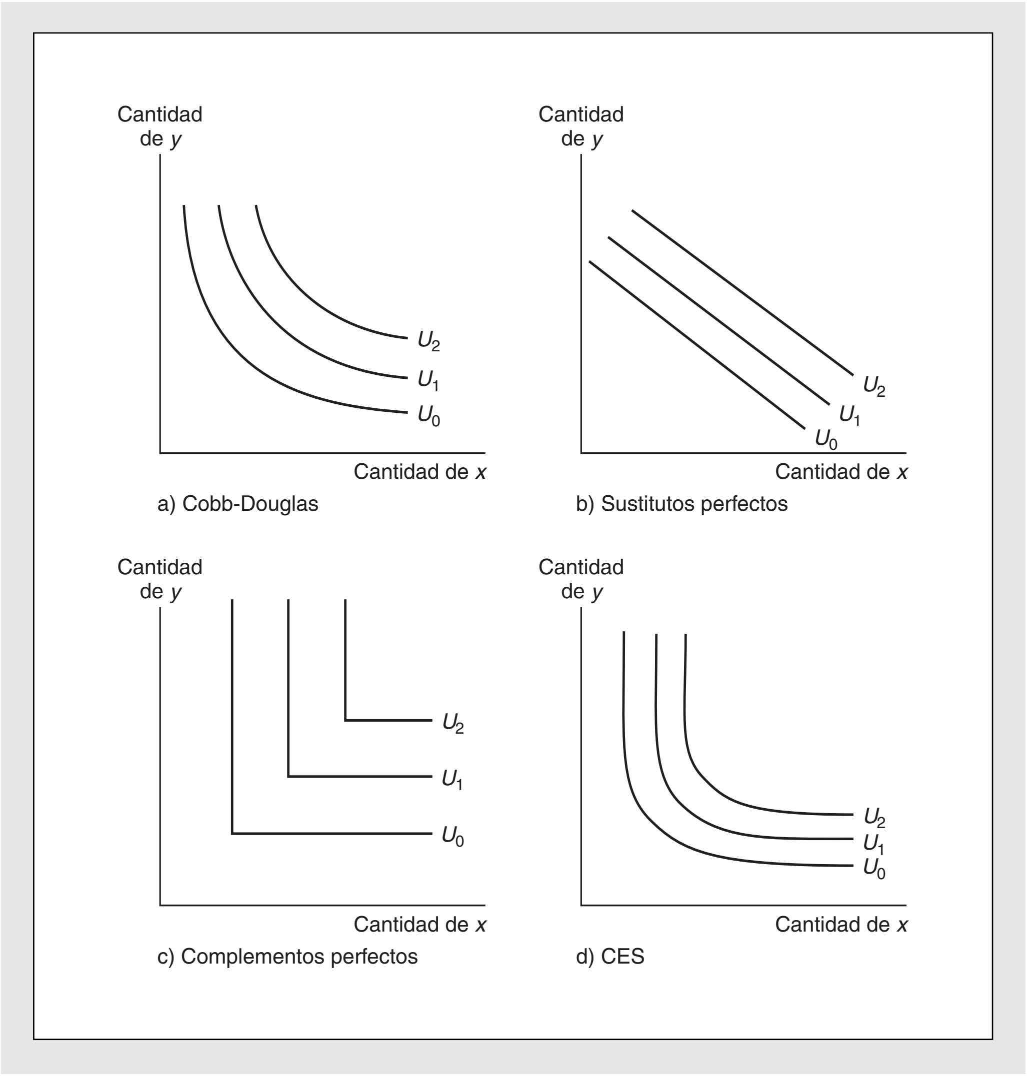
Funciones de utilidad para preferencias específicas

El orden en el que los individuos clasifican las canastas de bienes y las funciones de utilidad que implican esas clasificaciones no son observables. Todo lo que podemos saber acerca de las preferencias de las personas debe provenir del comportamiento que observamos cuando reaccionan ante variaciones de sus ingresos, de los precios y de otros factores. No obstante, resulta útil analizar algunas de las formas particulares que pueden adoptar las funciones de utilidad, porque ese análisis puede aportar información importante acerca del comportamiento observado y (más al caso) porque comprender las propiedades de estas funciones puede ayudar a resolver problemas. Aquí veremos cuatro ejemplos específicos de funciones de utilidad en el caso de dos bienes. Las cuatro secciones de la figura 3.8 muestran mapas de las curvas de indiferencia de estas

[8]En el ejemplo 3.1 vimos la curva de indiferencia $U = 10$. Por tanto, en el caso de esa curva, $y = 100/x$ y la *TMS* de la ecuación 3.19 serían $TMS = 100/x^2$ igual que calculamos antes.

FIGURA 3.8 **Ejemplos de funciones de utilidad**

Los cuatro mapas de curvas de indiferencia representan distintos grados de la posibilidad de sustituir *x* por *y*. Las funciones Cobb-Douglas y CES (trazadas aquí con relativamente poca posibilidad de sustitución) están entre el extremo de sustitutos perfectos (sección b) y complementos perfectos (sección c).



funciones. Como podemos ver, éstas abarcan algunas de las formas posibles. Cuando pasemos a funciones para tres bienes o más encontraremos que puede haber una variedad incluso mayor y en capítulos posteriores mencionaremos algunas de ellas.

Utilidad Cobb-Douglas

La figura 3.8a muestra la forma más conocida de una curva de indiferencia. Una función de utilidad que utilizamos con frecuencia y que genera este tipo de curvas tiene la fórmula

$$\textbf{utilidad} = U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}, \qquad \textbf{(3.23)}$$

donde α y β son constantes positivas.

En los ejemplos 3.1 y 3.2 estudiamos un caso particular de esta función en la cual $\alpha = \beta = 0.5$. La ecuación 3.23 presenta un caso más general que se conoce como ***función de utilidad Cobb-Douglas*** en honor de los dos investigadores que utilizaron esta función para su estudio detallado de las relaciones de producción en la economía estadounidense (véase el capítulo 7). Por lo general, el tamaño relativo de α y β indica la importancia relativa que este individuo adjudica a estos dos bienes. Dado que la utilidad es única tan sólo para una transformación monótona, suele ser conveniente normalizar estos parámetros de forma que $\alpha + \beta = 1$.

Sustitutos perfectos

Las curvas lineales de indiferencia de la figura 3.8b han sido generadas por una función de utilidad con la fórmula

$$\textbf{utilidad} = U(x, y) = \alpha x + \beta y, \tag{3.24}$$

donde, de nueva cuenta, α y β son constantes positivas. Es bastante evidente que las curvas de indiferencia de esta función son líneas rectas; es decir, podemos calcular una curva de nivel cualquiera haciendo que $U(x, y)$ sea igual a una constante que, dada la forma lineal de la función, especifica claramente una línea recta. La naturaleza lineal de estas curvas de indiferencia da lugar al término *sustitutos perfectos* para describir la relación implícita entre x y y. Dado que la *TMS* es constante (e igual a α/β) a lo largo de toda la curva de indiferencia, nuestros conceptos anteriores de una *TMS* decreciente no se aplican a este caso. Una persona con estas preferencias estaría dispuesta a renunciar a la misma cantidad de y para conseguir una unidad más de x independientemente de la cantidad que esté consumiendo de x. Una situación así describiría la relación entre distintas marcas de un producto que, en esencia, es igual. Por ejemplo, a mucha gente (incluyendo al autor de este libro) no le importa dónde compra gasolina. Un litro de gasolina es un litro de gasolina, por mucho que se esfuercen los departamentos de publicidad de Exxon y Shell para convencernos de lo contrario. Así pues, siempre estaremos dispuestos a renunciar a 10 litros de gasolina de Exxon a cambio de 10 litros de gasolina de Shell porque no nos importa qué marca de gasolina utilizamos ni dónde fue que llenamos el depósito la última vez. En efecto, como veremos en el próximo capítulo, una consecuencia de este tipo de relaciones es que siempre compraremos la gasolina de la marca más barata. Dado que no experimentamos una *TMS* decreciente de gasolina Exxon a cambio de gasolina Shell, no tenemos motivo alguno para tratar de equilibrar el consumo de cada tipo de gasolina que usamos.

Complementos perfectos

Las curvas de indiferencia con forma de L de la figura 3.8c ilustran una situación exactamente contraria al caso de los sustitutos perfectos. Estas preferencias se aplicarían a los bienes que "van juntos": café y leche, mantequilla y mermelada y un zapato derecho con uno igual para el pie izquierdo son los ejemplos más conocidos. Las curvas de indiferencia que muestra la figura 3.8c implican que estos pares de bienes siempre serán utilizados en una relación proporcional fija, representada por los vértices de estas curvas. La persona que prefiere 100 mililitros de leche por cada 8 tazas de café querrá 200 mililitros de leche para 16 tazas de café. Una cantidad extra de café sin leche no tendría valor para esta persona, como tampoco lo tendría más leche sin más café. La persona sólo podrá aumentar la utilidad cuando elija los dos bienes juntos.

Podemos formalizar estos conceptos si analizamos la fórmula matemática de la función de utilidad que genera estas curvas de indiferencia con forma de L:

$$\textbf{utilidad} = U(x, y) = \min\,(\alpha x, \beta y). \tag{3.25}$$

En este caso α y β son parámetros positivos y el operador "min" significa que la utilidad está dada por el menor de los dos términos entre corchetes. En el ejemplo del café y la leche, si dejamos que las tazas de café sean representadas por x y los mililitros de leche por y, la utilidad estaría dada por

$$\textbf{utilidad} = U(x, y) = \min\,(x, 8y). \tag{3.26}$$

Ahora 8 tazas de café y 100 mililitros de leche ofrecen 800 unidades de utilidad. Sin embargo, 16 tazas de café y 100 mililitros de leche siguen ofreciendo tan sólo 8 unidades de utilidad, porque min (16, 8) = 8. El café adicional sin leche no tiene valor, como muestra la sección horizontal de las curvas de indiferencia cuando nos alejamos del vértice; es decir, la utilidad no aumenta cuando sólo aumenta x (con y constante). Sólo cuando se duplican tanto el café como la leche (a 16 y 2, respectivamente) la utilidad aumentará a 16.

En términos generales, no habrá un exceso de ninguno de los dos bienes sólo si

$$\alpha x = \beta y. \qquad (3.27)$$

Por tanto,

$$y/x = \alpha/\beta, \qquad (3.28)$$

que muestra la relación fija proporcional que se debe producir entre dos bienes para que las elecciones se encuentren en los vértices de las curvas de indiferencia.

Utilidad con CES

Las tres funciones específicas de utilidad que hemos ilustrado hasta ahora son casos especiales de una función más general con elasticidad de sustitución constante (CES, por sus siglas en inglés), que adopta la fórmula

$$\textbf{utilidad} = U(x, y) = \frac{x^{\delta}}{\delta} + \frac{y^{\delta}}{\delta} \qquad (3.29)$$

cuando $\delta \leq 1$, $\delta \neq 0$, y

$$\textbf{utilidad} = U(x, y) = \ln x + \ln y \qquad (3.30)$$

cuando $\delta = 0$. Es evidente que el caso de los sustitutos perfectos corresponde al caso limitante, $\delta = 1$ de la ecuación 3.29 y que el caso de la función Cobb-Douglas[9] corresponde a $\delta = 0$ en la ecuación 3.30. El caso de que las proporciones fijas corresponde a $\delta = -\infty$ en la ecuación 3.29 es menos evidente, pero también podemos demostrar este resultado si utilizamos un argumento de límites.

El uso del término "elasticidad de sustitución" para esta función surge del concepto de que las posibilidades que muestra la figura 3.8 corresponden a distintos valores del parámetro de sustitución, σ, que para esta función está dado por $\sigma = 1/(1 - \delta)$. Luego entonces, para los sustitutos perfectos $\sigma = \infty$, y en el caso de las proporciones fijas $\sigma = 0$.[10] Dado que la función de CES permite analizar todos estos casos, y otros muchos intermedios, resultará bastante útil para ilustrar el grado de posibilidad de sustitución que se presenta en diversas relaciones económicas.

La forma específica de la función de CES que ilustra la sección d de la figura 3.8 es para el caso donde, $\delta = -1$: es decir,

$$\textbf{utilidad} = -x^{-1} - y^{-1} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y}. \qquad (3.31)$$

En esta situación, $\sigma = \dfrac{1}{1-\delta} = \dfrac{1}{2}$, y, como muestra la gráfica, estas curvas de indiferencia, que tienen una gran pendiente, aparentemente están entre las curvas de funciones Cobb-Douglas y las de funciones con proporciones fijas. Los signos negativos de esta función de utilidad pueden parecer extraños, pero la utilidad marginal, tanto de x como de y son positivas y decrecientes, como era de esperar. Esto explica por qué δ debe aparecer en los denominadores de la ecuación 3.29. En el caso particular de la ecuación 3.31, la utilidad aumenta de $-\infty$ (cuando $x = y = 0$) hacia 0 a medida que x y y aumentan. Tal vez esta parezca una escala de utilidad muy extraña, pero es perfectamente aceptable.

[9]Podríamos generalizar fácilmente la función de CES para poder asignar distintos pesos a los dos bienes. Dado que la principal aplicación de la función consiste en analizar cuestiones de sustitución, normalmente no haremos esta generalización. En algunas de las aplicaciones de la función CES, también omitiremos los denominadores de la función, porque tan sólo constituyen un factor escalar cuando δ es positivo. Sin embargo, para valores negativos de δ, el denominador es necesario para garantizar que la utilidad marginal sea positiva.

[10]En el capítulo 7 analizaremos con más detalle el concepto de elasticidad de sustitución.

EJEMPLO 3.3

Preferencias homotéticas

Todas las funciones de utilidad descritas en la figura 3.8 son "homotéticas" (véase el capítulo 2); es decir, la tasa marginal de sustitución de estas funciones depende únicamente de la *proporción* de las cantidades de los dos bienes, y no de las cantidades totales de los bienes. Este hecho es evidente en el caso de los sustitutos perfectos (cuando la *TMS* es la misma en todos los puntos) y en el caso de los complementos perfectos (cuando la *TMS* es infinita para $y/x > \alpha/\beta$, indefinida cuando $y/x = \alpha/\beta$, y cero cuando $y/x, < \alpha/\beta$). En el caso de la función Cobb-Douglas, podemos obtener la *TMS* como

$$TMS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x} \tag{3.32}$$

que claramente depende tan sólo de la proporción de y/x. Dejamos la demostración de que esta función de CES también es homotética para un ejercicio (véase el problema 3.10).

La importancia de las funciones homotéticas es que una curva de indiferencia es muy parecida a otra. Las pendientes de las curvas sólo dependen de la proporción de y/x, y no de lo alejada que la curva se encuentre del origen. Las curvas de indiferencia para utilidades superiores son simplemente copias de las curvas con utilidad inferior. Por tanto, podemos analizar el comportamiento de un individuo que tiene preferencias homotéticas observando únicamente una curva de indiferencia, o algunas curvas cercanas, sin temor a que nuestros resultados cambien drásticamente para distintos niveles de utilidad.

Pregunta: ¿Cómo definiría usted las funciones homotéticas en términos geométricos? ¿Cómo luciría la ubicación de todos los puntos, con una *TMS* determinada, en el mapa de curvas de indiferencia de un individuo?

Preferencias no homotéticas

Aun cuando todos los mapas de curvas de indiferencia de la figura 3.8 muestran preferencias homotéticas, esto no siempre es así. Veamos la función de utilidad cuasi lineal

$$\textbf{utilidad} = U(x, y) = x + \ln y. \tag{3.33}$$

En esta función, el bien y tiene una utilidad marginal decreciente, pero el bien x no la tiene. Podemos computar la *TMS* como:

$$TMS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y \tag{3.34}$$

La *TMS* disminuye a medida que disminuye la cantidad que la persona elige de y pero es independiente de la cantidad que consume de x. Dado que x tiene una utilidad marginal constante, el deseo de la persona de renunciar a una unidad de y para conseguir una unidad más de x depende únicamente de la cantidad de y que tenga. Al contrario de lo que ocurre en el caso homotético, la duplicación tanto de x como de y duplica la *TMS* en vez de dejarla inalterada?

Pregunta: ¿Qué forma tiene el mapa de curvas de indiferencia para la función de utilidad de la ecuación 3.33? ¿Se le ocurre alguna situación que se pueda describir con esta función?

El caso con muchos bienes

Todos los conceptos que hemos estudiado hasta ahora para el caso de dos bienes se pueden generalizar a situaciones en las cuales la utilidad es una función de muchos bienes elegidos de manera arbitraria. En esta sección exploraremos brevemente algunas de esas generalizaciones. Aun cuando nuestro análisis no sumará mucho a lo que hemos visto antes, considerar los casos cuando las personas prefieren muchos bienes es sumamente importante para la economía aplicada, como veremos en capítulos posteriores.

La *TMS* con muchos bienes

Supongamos que la utilidad es una función de n bienes que está dada por

$$\text{utilidad} = U(x_1, x_2, \cdots x_n). \tag{3.35}$$

El diferencial total de esta expresión será

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n. \tag{3.36}$$

y, al igual que antes, podemos determinar la *TMS* entre dos bienes cualesquier fijando $dU = 0$. En esta derivación también mantenemos constantes las cantidades de todos los bienes que no son los que nos interesan. Por tanto, tendremos

$$dU = 0 = \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U}{\partial x_j} dx_j \tag{3.37}$$

y, tras algunas operaciones algebraicas, tendremos

$$TMS(x_i \ para \ x_j) = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_j}} \tag{3.38}$$

que es precisamente el resultado obtenido en la ecuación 3.17. Sin embargo, queda abierta la pregunta de saber si este concepto es tan útil como en el caso de las dos dimensiones. Cuando sólo tenemos dos bienes, preguntar cómo la persona intercambiaría uno por otro es interesante; es decir, una transacción que de hecho podríamos observar. No obstante, habiendo muchos bienes, es poco probable que la persona simplemente cambie un bien por otro, y mantenga constantes todos los demás. En cambio, sería más probable que un hecho (como un aumento de precios) que llevara a la persona a querer disminuir, por decir, la cantidad de hojuelas de maíz (x_i) que consume también la llevaría a modificar las cantidades que consume de muchos otros bienes, como la leche, el azúcar, los Cheerios, las cucharas, etcétera. Como se verá en el capítulo 6, podremos estudiar mejor el proceso completo de reasignación si se analiza la función de utilidad completa como la representa la ecuación 3.35. Sin embargo, la noción de los intercambios entre tan sólo dos bienes será muy útil como forma de concebir el proceso de maximización de la utilidad que veremos más adelante.

Superficies de indiferencia de muchos bienes

Generalizar el concepto de curvas de indiferencia a muchas dimensiones no plantea grandes dificultades matemáticas. Sencillamente definimos la superficie de indiferencia como el conjunto de puntos en n dimensiones que cumplen con la ecuación

$$U(x_1, x_2, \ldots x_n) = k \tag{3.39}$$

donde k es una constante cualquiera previamente asignada. Si la función de utilidad es cuasi cóncava, entonces el conjunto de puntos donde $U \geq k$ será convexo; es decir, todos los puntos en una línea que una dos puntos cualesquier en la superficie de indiferencia $U = k$ también tendrán $U \geq k$. Esta propiedad es la que nos resultará más útil para aplicaciones posteriores. Sin embargo, por desgracia, las condiciones matemáticas que garantizan la cuasi concavidad en muchas dimensiones no son especialmente intuitivas (véanse las ampliaciones del capítulo 2) y visualizar muchas dimensiones es casi imposible. Por tanto, cuando se requiera de la intuición, por lo general volveremos a los ejemplos de dos bienes.

RESUMEN

En este capítulo hemos descrito cómo los economistas expresan con fórmulas las preferencias de los individuos a partir de la elección de los bienes. Hemos obtenido varias conclusiones sobre estas preferencias y ellas desempeñarán un papel central en el análisis de la teoría de la elección que se realizará en los siguientes capítulos:

- Si los individuos obedecen a determinados postulados básicos de comportamiento sobre sus preferencias entre varios bienes, entonces serán capaces de clasificar todas las canastas de bienes, y podremos representar esa clasificación con una función de utilidad. Cuando los individuos eligen se comportarán como si estuvieran maximizando esta función.

- Podemos ilustrar las funciones de utilidad de dos bienes con un mapa de curvas de indiferencia. Cada curva de indiferencia de este mapa muestra todas las canastas de bienes que producen un nivel de utilidad determinado.

- La tasa marginal de sustitución (*TMS*) define la pendiente negativa de una curva de indiferencia. Ésta muestra la tasa a la cual un individuo estaría dispuesto a renunciar, voluntariamente, a determinada cantidad de un bien (y) si tuviera la compensación de recibir una unidad más de otro bien (x).

- El supuesto de que la *TMS* disminuye a medida que los individuos sustituyen el consumo de x por y es congruente con el concepto de que prefieren cierto equilibrio en sus elecciones de consumo. Si la *TMS* siempre decrece, entonces los individuos tendrán curvas de indiferencia estrictamente convexas. Es decir, sus funciones de utilidad serán estrictamente cuasi cóncavas.

- Algunas formas de funciones simples captan diferencias importantes en las preferencias de los individuos por dos (o más) bienes. Aquí hemos analizado la función Cobb-Douglas, la función lineal (sustitutos perfectos), la función de proporciones fijas (complementos perfectos) y la función de CES (que incluye las otras tres funciones como casos especiales).

- Generalizar los ejemplos de dos bienes a otros de muchos bienes es muy fácil matemáticamente hablando. Además, como veremos, al estudiar casos de personas que escogen de entre muchos bienes obtendremos gran cantidad de información. No obstante, en el caso de muchos bienes, las matemáticas no son especialmente intuitivas, por lo cual recurriremos de manera primordial a los casos de dos bienes para poder tener esa intuición.

PROBLEMAS

3.1

Trace la curva de indiferencia típica de las siguientes funciones de utilidad y determine si son curvas de indiferencia convexas (es decir, si la *TMS* disminuye a medida que *x* aumenta):

a. $U(x, y) = 3x + y$

b. $U(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$

c. $U(x, y) = \sqrt{x} + y$

d. $U(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

e. $U(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$

3.2

En la nota 7 a pie de página de este capítulo demostramos que para que la función de utilidad de dos bienes tenga una *TMS* estrictamente decreciente (es decir, para que sea estrictamente cuasi cóncava), entonces debe cumplir la siguiente condición:

$$f_2^2 f_{11} - 2f_1 f_2 f_{12} + f_1^2 f_{22} < 0.$$

Utilice esta condición para comprobar la convexidad de las curvas de indiferencia de cada una de las funciones de utilidad del problema 3.1. Describa cualquier atajo que descubra en el proceso.

3.3

Analice las siguientes funciones de utilidad:

a. $U(x, y) = xy.$

b. $U(x, y) = x^2y^2.$

c. $U(x, y) = \ln x + \ln y.$

Demuestre que cada una de estas funciones tiene una *TMS* decreciente, pero que tienen, respectivamente, una utilidad marginal creciente constante y una decreciente. ¿A qué conclusiones llega?

3.4

Como vimos en la figura 3.5, una forma de demostrar la convexidad de las curvas de indiferencia es demostrar que, en el caso de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) cualesquier en una curva de indiferencia que promete $U = k$, la utilidad asociada al punto $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ es, cuando menos, tan grande como k. Utilice este planteamiento para explicar la convexidad de las curvas de indiferencia de las tres funciones siguientes. No olvide elaborar una gráfica de sus resultados.

a. $U(x, y) = Mín\,(x, y)$

b. $U(x, y) = Máx\,(x, y)$

c. $U(x, y) = x + y.$

3.5

El aficionado de un equipo de béisbol siempre come sus hot dogs en el estadio de una manera especial; es decir, pide una salchicha extra larga, exactamente, con la mitad de un pan, 1 onza de mostaza y 2 onzas de pepinillos. Su utilidad está exclusivamente en función de estos cuatro productos y una cantidad extra de alguno de ellos, sin los demás elementos, carece de valor alguno.

a. ¿Qué forma tiene la función de utilidad del aficionado en el caso de estos cuatro bienes?

b. ¿Cómo podríamos simplificar las cosas si consideramos que la utilidad del aficionado está en función de un solo bien? ¿Cuál sería ese bien?

c. Supongamos que una salchicha extra larga cuesta $1.00, los panes $0.50, la mostaza $0.05 por onza y los pepinillos $0.15 por onza. ¿Cuánto cuesta el bien definido en el inciso b?

d. Si el precio de las salchichas extra largas aumentara 50% (a $1.50), ¿en qué porcentaje incrementaría el precio del bien?

e. ¿Un incremento de 50% en el precio de los panes cuánto afectaría el precio del bien? ¿Qué diferencia hay entre esta respuesta y la del inciso d?

f. Si el gobierno quisiera aumentar un dólar los impuestos, gravando los bienes que compra el aficionado, ¿cómo debería repartir este impuesto entre los cuatro bienes para minimizar el costo de utilidad que ello entrañaría para el aficionado?

3.6

Muchas frases publicitarias en apariencia dicen algo respecto a las preferencias de las personas. ¿Cómo captaría usted las siguientes frases, matemáticamente, con una función de utilidad?

a. Promete que la margarina es tan buena como la mantequilla.

b. La vida es mejor con Coca-Cola.

c. No puedes comer sólo una papa frita Pringle's.

d. Las donas glaseadas de Krispy Kreme son mejores que las Dunkin'.

e. La cervecería Miller aconseja beber (cerveza) con "moderación". (¿Qué significaría beber sin moderación?)

3.7

Suponga que una persona, inicialmente, tiene cantidades de dos bienes que le brindan utilidad. Estas cantidades iniciales están dadas por $\bar{x}$ y $\bar{y}$.

a. Dibuje una gráfica de estas cantidades iniciales en el mapa de curvas de indiferencia de esta persona.

b. Si la persona puede cambiar x por y (o viceversa) con otras personas, ¿qué tipos de intercambios haría voluntariamente? ¿Qué tipos no haría jamás? ¿Estos intercambios cómo se relacionan a la *TMS* de esta persona en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$?

c. Suponga que esta persona está relativamente contenta con las cantidades iniciales que posee y sólo consideraría la posibilidad de intercambios que incrementaran la utilidad, cuando menos, por una cantidad k. ¿Cómo ilustraría usted lo anterior en el mapa de curvas de indiferencia?

3.8

El ejemplo 3.3 demuestra que la *TMS* de la función Cobb-Douglas

$$U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$$

está dada por

$$TMS = \frac{\alpha}{\beta}(y/x).$$

a. ¿Este resultado depende de que $\alpha + \beta = 1$? ¿Esta suma tiene alguna relevancia para la teoría de la elección?

b. En las canastas de bienes donde $y = x$, ¿la *TMS* cómo depende de los valores de α y β? Ofrezca una explicación intuitiva de por qué, si $\alpha > \beta$, entonces $TMS > 1$. Ilustre su argumentación con una gráfica.

c. Suponga que un individuo tan sólo obtiene utilidad de las cantidades de x y y que exceden a los niveles mínimos de subsistencia, dados por x_0, y_0. En este caso,

$$U(x, y) = (x - x_0)^{\alpha} (y - y_0)^{\beta}.$$

¿Esta función es homotética? (Para un mayor análisis, véanse las ampliaciones del capítulo 4.)

3.9

Dos bienes tienen utilidades marginales independientes si

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0.$$

Demuestre que si suponemos que cada bien tiene una utilidad marginal decreciente, entonces toda función de utilidad con utilidades marginales independientes tendrá una *TMS* decreciente. Ofrezca un ejemplo para demostrar que la afirmación contraria no es cierta.

3.10

a. Demuestre que la función de CES

$$\alpha \frac{x^{\delta}}{\delta} + \beta \frac{y^{\delta}}{\delta}$$

es homotética. ¿La *TMS* cómo depende de la proporción y/x?

b. Demuestre que sus resultados para el inciso a coinciden con la explicación de los casos $\delta = 1$ (sustitutos perfectos) y $\delta = 0$ (Cobb-Douglas).

c. Demuestre que la *TMS* es estrictamente decreciente para todos los valores de $\delta < 1$.

d. Demuestre que si $x = y$, entonces la *TMS* de esta función depende únicamente del valor relativo de α y β.

e. Calcule la *TMS* de esta función cuando $y/x = 0.9$ y $y/x = 1.1$ para los casos en que $\delta = 0.5$ y $\delta = -1$. ¿Cuáles serían sus conclusiones respecto a la magnitud del cambio de la *TMS* cuando se encuentra próxima a $x = y$? ¿Cómo interpretaría esto en términos geométricos?

LECTURAS RECOMENDADAS

Jehle, G. R. y P. J. Reny. *Advanced Microeconomic Theory,* 2a. ed., Addison Wesley-Longman, Boston, 2001.
El capítulo 2 contiene una estupenda prueba de la existencia de funciones de utilidad cuando se cumplen los axiomas básicos de la racionalidad.

Kreps, David M. *A Course in Microeconomic Theory,* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.
El capítulo 1 cubre la teoría de las preferencias con bastante detalle. Una buena explicación de la cuasi concavidad.

Kreps, David M. *Notes on the Theory of Choice,* Westview Press, Londres, 1988.
Una buena explicación de los fundamentos de la teoría de las preferencias. La mayor parte del libro gira en torno a la utilidad en situaciones de incertidumbre.

Marshall, A. *Principles of Economics,* 8a. ed., libro III caps. I–IV, Macmillan, Londres, 1920.
Libro de texto para principiantes. Agradable de leer y tratamiento muy interesante de la teoría de consumo.

Mas-Colell, Andrea, Michael D. Whinston y Jerry R. Green. *Microeconomic Theory,* Oxford University Press, Nueva York, 1995.
Los capítulos 2 y 3 presentan una explicación detallada de las relaciones de las preferencias y de su representación mediante funciones de utilidad.

Stigler, G. "The Development of Utility Theory", *Journal of Political Economy 59,* pts. 1-2, agosto/octubre de 1950, pp. 307-327, 373-396.
Un resumen completo y lúcido de la historia de la teoría de la utilidad. Contiende interesante información y apéndices.

AMPLIACIONES

Una clara y completa reseña de la historia de la teoría de la utilidad.

Preferencias especiales

El concepto de la función de utilidad es un concepto bastante general que podemos adaptar a una enorme cantidad de circunstancias especiales. El descubrimiento de fórmulas funcionales ingeniosas que reflejen los aspectos esenciales de algún problema específico ofrece muchas ideas que no serían evidentes con un planteamiento más literal. Aquí nos vamos a centrar en tres aspectos de las preferencias que los economistas han intentado reflejar con fórmulas funcionales especiales: 1) la calidad; 2) los hábitos y las adicciones, y 3) las preferencias de terceros.

A3.1 Calidad

Dado que muchos bienes de consumo tienen calidades muy distintas, los economistas están interesados en incluir estas diferencias en los modelos de elección. Un planteamiento consiste en considerar, simplemente, que los bienes que tienen distinta calidad son bienes del todo separados, pero que son sustitutos relativamente cercanos. Sin embargo, este planteamiento no es manejable debido a la enorme cantidad de bienes involucrados. Un planteamiento alternativo se centra en la calidad como elemento directo de la elección. En este caso, podríamos reflejar la utilidad como

$$\textbf{utilidad} = U(q, Q) \qquad (i)$$

donde q es la cantidad consumida y Q es la calidad de ese consumo. Si bien este planteamiento permite analizar, en cierta medida, los intercambios entre calidad y cantidad, plantea problemas cuando la cantidad consumida de un bien (por ejemplo, el vino) incluye diversas calidades. Luego entonces, en este caso, podemos definir la calidad como una media (véase Theil, 1982),[1] pero ese planteamiento puede no resultar adecuado cuando la calidad de los bienes nuevos cambia velozmente (por ejemplo, como en el caso de las computadoras personales). Un planteamiento más general (sugerido inicialmente por Lancaster, 1971) se centra en un conjunto bien definido de atributos de los bienes y supone que esos atributos proporcionan utilidad. Si un bien q proporciona dos de estos atributos, a_1 y a_2, entonces podríamos expresar la utilidad como

$$\textbf{utilidad} = U[q, a_1(q), a_2(q)] \qquad (ii)$$

y las mejoras de la utilidad pueden surgir porque este individuo elige una cantidad más grande del bien o porque una cantidad determinada le ofrece un grado mayor de atributos valiosos.

Computadoras personales

Éste es el planteamiento que aplican los economistas que analizan la demanda en las industrias que cambian con rapidez, como la de computadoras personales. En este caso, salta a la vista que no sería correcto centrarse sólo en la cantidad de computadoras personales adquiridas cada año, porque las computadoras nuevas son mucho mejores que las antiguas (y, por tanto, cabe suponer que ofrecen más utilidad). Por ejemplo, Berndt, Griliches y Rappaport (1995) consideran que la calidad de las computadoras personales ha mejorado en 30% por año durante bastante tiempo, principalmente debido a mejores atributos, como los procesadores más veloces y los discos duros de gran capacidad. Una persona que gaste hoy, por ejemplo, 2000 dólares en una computadora personal estará adquiriendo mucha más utilidad que la que adquirió un consumidor análogo hace 5 años.

A3.2 Hábitos y adicción

Dado que el consumo se produce a lo largo del tiempo, existe la posibilidad de que las decisiones tomadas en un periodo afecten la utilidad de periodos posteriores. Las personas forman hábitos cuando, en un periodo, descubren que disfrutan con el uso de un bien y ello aumenta su consumo en periodos posteriores. Un caso extremo es el de la adicción (a las drogas, al tabaco o las películas de los hermanos Marx), en el cual el consumo pasado incrementa significativamente la utilidad del consumo presente. Una forma de plasmar estas ideas matemáticamente consiste en suponer que la utilidad del periodo t depende del consumo en el periodo t y del total de todo el consumo anterior de un bien que crea hábito (por ejemplo, el bien x):

$$\textbf{utilidad} = U_t(x_t, y_t, s_t) \qquad (iii)$$

donde $s_t = \sum_{i=1}^{\infty} x_{t-i}$.

Sin embargo, en las aplicaciones empíricas no suelen existir datos de todos los niveles de

[1] Theil también sugiere la posibilidad de medir la calidad analizando las correlaciones que existen entre los cambios en el consumo y la elasticidad ingreso de diversos bienes.

consumo anteriores. Por tanto, es frecuente hacer modelos de los hábitos empleando tan sólo datos del consumo actual (x_t) y el consumo del periodo anterior (x_{t-1}). Una forma común de proceder consiste en suponer que la utilidad está determinada por

$$\textbf{utilidad} = U_t(x_t^*, y_t), \qquad (iv)$$

donde x_t^* es una función simple de x_t y x_{t-1}, como $x_t^* = x_t - x_{t-1}$ o $x_t^* = x_t / x_{t-1}$. Estas funciones implican que, ceteris paribus, cuanto mayor sea x_{t-1}, tanto mayor la cantidad de x_t que se elegirá en el periodo actual.

Modelos de los hábitos

Estos planteamientos para hacer modelos de los hábitos han sido aplicados a una amplia variedad de temas. Stigler y Becker (1977) utilizan estos modelos para explicar por qué las personas desarrollan el "gusto" por asistir a la ópera o por jugar al golf. Becker, Grossman y Murphy (1994) adaptan los modelos para estudiar el hábito de fumar y otros comportamientos de adicción. Demuestran que la reducción del consumo de tabaco en una etapa temprana de la vida tiene importantes efectos en el consumo posterior de tabaco debido a la dinámica de las funciones de utilidad de los individuos. Los economistas han realizado muchos estudios para saber si el comportamiento adictivo es "racional". Por ejemplo, Gruber y Koszegi (2001) demuestran que la elección de fumar cigarrillos se puede considerar racional, pero inconsistente en el tiempo.[2]

A3.3 Preferencias de terceros

Los individuos se preocupan, a todas luces, por el bienestar de otros individuos. No podríamos comprender fenómenos como los donativos a obras de caridad o los regalos a los niños sin reconocer la interdependencia de las personas. Podemos incluir estas preferencias en la función de utilidad de la persona *i*, de la siguiente manera, por ejemplo:

$$\textbf{utilidad} = U_i(x_i, y_i, U_j), \qquad (v)$$

donde U_j es la utilidad de otra persona.

Si $\partial U_i / \partial U_j > 0$ esta persona observará un comportamiento altruista, mientras que si $\partial U_i / \partial U_j < 0$ entonces la persona demostrará el malévolo comportamiento asociado a la envidia. Luego entonces, el caso habitual de $\partial U_i / \partial U_j = 0$ simplemente es un punto intermedio entre estos dos tipos alternativos de preferencias. Gary Becker ha sido un pionero en el estudio de estas posibilidades y ha escrito sobre diversos temas, inclusive la teoría general de las relaciones sociales (1976) y la importancia del altruismo en la teoría de la familia (1981).

Biología evolucionista y genética

Los biólogos han sugerido una fórmula particular para la función de utilidad de la ecuación iv, derivada de la teoría de la genética. En este caso

$$\textbf{utilidad} = U_i(x_i, y_i) + \sum_j r_j U_j \qquad (vi)$$

donde r_j mide la cercanía de una relación genética entre la persona *i* y la persona *j*. Por ejemplo, en el caso de los padres y los hijos, $r_j = 0.5$, mientras que en el de los primos $r_j = 0.125$. Bergstrom (1996) describe algunas conclusiones sobre el comportamiento evolucionista que han extraído los biólogos de esta fórmula funcional particular.

Referencias

Becker, Gary S. *The Economic Approach to Human Behavior*, Chicago: The University of Chicago Press, Chicago, 1976.

———. *A Treatise on the Family*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1981.

Becker, Gary S., Michael Grossman y Kevin M. Murphy. "An Empirical Analysis of Cigarette Addiction", *American Economic Review*, junio de 1994, pp. 396-418.

Bergstrom, Theodore C. "Economics in a Family Way", *Journal of Economic Literature*, diciembre de 1996, pp. 1903-1934.

Berndt, Erst R., Zvi Griliches y Neal J. Rappaport. "Econometric Estimates of Price Indexes for Personal Computers in the 1990s", *Journal of Econometrics*, julio de 1995, pp. 243-268.

Gruber, Jonathan y Botond Koszegi. "Is Addiction 'Rational' Theory and Evidence", *Quarterly Journal of Economics*, noviembre de 2001, pp. 1261-1303.

Lancaster, Kelvin J. *Consumer Demand: A New Approach*, Columbia University Press, Nueva York, 1971.

Stigler, George J. y Gary S. Becker. "De Gustibus Non Est Disputandum", *American Economic Review*, marzo de 1977, pp. 76-90.

Theil, Henri. "Qualities, Prices, and Budget Enquiries", *Review of Economic Studies*, abril de 1952, pp. 129-147.

[2]Para más información acerca de la inconsistencia de tiempos véase el capítulo 17.

Capítulo 4

MAXIMIZACIÓN DE LA UTILIDAD Y ELECCIÓN

En este capítulo se analizará el modelo básico de la elección que los economistas utilizan para explicar el comportamiento de los individuos. El modelo supone que éstos, ante la restricción de sus ingresos limitados, se comportarán como si estuvieran utilizando su poder adquisitivo de modo que les permita obtener la mayor utilidad posible. Es decir, supone que los individuos se comportan como si maximizaran la utilidad, sujeto a la restricción de su presupuesto. Si bien las aplicaciones concretas de este modelo son muy variadas, como se demostrará, todas parten del mismo modelo matemático fundamental, y todas llegan a la misma conclusión general: los individuos, para maximizar su utilidad, elegirán paquetes de bienes que representen una tasa de intercambio entre dos bienes (la TMS*) que sea igual a la tasa de los precios de mercado de esos bienes. Los precios de mercado ofrecen información acerca de los costos de oportunidad para los individuos y ésta desempeña un importante papel que afecta lo que ellos eligen.*

Maximización de la utilidad y cálculos ágiles

Antes de iniciar el estudio formal de la teoría de la elección, es conveniente descartar dos críticas que los no economistas suelen plantear respecto al enfoque que adoptaremos. La primera es la acusación de que ninguna persona real puede hacer el tipo de "cálculos ágiles" necesarios para poder maximizar la utilidad. Según esta crítica, cuando las personas caminan por el pasillo de un supermercado, éstas simplemente toman los productos disponibles y no actúan con un propósito fijo ni siguen patrón alguno. Sin embargo, esta crítica no convence a los economistas. Éstos no creen que las personas se comporten al azar (al fin y al cabo, todo el mundo está limitado por alguna restricción de su presupuesto) y consideran que la acusación del cálculo expedito no tiene cabida. Recuerde, de nuevo, el caso del jugador de billar de Friedman. Este jugador no puede hacer los cálculos expeditos necesarios para planificar un tiro aplicando las leyes de la física, pero esas leyes siguen sirviendo para predecir el comportamiento del jugador. De la misma manera, como veremos, el modelo de maximización de la utilidad predice muchos aspectos del comportamiento, a pesar de que nadie va por el mundo con una calculadora que lleve programada su función de utilidad personal. Para ser precisos, los economistas suponen que la gente se comporta como si hiciera esos cálculos y, por lo mismo, la crítica de que no es posible que la gente haga los cálculos es prácticamente irrelevante.

Altruismo y egoísmo

La segunda crítica contra nuestro modelo de elección es que, al parecer, es en extremo egoísta; es decir, según esta queja, nadie tiene objetivos tan centrados exclusivamente en sí mismo. Si bien los economistas estarían más dispuestos a aceptar el interés personal como una motivación que otros pensadores más utópicos (Adam Smith observó: "No estamos en posición de sospechar que alguien carece de egoísmo"[1]), esta acusación también es errónea. El modelo de maximización de la utilidad no tiene nada que impida que los individuos obtengan satisfacción de la filantropía o de "hacer el bien" en términos generales. También podemos suponer que estas actividades proporcionan utilidad. En efecto, los economistas han utilizado mucho el modelo de maximización de la utilidad para estudiar cuestiones como la entrega de tiempo y dinero a actividades caritativas, las donaciones a niños o incluso la donación de sangre. No es necesario plantear si estas actividades son "egoístas" o "altruistas", dado que los economistas ponen en duda que la gente las realizara si estuvieran en contra de sus intereses, concebidos en términos generales.

Una reseña inicial

Podemos resumir sucintamente los resultados generales de nuestro análisis de la maximización de la utilidad de la manera siguiente:

PRINCIPIO DE LA OPTIMIZACIÓN

Maximización de la utilidad. Un individuo que busca maximizar su utilidad, dado que tiene una cantidad fija de ingresos disponibles para gastar, comprará las cantidades de bienes que agoten todos sus ingresos y que, mentalmente, representen una tasa de un intercambio cualquiera de dos bienes (la *TMS*) que sea igual a la tasa que les permite intercambiar uno de esos bienes por el otro en el mercado.

El supuesto de que es necesario que los individuos gasten todos sus ingresos para maximizar la utilidad es evidente. Dado que los bienes adicionales proporcionan más utilidad (no hay saciedad) y dado que los ingresos no tienen otro uso, el dejar ingresos sin gastar impediría maximizar la utilidad. Tirar el dinero no es una actividad que maximice la utilidad.

La condición que especifica la igualdad de las tasas de intercambio exige una explicación algo más detallada. Dado que la tasa a la cual el individuo puede intercambiar un bien por otro en el mercado está dada por su tasa de precios, podemos volver a expresar este resultado diciendo que este individuo hará que su *TMS* (de x por y) sea igual a la proporción del precio de x con relación al de y (p_x/p_y). La igualación de la tasa personal de intercambio y la tasa de intercambio fijada por el mercado es un resultado que comparten todos los problemas de maximización de la utilidad individual (y otros muchos tipos de problemas de maximización) y se repetirá una y otra vez a lo largo de este libro.

Una ilustración numérica

Para ver el razonamiento intuitivo que sustenta este resultado, supongamos que no es cierto que el individuo haya igualado su *TMS* y la tasa de los precios de los bienes. Concretamente, supongamos que la *TMS* del individuo es igual a 1, o sea que está dispuesto a cambiar una unidad de x por una unidad de y para permanecer en el mismo nivel de bienestar. Supongamos también que el precio de x es de dos dólares por unidad y que el de y es de un dólar por unidad. En este caso, es fácil demostrar que esta persona puede estar en una mejor situación. Supongamos que la persona reduce su consumo en una unidad de x y que la intercambia en el mercado por 2 unidades de y. Esta persona sólo necesitaba 1 unidad más de y para estar igual de contenta que antes del intercambio; es decir, la segunda unidad de y es una adición neta a su bienestar. Por tanto, de entrada, no es posible pensar que el gasto del individuo estaba asignado de forma óptima. Podemos utilizar un método de razonamiento análogo siempre que la *TMS* y la tasa de los precios p_x/p_y difieran. La condición para alcanzar la utilidad máxima es la igualdad de estas dos magnitudes.

El caso de dos bienes: un análisis gráfico

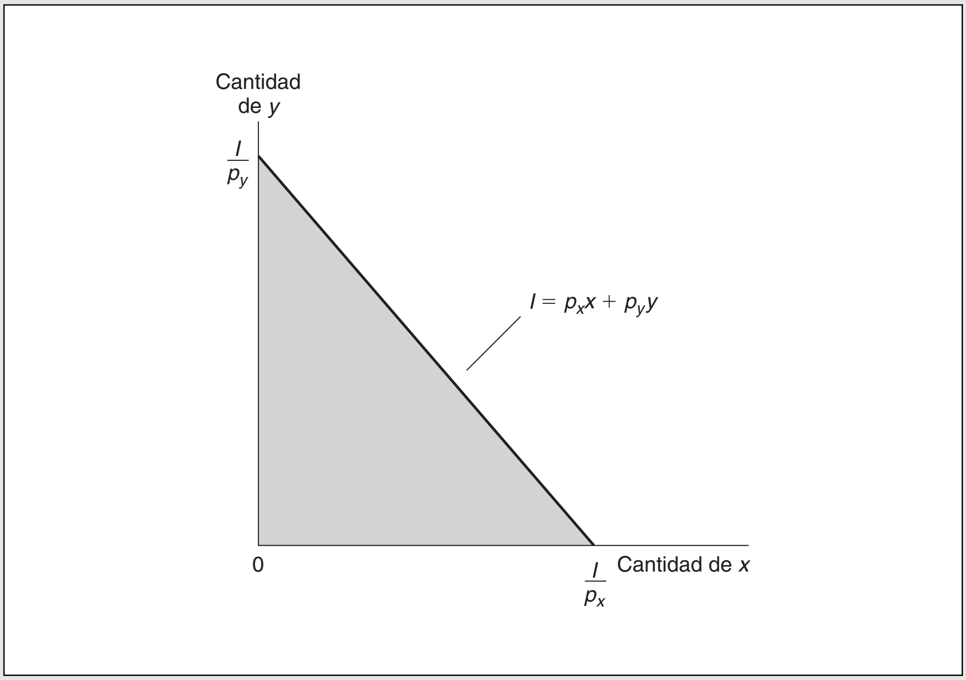
La explicación parece bastante razonable, pero difícilmente podemos decir que es una prueba. Por el contrario, ahora debemos demostrar este resultado con rigor y, al mismo tiempo, ilustrar otros atributos importantes del proceso de maximización. Primero realizaremos un análisis gráfico. Después adoptaremos un planteamiento más matemático.

---

[1]Adam Smith. *The Theory of Moral Sentiments*, 1759; reimpresión, Arlington House, New Rochelle, NY, 1969, p. 446.

FIGURA 4.1 **Restricción presupuestaria de un individuo en el caso de dos bienes**

El triángulo sombreado muestra las combinaciones de x y y que el individuo puede adquirir. Si, como solemos suponer, el individuo prefiere tener más que menos de cada uno de los bienes, el límite externo de este triángulo es la restricción relevante donde gasta todos los fondos disponibles en x o en y. La pendiente de la línea recta de esta restricción está determinada por $-p_x/p_y$.



Restricción presupuestaria

Supongamos que un individuo tiene I dólares para asignar entre el bien x y el bien y. Si p_x es el precio del bien x y p_y es el precio del bien y, entonces el individuo estará restringido por

$$p_x x + p_y y \leq I. \tag{4.1}$$

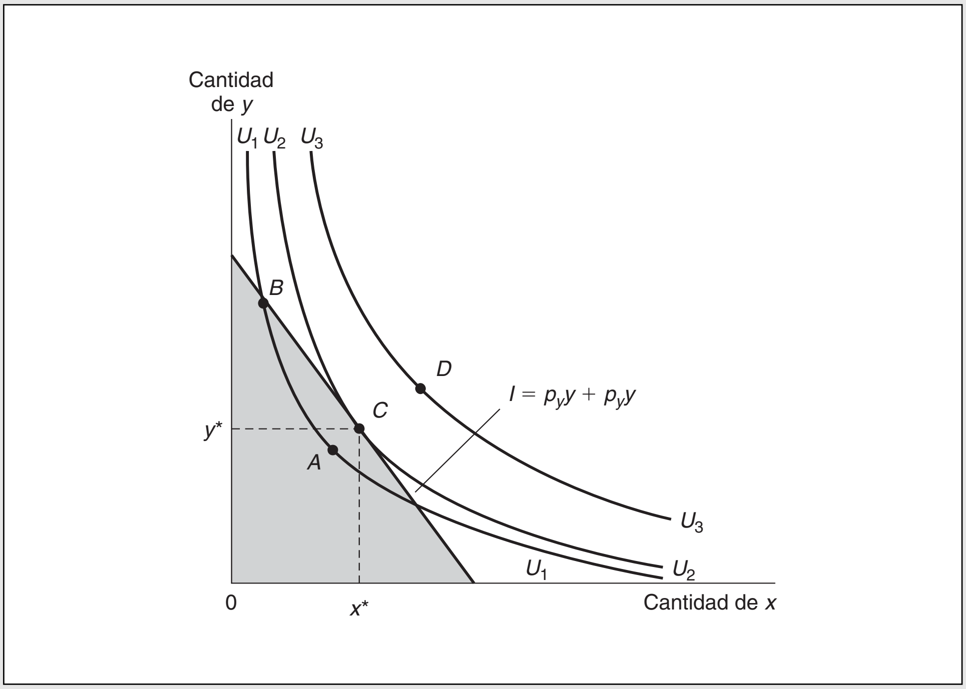
Es decir, no puede gastar más de I en los dos bienes en cuestión. La figura 4.1 contiene una representación gráfica de esta restricción presupuestaria. Esta persona sólo se puede permitir elegir las combinaciones de x y y que estén dentro del triángulo sombreado de la figura. Si gasta todo su ingreso I en el bien x, entonces comprará I/p_x unidades de x. De otra parte, si gasta todo en y, entonces comprará I/p_y unidades de y. Podemos ver, fácilmente, que la pendiente de la restricción es $-p_x/p_y$. Esta pendiente muestra cómo el individuo puede cambiar y por x en el mercado. Si $p_x = 2$ y $p_y = 1$, 2 entonces intercambiará 2 unidades de y por una de x.

Condiciones de primer orden para un máximo

Podemos imponer la restricción presupuestaria de esta persona sobre el mapa de sus curvas de indiferencia para mostrar el proceso de maximización de la utilidad. La figura 4.2 ilustra este procedimiento. El individuo no sería racional si eligiera un punto como el A; es decir, puede obtener un nivel de utilidad más alto con tan sólo gastar un poco más de la porción de sus ingresos que no ha gastado. El supuesto de que no hay saciedad implica que la persona debe gastar todos sus ingresos para obtener de ellos la utilidad máxima. Por otra parte, si la persona reasigna sus gastos podrá estar en mejor posición que en el punto B. El punto D queda descartado porque sus ingresos no son lo bastante altos como para adquirir D. Es evidente que la posición de máxima utilidad se encuentra en el punto C, en el cual elige la combinación x^*, y^*. Éste

FIGURA 4.2 **Una demostración gráfica de la maximización de la utilidad**

El punto C representa el nivel de utilidad más alto que puede alcanzar el individuo, dada su restricción presupuestaria. Por tanto, la combinación x^*, y^* es la forma racional para asignar su poder adquisitivo. Sólo con esta combinación de bienes se cumplirán dos condiciones: el individuo gastará todos los fondos disponibles; y su tasa subjetiva de intercambio (la *TMS*) será igual a la tasa a la cual puede intercambiar los bienes en el mercado (p_x/p_y).



es el único punto sobre la curva de indiferencia U_2 que puede adquirir con I dólares; es decir, no puede adquirir un nivel más alto de utilidad. C es el punto de tangencia entre la restricción presupuestaria y la curva de indiferencia. Por ello, en el punto C,

$$\begin{aligned}\textbf{pendiente de la restrición presupuestaria} &= \frac{-p_x}{p_y} = \textbf{pendiente de la curva de indeferencia} \\ &= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{U\,=\,\text{constante}}\end{aligned} \tag{4.2}$$

o

$$\frac{p_x}{p_y} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{U\,=\,\text{constante}} = TMS \text{ (de } x \text{ por } y). \tag{4.3}$$

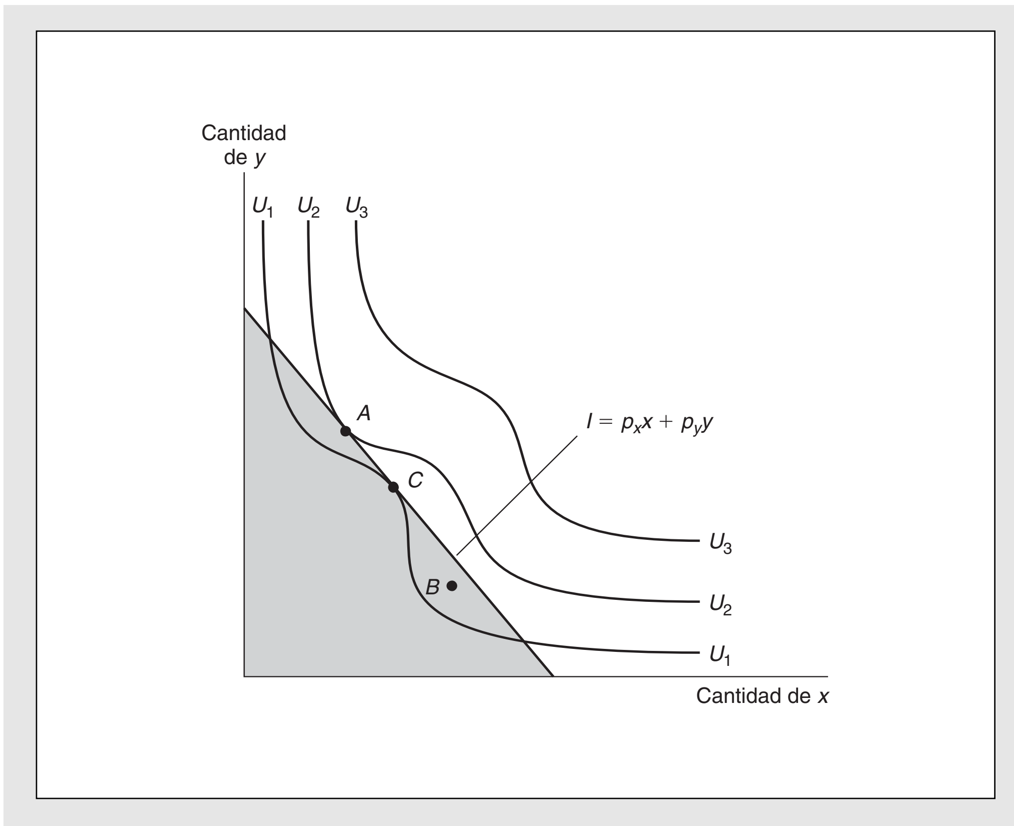
Así, nuestro resultado intuitivo queda demostrado; es decir, para alcanzar la utilidad máxima, el individuo debe gastar todos sus ingresos y la *TMS* debe ser igual a la tasa de precios de los bienes. El diagrama permite ver con claridad que si estas condiciones no se cumplen, entonces el individuo podrá estar en mejor posición si reasigna sus gastos.

Condiciones de segundo orden para el máximo

La regla de la tangencia es tan sólo una de las condiciones necesarias para alcanzar el máximo. Para ver que no es una condición suficiente, analicemos el mapa de curvas de indiferencia que

FIGURA 4.3 **Ejemplo de un mapa de curvas de indiferencia en el cual la condición de tangencia no garantiza un máximo**

Si las curvas de indiferencia no cumplen el supuesto de una *TMS*, decreciente, entonces no todos los puntos de tangencia (puntos en los cuales $TMS - p_x/p_y$) pueden ser realmente puntos de utilidad máxima. En este ejemplo, el punto de tangencia *C* es inferior a otros muchos puntos que el individuo también puede comprar con los fondos disponibles. Para que las condiciones necesarias para obtener un máximo (es decir, las condiciones de tangencia) también sean suficientes, por lo general suponemos que la *TMS* es decreciente; es decir, que la función de utilidad es estrictamente cuasi cóncava.



muestra la figura 4.3. En este caso, un punto de tangencia (*C*) es inferior a un punto sin tangencia (*B*). En realidad, el verdadero máximo es otro punto de tangencia (*A*). Aquí, podemos decir que el hecho de que la condición de la tangencia no produzca un máximo contundente se debe a la forma de las curvas de indiferencia de la figura 4.3. Si las curvas de indiferencia tienen la forma de las de la figura 4.2, entonces no surgirá este problema. Sin embargo, ya hemos demostrado que las curvas de indiferencia con forma "normal" se deben al supuesto de una *TMS* decreciente. Por tanto, si suponemos que la *TMS* es decreciente, entonces la condición de tangencia será tanto necesaria como suficiente para alcanzar un máximo.[2] Sin este supuesto, debemos tener cuidado cuando aplicamos la regla de la tangencia.

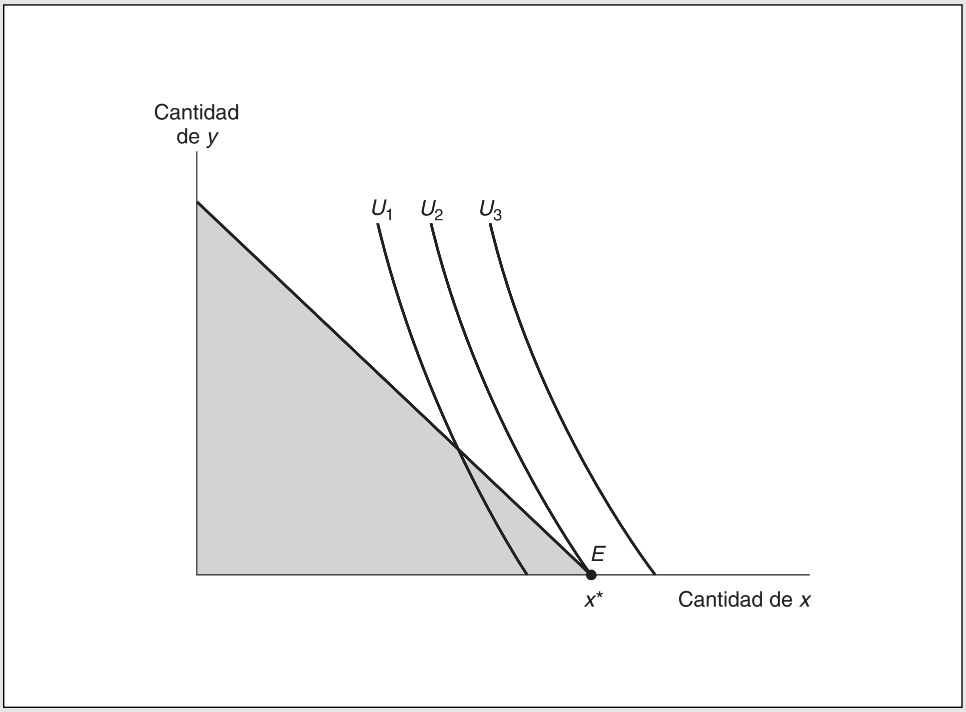
Soluciones de esquina

El problema de maximización de la utilidad que presentaba la figura 4.2 daba por resultado un máximo "interior", con el cual el individuo consumía cantidades positivas de los dos bienes. En algunas situaciones, las preferencias de los individuos pueden ser tales que éstos pueden alcanzar la utilidad máxima optando por no consumir nada de uno de los bienes. Si a una persona no le

[2]En términos matemáticos, el supuesto de que la *TMS* es decreciente, es equivalente a suponer cuasi concavidad, las condiciones necesarias para obtener un máximo sujeto a una restricción lineal también son suficientes, como demostramos antes en el capítulo 2.

FIGURA 4.4 **Solución de esquina para la maximización de la utilidad**

Con las preferencias representadas por este conjunto de curvas de indiferencia, la maximización de la utilidad se produce en el punto *E*, donde el individuo consume nada del bien *y*. Se deben modificar un poco las condiciones de primer orden para obtener un máximo a efecto de dar cabida a esta posibilidad.



gustan demasiado las hamburguesas, no tendrá motivo alguno para asignar parte de sus ingresos para adquirirlas. La figura 4.4 refleja esta posibilidad. En ella, la utilidad es máxima en el punto *E*, en el cual $x = x^*$ y $y = 0$; es decir, un punto cualquiera sobre la restricción presupuestaria en el cual las cantidades positivas de *y* que consuma le ofrecerán menor utilidad que la del punto *E*. Nótese que en *E* la restricción presupuestaria no está precisamente tangente a la curva de indiferencia U_2. En cambio, en el punto óptimo, la restricción presupuestaria es más plana que U_2, lo cual indica que la tasa a la cual el individuo puede intercambiar *x* por *y* en el mercado es más baja que su tasa subjetiva de intercambio (la *TMS*). A los precios existentes en el mercado, el individuo está más que dispuesto a renunciar a una cantidad de *y* para obtener más de *x*. Sin embargo, dado que en este problema es imposible que consuma cantidades negativas de *y*, el límite físico de este proceso es el eje *X*, a lo largo del cual las compras de *y* son nulas. Por tanto, como deja patente este análisis, es necesario enmendar un poco las condiciones de primer orden para obtener la utilidad máxima de forma que tengan cabida soluciones de esquina del tipo que muestra la figura 4.4. En la explicación del caso general con *n* bienes, emplearemos las matemáticas del capítulo 2 a efecto de demostrar cómo se puede hacer lo anterior.

El caso con *n* bienes

Podemos trasladar los resultados que hemos obtenido gráficamente para el caso de dos bienes directo al caso de *n* bienes. De nuevo, podemos demostrar que para obtener una solución interior de utilidad máxima, la *TMS* entre dos bienes cualesquier debe ser igual a la tasa de los precios de esos bienes. Sin embargo, para estudiar este caso, es más conveniente utilizar las matemáticas.

Condiciones de primer orden

Con n bienes, el objetivo del individuo consiste en maximizar la utilidad que obtiene de estos n bienes:

$$\text{utilidad} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4.4}$$

sujeta a la restricción presupuestaria:[3]

$$I = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \tag{4.5}$$

o

$$I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n = 0. \tag{4.6}$$

Si aplicamos las técnicas que vimos en el capítulo 2 para maximizar una función sujeta a una restricción, escribimos la expresión del lagrangiano

$$\mathscr{L} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - \ldots - p_nx_n). \tag{4.7}$$

Si hacemos que las derivadas parciales de $\mathscr{L}$ (respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y λ) sean igual a cero obtendremos $n + 1$ ecuaciones que representan las condiciones necesarias para alcanzar un máximo interior:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_n} &= \frac{\partial U}{\partial x_n} - \lambda p_n = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_x = 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Normalmente, podemos resolver estas $n + 1$ ecuaciones para calcular las $x_1, x_2, \ldots, x_n$ óptimas y para λ (vea los ejemplos 4.1 y 4.2 para convencerse de que esta solución es posible).

Las ecuaciones 4.8 son necesarias, pero no suficientes, para alcanzar un máximo. Las condiciones de segundo orden que garantizan el máximo son relativamente complejas y debemos escribirlas en términos matriciales (véase la ampliación del capítulo 2). Sin embargo, el supuesto de la cuasi concavidad estricta (una *TMS* decreciente en el caso de dos bienes) es suficiente para garantizar que un punto cualquiera que cumpla las ecuaciones 4.8 es, de hecho, un auténtico máximo.

Implicaciones de las condiciones de primer orden

Podemos volver a escribir las condiciones de primer orden que representan las ecuaciones 4.8 de diversas formas muy interesantes. Por ejemplo, en el caso de dos bienes cualesquier, x_i y x_j, tenemos

$$\frac{\partial U/\partial x_i}{\partial U/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}. \tag{4.9}$$

En el capítulo 3 se demostró que el cociente de la utilidad marginal de dos bienes es igual a la tasa marginal de sustitución entre ambos. Por tanto, las condiciones para una asignación óptima de los ingresos son:

$$TMS\ (x_i \ para\ x_j) = \frac{p_i}{p_j}. \tag{4.10}$$

Éste es exactamente el resultado que concluimos antes, gráficamente, en este capítulo; es decir, para maximizar la utilidad, el individuo debe igualar su tasa subjetiva de intercambio y la tasa de intercambio del mercado.

---

[3]De nuevo, en este caso, hemos expresado la restricción presupuestaria como una igualdad porque, dado el supuesto de que nunca se alcanza la saciedad, es evidente que el individuo gastará todo su ingreso disponible.

Interpretación del multiplicador lagrangiano

Otro resultado que podemos obtener si se resuelven las ecuaciones 4.8 para λ es:

$$\lambda = \frac{\partial U/\partial x_1}{p_1} = \frac{\partial U/\partial x_2}{p_2} = \cdots = \frac{\partial U/\partial x_n}{p_n} \tag{4.11}$$

o

$$\lambda = \frac{MU_{x_1}}{p_1} = \frac{MU_{x_2}}{p_2} = \cdots = \frac{MU_{x_n}}{p_n}.$$

Esta ecuación afirma que, en el punto de maximización de la utilidad, cada bien adquirido debe ofrecer la misma utilidad marginal por unidad monetaria gastada en ese bien. Por tanto, cada bien debe tener una idéntica razón entre el beneficio (marginal) y el costo (marginal). Si no fuera así, un bien prometería "mayor disfrute marginal por unidad monetaria" que otro bien y los fondos no estarían asignados de forma óptima.

Otra vez advertimos al lector que no debe hablar con mucha confianza sobre la utilidad marginal, pero lo que expresa la ecuación 4.11 es que una unidad monetaria adicional debería producir la misma "utilidad adicional", independientemente del bien en el cual se gaste. El valor común de esta utilidad adicional está dado por el multiplicador lagrangiano de la restricción presupuestaria del consumidor (es decir, por λ). Por tanto, podemos considerar que λ es la utilidad marginal de una unidad monetaria adicional de gasto en consumo (la utilidad marginal de los "ingresos").

Una última forma de escribir las condiciones necesarias para obtener un máximo es

$$p_i = \frac{MU_{x_i}}{\lambda} \tag{4.12}$$

para cada bien i que es adquirido. Para interpretar esta ecuación, piense en una situación en la cual la utilidad marginal de la persona derivada del ingreso (λ) es constante dentro de cierto intervalo. En consecuencia, las variaciones de precio que debe pagar por el bien i (p_i) están en proporción directa con la utilidad extra que obtiene de ese bien. Por tanto, en el margen, el precio del bien refleja la disposición de la persona a pagar por una unidad más. Este resultado tiene mucha importancia en la economía aplicada al bienestar, porque podemos inferir la disposición a pagar con base en las reacciones del mercado ante los precios. En el capítulo 5 se verá cómo se puede utilizar esta información para evaluar los efectos que los cambios de precios tienen en el bienestar y, en capítulos posteriores, se utilizará esta idea para explicar una serie de cuestiones relacionadas con la eficiencia de la asignación de recursos.

Soluciones de esquina

Las condiciones de primer orden de las ecuaciones 4.8 se cumplen exactamente sólo cuando existen máximos interiores en los cuales el individuo adquiere una cantidad positiva de cada bien. Como vimos en el capítulo 2, cuando surgen soluciones de esquina (como las que muestra la figura 4.4), entonces se tiene que modificar ligeramente las condiciones.[4] En este caso, las ecuaciones 4.8 son

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i \leq 0\ (i = 1 \ldots n), \tag{4.13}$$

y si

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i < 0, \tag{4.14}$$

entonces

$$x_i = 0. \tag{4.15}$$

[4]Formalmente, estas condiciones se conocen como condiciones "Kuhn-Tucker" en la programación no lineal.

Para interpretar estas condiciones, podemos volver a escribir la ecuación 4.14 como

$$p_i > \frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{\lambda} = \frac{MU_{x_i}}{\lambda}. \tag{4.16}$$

Por tanto, las condiciones para el óptimo son las mismas que antes, excepto que un bien cualquiera, cuyo precio (p_i) sea mayor que su valor marginal para el consumidor (MU_{x_i}/λ) no será adquirido ($x_i = 0$). Así pues, los resultados matemáticos confirman la idea, de sentido común, de que los individuos no comprarán aquellos bienes que consideran que no valen lo que cuestan. Si bien las soluciones de esquina no constituyen uno de los puntos esenciales del análisis de este libro, el lector debe recordar la posibilidad de que surja este tipo de soluciones, así como la interpretación económica que puede dar a las condiciones óptimas en estos casos.

EJEMPLO 4.1

Funciones de demanda Cobb-Douglas

Como se demostró en el capítulo 3, la función de utilidad Cobb-Douglas está dada por la expresión

$$U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}, \tag{4.17}$$

donde, por comodidad,[5] suponemos que $\alpha + \beta = 1$. Ahora podemos resolver la ecuación para calcular los valores de x y y que maximizan la utilidad en el caso de cualesquier precios (p_x, p_y) e ingresos (I). Si escribimos la expresión lagrangiana

$$\mathscr{L} = x^{\alpha}y^{\beta} + \lambda(I - p_x y - p_y y) \tag{4.18}$$

se obtendrán las condiciones de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} &= \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} &= \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} - \lambda p_y = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= I - p_x x - p_y y = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Si se toma el cociente de los dos primeros términos se obtendrá

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y} \tag{4.20}$$

o

$$p_y y = \frac{\beta}{\alpha} p_x x = \frac{1-\alpha}{\alpha} p_x x, \tag{4.21}$$

donde se obtiene la ecuación final porque $\alpha + \beta = 1$. La sustitución de la condición de primer orden en la ecuación 4.21 en la restricción presupuestaria produce

$$I = p_x x + p_y y = p_x x + \frac{1-\alpha}{\alpha} p_x x = p_x x\left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} p_x x; \tag{4.22}$$

[5]Nótese que siempre podemos normalizar los exponentes de la función de utilidad Cobb-Douglas para que sumen uno porque $U^{1/(\alpha+\beta)}$ es una transformación monótona.

y al resolver para x se obtiene

$$x^* = \frac{\alpha I}{p_x}; \tag{4.23}$$

y un conjunto similar de operaciones daría

$$y^* = \frac{\beta I}{p_y}. \tag{4.24}$$

Estos resultados demuestran que un individuo cuya función de utilidad está dada por la ecuación 4.17 siempre optará por asignar un porcentaje α de su ingreso a adquirir el bien x (es decir, $p_x x/I = \alpha$) y un porcentaje β a comprar el bien y ($p_y y/I = \beta$). Si bien esta característica de la función Cobb-Douglas suele facilitar mucho la resolución de problemas sencillos, también sugiere que la función es limitada a la hora de explicar el comportamiento real del consumo. Dado que la proporción de ingresos dedicada a determinados bienes suele cambiar significativamente en respuesta a variaciones de las condiciones económicas, una forma funcional más general puede ofrecer perspectivas que no ofrece la función Cobb-Douglas. En el ejemplo 4.2 ilustramos algunas posibilidades y tratamos con más detalle el tema general de las porciones del presupuesto en la sección de ampliaciones de este capítulo.

Ejemplo numérico. Sin embargo, primero veamos un ejemplo numérico específico para el caso de una función Cobb-Douglas. Supongamos que x tiene un precio de venta de \$1, que y tiene un precio de \$4 y que el ingreso total asciende a \$8. Así, sucintamente, supongamos que $p_x = 1$, $p_y = 4$, $I = 8$. Supongamos también que $\alpha = \beta = 0.5$ de forma que este individuo distribuye su ingreso en partes iguales entre estos dos bienes. Ahora, las ecuaciones de demanda 4.23 y 4.24 implican

$$\begin{aligned} x^* &= \alpha I/p_x = 0.5I/p_x = 0.5(8)/1 = 4 \\ y^* &= \beta I/p_y = 0.5I/p_y = 0.5(8)/4 = 1 \end{aligned} \tag{4.25}$$

y, para estas elecciones óptimas,

$$\text{Utilidad} = x^{0.5}y^{0.5} = (4)^{0.5}(1)^{0.5} = 2. \tag{4.26}$$

Nótese también que podemos calcular el valor del multiplicador lagrangiano asociado a esta asignación de los ingresos mediante la ecuación 4.19:

$$\lambda = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}/p_x = 0.5(4)^{-0.5}(1)^{0.5}/1 = 0.25 \tag{4.27}$$

Este valor implica que cada pequeña variación de los ingresos incrementará la utilidad aproximadamente en una cuarta parte de esa cantidad. Por ejemplo, supongamos que esta persona tuviera 1% más de ingresos (\$8.08). En tal caso, escogería $x = 4.04$ y $y = 1.01$, y la utilidad sería $4.04^{0.5} \cdot 1.01^{0.5} = 2.02$. Por tanto, un incremento de \$0.8 en los ingresos incrementa la utilidad 0.02, tal como predice el hecho de que $\lambda = 0.25$.

Pregunta: ¿Un cambio de p_y afectará la cantidad de x demandada en la ecuación 4.23? Explique su respuesta matemáticamente. También presente una explicación intuitiva a partir del concepto de que la porción de los ingresos dedicados al bien y está dada por el parámetro β de la función de utilidad.

EJEMPLO 4.2

Demanda CES

Para ilustrar los casos en los cuales las porciones del presupuesto responden a las circunstancias económicas, veamos tres ejemplos concretos de la función de CES.

Caso 1. δ = 5. En este caso la utilidad es

$$U(x, y) = x^{0.5} + y^{0.5}. \tag{4.28}$$

Si escribimos la expresión lagrangiana

$$\mathscr{L} = x^{0.5} + y^{0.5} + \lambda\,(I - p_x x - p_y y) \tag{4.29}$$

se obtendrán las siguientes condiciones de primer orden para el máximo:

$$\begin{aligned} \partial\mathscr{L}/\partial x &= 0.5x^{-0.5} - \lambda p_x = 0 \\ \partial\mathscr{L}/\partial y &= 0.5y^{-0.5} - \lambda p_y = 0 \\ \partial\mathscr{L}/\partial \lambda &= I - p_x x - p_y y = 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

La división de las dos primeras muestra que

$$(y/x)^{0.5} = p_x/p_y. \tag{4.31}$$

Al sustituir esta expresión en la restricción presupuestaria y utilizar ciertas operaciones algebraicas, podemos derivar las funciones de demanda asociadas a esta función de utilidad:

$$x^* = I/p_x[1 + (p_x/p_y)] \tag{4.32}$$

$$y^* = I/p_y[1 + (p_y/p_x)]. \tag{4.33}$$

Respuesta a los precios. Nótese que en estas funciones de demanda la porción de los ingresos que el individuo gasta, por ejemplo, en el bien x es decir, $p_x x/I = 1/[1 + (p_x/p_y)]$ no es constante, sino que depende de la proporción de los precios p_x/p_y. Cuanto más alto sea el precio relativo de x, tanto menor será la porción de los ingresos que gaste en ese bien. En otras palabras, la demanda de x responde tanto a su propio precio, que un incremento de éste reduce el gasto total en x. También podemos ilustrar el hecho de que la demanda de x es muy sensible a su precio si comparamos el exponente implícito de p_x en la función de demanda dada por la ecuación 4.32 (–2) con la de la ecuación 4.23 (–1). En el capítulo 5 se analizará esta observación con más detalle cuando veamos detenidamente el concepto de elasticidad.

Caso 2. δ = –1. Por otra parte, veamos una función de demanda con menos posibilidad de sustitución que la Cobb-Douglas. Si δ = –1, entonces la función de utilidad está dada por

$$U(x, y) = -x^{-1} - y^{-1}, \tag{4.34}$$

y resulta fácil demostrar que las condiciones de primer orden para el máximo exigen que

$$y/x = (p_x/p_y)^{0.5}. \tag{4.35}$$

De nuevo, la sustitución de esta condición en la restricción presupuestaria, junto con ciertas operaciones algebraicas, permite obtener las funciones de la demanda

$$\begin{aligned} x^* &= I/p_x\,[1 + (p_y/p_x)^{0.5}] \\ y^* &= I/p_y[1 + (p_x/p_y)^{0.5}]. \end{aligned} \tag{4.36}$$

[6]Una forma de medir la posibilidad de sustitución es mediante la elasticidad de sustitución, que para la función CES está dada por σ = 1/(1 – δ). Aquí δ = 0.5 implica que σ = 2, δ = 0 (la Cobb-Douglas) implica que σ = 1 y δ = –1 implica que σ = 0.5. Véase también la explicación de las funciones CES con relación a la teoría de la producción en el capítulo 7.

Podemos ver de dos maneras el hecho de que estas funciones de la demanda sean menos sensibles al precio. En primer lugar, ahora la proporción de los ingresos que el individuo gasta en el bien x —$p_x x/I = 1/[1 + (p_y/p_x)^{0.5}]$— responde positivamente a incrementos de p_x. A medida que aumenta el precio de x este individuo sólo reduce modestamente el consumo del bien x, por lo cual el gasto total en ese bien aumenta. El hecho de que las funciones de la demanda de las ecuaciones 4.36 sean menos sensibles al precio que la Cobb-Douglas también queda ilustrado por los exponentes relativamente pequeños del propio precio de cada bien (–0.5).

Caso 3. $\delta = -\infty$. Éste es el importante caso en el cual el individuo debe consumir x y y en proporciones fijas. Por ejemplo, supongamos que debe consumir cada unidad de y al mismo tiempo que 4 unidades exactas de x. La función de utilidad que representa esta situación es

$$U(x, y) = Min(x, 4y). \tag{4.37}$$

En esta situación, la persona que maximiza la utilidad sólo optará por combinaciones de los dos bienes en las cuales $x = 4y$; es decir, la maximización de la utilidad implica que esta persona optará por colocarse en el vértice de sus curvas de indiferencia con forma de L. Si se sustituye esta condición en la ecuación de la restricción presupuestaria se obtendrá

$$I = p_x x + p_y y = p_x x + p_y \frac{x}{4} = (p_x + 0.25p_y)x. \tag{4.38}$$

Por tanto,

$$x^* = \frac{I}{p_x + 0.25p_y} \tag{4.39}$$

y sustituciones similares darán

$$y^* = \frac{I}{4p_x + p_y}. \tag{4.40}$$

En este caso, la porción del presupuesto de la persona dedicado, por decir, al bien x aumenta con rapidez a medida que el precio de x aumenta, porque debe consumir x y y en proporciones fijas. Por ejemplo, si se utilizan los valores asumidos en el ejemplo 4.1 ($p_x = 1$, $p_y = 4$, $I = 8$), entonces las ecuaciones 4.39 y 4.40 predecirían que $x^* = 4$, $y^* = 1$ como antes, la persona gastaría la mitad de sus ingresos en cada uno de los bienes. En cambio, si se utiliza $p_x = 2$, $p_y = 4$, $I = 8$ entonces se obtendrá $x^* = 8/3$, $y^* = 2/3$ y esta persona gastaría $2/3\left(= \frac{p_x x}{I} = \frac{2 \cdot 8/3}{8}\right)$ de sus ingresos en el bien x. Si probamos algunas otras cifras, ello sugerirá que la parte de los ingresos dedicada a x se acerca a 1 a medida que x aumenta.[7]

Pregunta: ¿Las variaciones de los ingresos afectan las porciones del gasto en alguna de las funciones CES analizadas aquí? ¿El comportamiento de las porciones del gasto cómo se relaciona con la naturaleza homotética de esta función?

[7]Analizaremos estas relaciones de la función CES con más detalle en el problema 4.9 y en la ampliación A4.3.

Función de utilidad indirecta

Los ejemplos 4.1 y 4.2 ilustran el principio de que, en el caso de un problema de maximización de la utilidad con restricciones, muchas veces podemos manipular las condiciones de primer orden para calcular los valores óptimos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Por lo general, estos valores óptimos dependerán de los precios de todos los bienes y de los ingresos del individuo. Es decir,

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= x_1\,(p_1, p_2, \ldots, p_n, I)\\
x_2^* &= x_2\,(p_1, p_2, \ldots, p_n, I)\\
&\vdots\\
x_n^* &= x_n\,(p_1, p_2, \ldots, p_n, I).
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

En capítulos posteriores se analizará con más detalle este conjunto de *funciones de demanda,* que muestran que la cantidad de cada x_i demandada depende de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y de I. Aquí se utilizaron los valores óptimos de las x de la ecuación 4.42 para sustituirlas en la función de utilidad inicial y se obtiene

$$\textbf{utilidad máxima} = U(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \tag{4.42}$$

$$= V(p_1, p_2, \ldots, p_n, I). \tag{4.43}$$

En palabras, diríamos que ante el deseo del individuo de maximizar su utilidad, dada la restricción presupuestaria, el nivel óptimo de utilidad que puede alcanzar dependerá *indirectamente* de los precios de los bienes que compra y de su ingreso. La función de utilidad indirecta V refleja esta dependencia. Si el ingreso o los precios cambiaran, entonces el nivel de utilidad que puede alcanzar el individuo también se vería afectado. En la teoría del consumidor y en otros muchos contextos, a veces podemos utilizar este planteamiento indirecto para estudiar cómo los cambios de las circunstancias económicas afectan distintos tipos de resultados, como la utilidad o (más adelante en este libro) los costos de las empresas.

Principio de la suma única

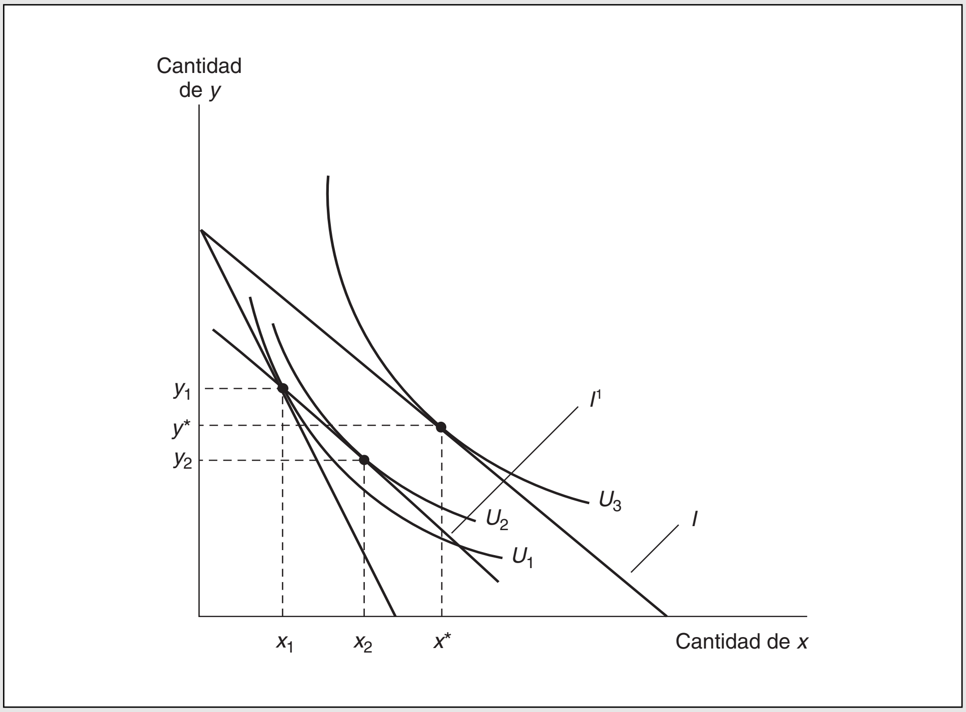
Muchos planteamientos económicos se derivan del reconocimiento de que, al final de cuentas, la utilidad depende de los ingresos de los individuos y de los precios que afrontan. De ellos, uno de los más importantes es el llamado principio de la suma única, el cual ilustra que los impuestos aplicados sobre el poder adquisitivo general de una persona son mejores que los impuestos sobre bienes específicos. Un planteamiento relacionado dice que las entregas de ingresos generales a personas que tienen ingresos bajos incrementará más la utilidad que un monto similar de dinero destinado a subsidiar bienes específicos. El aspecto intuitivo de este resultado se deriva directamente de la hipótesis de la maximización de la utilidad; es decir, un subsidio o un impuesto sobre la renta deja a la persona en libertad para decidir cómo asignar los ingresos que finalmente tiene. Por otra parte, los subsidios o impuestos en bienes específicos disminuyen el poder adquisitivo de la persona y distorsionan sus elecciones, porque los precios artificiales entran en estos planes. En consecuencia, los subsidios y los impuestos generales sobre la renta son preferibles cuando la eficiencia es un criterio importante de la política social.

La figura 4.5 ilustra el principio de la suma única aplicado a la tributación. Inicialmente, esta persona tiene I ingresos y opta por consumir la combinación x^*, y^*. Un impuesto sobre el bien x aumentaría su precio y la elección que maximiza la utilidad pasaría a la combinación x_1, y_1. La recaudación fiscal sería $t \cdot x_1$ (donde t es la tasa fiscal sobre el bien x). Por otra parte, un impuesto sobre la renta que llevara la restricción presupuestaria hacia dentro, a I' también reuniría esta misma cantidad de tributación.[8] No obstante, la utilidad proporcionada por el impuesto sobre la renta (U_2) es superior al que proporciona el impuesto tan sólo sobre x (U_1). Por tanto, hemos demostrado que el peso de utilidad del impuesto sobre la renta es menor. Podemos usar un argumento similar para ilustrar la superioridad de las dotaciones de ingresos para subsidiar bienes específicos.

[8]Dado que $I = (p_x + t)x_1 + p_y y_1$, tenemos que $I' = I - tx_1 = p_x x_1 + p_y y_1$ que muestra que la restricción presupuestaria con un impuesto sobre la renta de igual monto también pasa por el punto x_1, y_1.

FIGURA 4.5 **Principio del impuesto de suma única**

Un impuesto sobre el bien x llevaría la elección que maximiza la utilidad de x^*, y^* a x_1, y_1. Un impuesto sobre la renta que recaudara el mismo monto llevaría la restricción presupuestaria a I^1. La utilidad sería más alta (U_2) con el impuesto sobre la renta que con el impuesto tan sólo sobre x (U_1).



Utilidad indirecta y el principio de la suma única

En este ejemplo, utilizamos el concepto de la función de utilidad indirecta para ilustrar el principio de la suma única aplicada a la tributación. Primero tenemos que derivar las funciones de utilidad indirecta de dos casos ilustrativos.

Caso 1. La función Cobb-Douglas. En el ejemplo 4.1 se demostró que para la función de utilidad Cobb-Douglas con $\alpha = \beta = 0.5$ las compras óptimas son

$$x^* = \frac{I}{2p_x}$$
$$y^* = \frac{I}{2p_y} \qquad \textbf{(4.44)}$$

De modo que la función de utilidad indirecta en este caso es

$$V(p_x, p_y, I) = U(x^*, y^*) = (x^*)^{0.5}(y^*)^{0.5} = \frac{I}{2p_x^{0.5}p_y^{0.5}}. \qquad \textbf{(4.45)}$$

Nótese que cuando $p_x = 1$, $p_y = 4$, $I = 8$, entonces tenemos $V = \frac{8}{2 \cdot 1 \cdot 2} = 2$ que es la utilidad que calculamos antes para esta misma situación.

(*continúa*)

EJEMPLO 4.3 ***CONTINUACIÓN***

Caso 2. Proporciones fijas. En el tercer caso del ejemplo 4.2 vimos que

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{I}{p_x + 0.25p_y} \\ y^* &= \frac{I}{4p_x + p_y} \end{aligned} \tag{4.46}$$

Por tanto, en este caso, la utilidad indirecta está determinada por

$$\begin{aligned} V(p_x, p_y, I) &= Min(x^*, 4y^*) = x^* = \frac{I}{p_x + 0.25p_y} \\ &= 4y^* = \frac{4}{4p_x + p_y} = \frac{I}{p_x + 0.25p_y} \end{aligned} \tag{4.47}$$

en donde la utilidad indirecta $p_x = 1$, $p_y = 4$, $I = 8$ está dada por $V = 4$, que es lo que calculamos antes.

El principio de la suma única. Veamos primero la posibilidad de usar el caso Cobb-Douglas para ilustrar el principio de la suma única. Supongamos que el gobierno aplicara un impuesto de \$1 sobre el bien x. La ecuación 4.45 muestra que, en este caso, la utilidad indirecta disminuiría de 2 a 1.41 [$= 8/(2 \cdot 2^{0.5} \cdot 2)$]. Como esta persona elige $x^* = 2$ con el impuesto, la recaudación total del impuesto será \$2. Por tanto, un impuesto sobre la renta igual a la recaudación reduciría el ingreso neto a \$6 y la utilidad indirecta sería 1.5 [$= 6/(2 \cdot 1 \cdot 2)$]. En consiguiente, el impuesto sobre la renta muestra una clara mejoría en comparación con el caso en el que sólo grava x. El impuesto sobre el bien x disminuye la utilidad por dos razones, a saber: disminuye el poder adquisitivo de la persona y sesga sus elecciones, alejándolas del bien x. Con el impuesto sobre la renta sólo se siente el primer efecto, de modo que el impuesto es más eficiente.[9]

El caso de las proporciones fijas sustenta esta conclusión intuitiva. En este caso, un impuesto de \$1 sobre el bien x reduciría la utilidad indirecta de 4 a 8/3 [$= 8/(2+1)$]. En este caso $x^* = 8/3$ la recaudación fiscal sería \$8/3. Un impuesto sobre la renta que recaudara \$8/3 dejaría al consumidor con \$16/3 de ingresos netos y, esos ingresos, le proporcionarían una utilidad indirecta de $V = 8/3\left[= \dfrac{16/3}{1+1}\right]$. Por tanto, la utilidad después de impuestos es la misma con el impuesto sobre la renta que con el impuesto sobre el consumo. La razón por la cual el resultado de la suma única no aparece en este caso es que con una utilidad de proporciones fijas, el impuesto sobre el consumo no distorsiona las elecciones porque las preferencias son muy rígidas.

Pregunta: Las dos funciones de utilidad ilustradas muestran que si duplicamos los ingresos y todos los precios, la utilidad indirecta no sufriría cambio alguno. Explique por qué cabe esperar que esta propiedad sea válida para todas las funciones de utilidad indirecta.

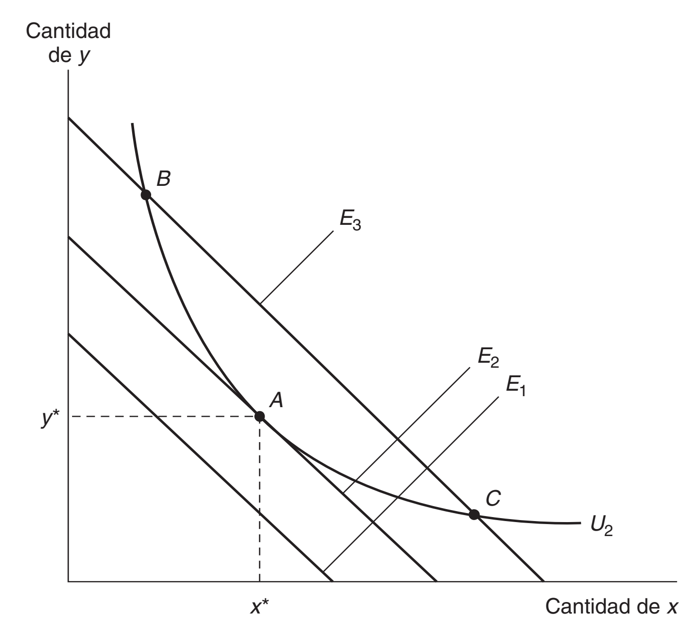
[9]Esta explicación supone que los impuestos sobre la renta no tienen efectos de incentivo, supuesto que probablemente no es muy válido.

Minimización del gasto

En el capítulo 2 señalábamos que muchos problemas de maximización con restricciones conllevan a un problema "dual" de minimización con restricciones. En el caso de la maximización de la utilidad, el problema dual de la minimización trata de asignar los ingresos de tal modo que podamos alcanzar un determinado nivel de utilidad con el gasto mínimo. Este problema es, evidentemente, análogo al problema primario de maximización de la utilidad, pero los objetivos y las restricciones se revierten. La figura 4.6 ilustra este problema dual de la minimización del gasto. En el mismo, el individuo debe alcanzar el nivel de utilidad U_2, que ahora constituye la restricción del problema. La figura muestra tres cantidades posibles de gasto (E_1, E_2 y E_3) como tres rectas de "restricción presupuestaria". El nivel de gasto E_1 es, evidentemente, demasiado bajo para alcanzar U_2, y, por tanto, no puede resolver el problema dual. Con el nivel de gasto dado por E_3, el individuo puede alcanzar U_2 (en el punto B o en el C), pero este nivel de gasto mínimo no es el nivel buscado. Por el contrario, E_2 ofrece claramente el gasto total justo suficiente para alcanzar U_2 (en el punto A), y, de hecho, ésta es la solución al problema dual. Si se comparan las figuras 4.2 y 4.6 es evidente que tanto el planteamiento inicial de maximización de la utilidad como el planteamiento dual de minimización del gasto ofrecen la misma solución (x^*, y^*); es decir, simplemente son formas alternativas de ver el mismo proceso. No obstante, el planteamiento de la minimización del gasto muchas veces es más útil porque podemos observar los gastos directamente, mientras que no podemos hacer lo mismo con la utilidad.

FIGURA 4.6 **El problema dual de la minimización del gasto**

El problema dual de la maximización de la utilidad consiste en alcanzar un determinado nivel de utilidad (U_2) con gastos mínimos. Un nivel de gasto de E_1 no permite que un individuo alcance U_2 mientras que E_3 requiere un poder adquisitivo superior al estrictamente necesario. Con el gasto E_2 este individuo puede alcanzar exactamente U_2 consumiendo x^* y y^*.



Una formulación matemática

En términos más formales, el problema dual de la minimización del gasto del individuo consiste en elegir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de modo que pueda minimizar

$$\textbf{gastos totales} = E = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n, \tag{4.48}$$

sujeto a la restricción

$$\textbf{utilidad} = \bar{U} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.49}$$

La cantidad óptima de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que se elija en este problema dependerá de los precios de los diversos bienes ($p_1, p_2, \ldots, p_n$) y del nivel de utilidad requerido $\bar{U}_2$. Si alguno de los precios cambiara o si el individuo tuviera otro "objetivo" de utilidad, entonces otro paquete de bienes sería el óptimo. Una *función gasto* resumiría esta relación.

DEFINICIÓN

Función gasto. La función gasto del individuo muestra el gasto mínimo necesario para alcanzar un determinado nivel de utilidad dado un conjunto de precios determinado. Es decir,

$$\textbf{gasto mínimo} = E(p_1, p_2, \ldots, p_n, U). \tag{4.50}$$

Esta definición muestra que la función gasto y la función de la utilidad indirecta son funciones inversas (compare las ecuaciones 4.49 y 4.50). Ambas funciones dependen de los precios de mercado, pero incluyen distintas restricciones (ingreso o utilidad). En el siguiente capítulo se verá que esta relación resulta muy útil porque permite analizar la teoría de cómo reaccionan los individuos ante variaciones de los precios. Sin embargo, primero veamos dos funciones gasto.

Dos funciones gasto

Podemos calcular la función gasto de dos maneras. El primer método, y el más sencillo, es expresar el problema de minimización del gasto de manera directa y aplicar la técnica lagrangiana. Algunos de los problemas al final de este capítulo le piden que haga eso precisamente. Sin embargo, aquí adoptaremos un procedimiento más ágil, aprovechando la relación entre las funciones gasto y las funciones de utilidad indirecta. Dado que estas dos funciones son inversas, el cálculo de una de ellas facilita enormemente el cálculo de la otra. No obstante, en el ejemplo 4.3, ya hemos calculado las funciones de utilidad indirecta para dos casos importantes. Recuperar las funciones gasto asociadas es simple cuestión de álgebra.

Caso 1. Función de utilidad Cobb-Douglas. La ecuación 4.45 muestra que la función de utilidad indirecta Cobb-Douglas en el caso de dos bienes es

$$V(p_x, p_y, I) = \frac{I}{2p_x^{0.5}p_y^{0.5}} \tag{4.51}$$

Si se intercambia el papel de la utilidad (que ahora trataremos como una constante denotada por U) y los ingresos (que ahora llamaremos "gastos", E, y que trataremos como una función de los parámetros de este problema), se obtendrá la función gasto:

$$E(p_x, p_y, U) = 2p_x^{0.5}p_y^{0.5}U. \tag{4.52}$$

Si se compara esto con nuestros resultados, ahora hemos utilizado una meta de utilidad de $U = 2$ y, de nueva cuenta, $p_x = 1$, $p_y = 4$. Con estos parámetros, la ecuación 4.52 predice que los gastos mínimos requeridos son \$8 ($= 2 \cdot 1^{0.5} \cdot 4^{0.5} \cdot 2$). No es extraño que el problema original de la maximización de la utilidad y su dual de la minimización del gasto sean formalmente idénticos.

Caso 2. Proporciones fijas. En el caso de las proporciones fijas, la ecuación 4.47 presentaba la función de utilidad indirecta como

$$V(p_x, p_y, I) = \frac{I}{p_x + 0.25p_y}. \tag{4.53}$$

Si de nueva cuenta se intercambia el papel de la utilidad y los gastos, de inmediato se obtiene la función gasto:

$$E(p_x, p_y, U) = (p_x + 0.25\, p_y)U. \tag{4.54}$$

Un repaso de los valores hipotéticos utilizados en el ejemplo 4.3 ($p_x = 1$, $p_y = 4$, $U = 4$) de nueva cuenta muestra que costaría \$8 ($= (1 + 0.25 \cdot 4) \cdot 4$) para alcanzar una meta de utilidad de 4.

Compensación de un cambio de precio. Estas funciones gasto permiten investigar cómo se podría compensar a una persona por un cambio de precio. En concreto, suponga que el precio del bien y aumentara de \$4 a \$5. Esto, claramente, disminuiría la utilidad de la persona, por lo cual podríamos preguntar qué monto compensatorio de dinero podría mitigar el daño. Dado que la función gasto permite mantener constante la utilidad, ésta ofrece un cálculo directo de dicho monto. En concreto, en el caso Cobb-Douglas, se tendría que aumentar el gasto de \$8 a \$8.94 ($= 2 \cdot 1 \cdot 5^{0.5} \cdot 2$) para ofrecer un poder adquisitivo que compense en forma exacta este aumento de precio. Con proporciones fijas, tendríamos que aumentar el gasto de \$8 a \$9 para compensar el aumento de precio. Por tanto, las compensaciones son prácticamente iguales en estos casos sencillos.

No obstante, existe una importante diferencia entre los dos ejemplos. En el caso de las proporciones fijas, la compensación de \$1 permite que esta persona regrese al paquete de consumo que tenía ($x = 4$, $y = 1$). Éste es el único camino para restaurar la utilidad a $U = 4$ en el caso de esta persona con preferencias rígidas. No obstante, en el caso Cobb-Douglas, la persona no utilizará la compensación extra para retornar a su viejo paquete de consumo. En cambio, para maximizar su utilidad, tendrá que asignar \$8.94, de modo que $x = 4.47$, $y = 0.894$. Esto seguirá proporcionando a esta persona un nivel de utilidad de $U = 2$, pero ahora gastará menos en el bien y que es más caro.

Pregunta: ¿Cuál es la compensación que necesita una persona ante la disminución de un precio? ¿Cuál es la compensación que requeriría si el precio del bien y disminuyera de \$4.00 a \$3.00?

Propiedades de las funciones gasto

Dado que las funciones gasto son muy usuales en la economía aplicada, es conveniente entender algunas de las propiedades que comparten todas estas funciones. A continuación se analizan tres de estas propiedades. Todas ellas se derivan directamente del hecho de que las funciones gasto están fundadas en la maximización individual de la utilidad.

1. *Homogeneidad:* En el caso de las dos funciones que ilustra el ejemplo 4.4., la duplicación de todos los precios duplicará precisamente el valor de los gastos requeridos. Técnicamente, estas funciones gasto son "homogéneas de grado uno" en todos los precios.[10] Ésta es

[10]Como vimos en el capítulo 2, decimos que la función $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es homogénea de grado k si $f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. En este caso, $k = 1$.

una propiedad general de las funciones gasto. Dado que la restricción presupuestaria del individuo es lineal en el caso de los precios, todo aumento proporcional en los precios y en el poder adquisitivo permitirá que la persona adquiera el mismo paquete de bienes que maximiza la utilidad y que elegía antes de que aumentaran los precios. En el capítulo 5 veremos que, por este motivo, las funciones de demanda son homogéneas de grado cero en todos los precios y el ingreso.

2. *Las funciones gasto no son decrecientes en precios:* Podemos resumir sucintamente esta propiedad con la expresión matemática

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} \geq 0 \text{ para todo bien, } i. \tag{4.55}$$

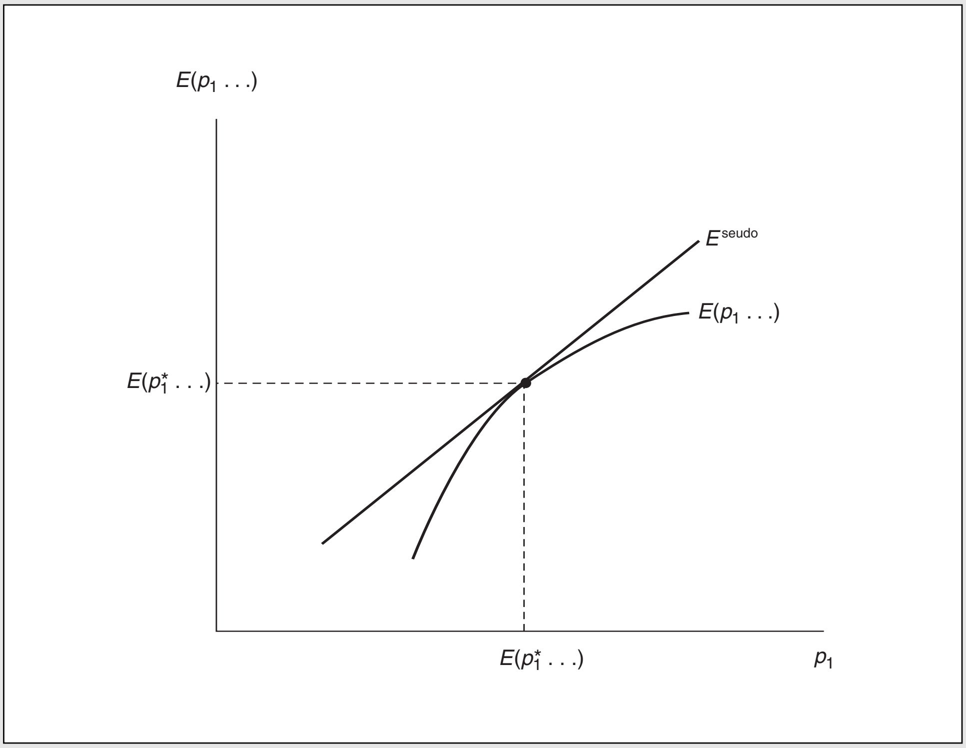
La intuición nos dice que esto es evidente. Dado que la función gasto presenta el gasto mínimo necesario para llegar a un determinado nivel de utilidad, cualquier aumento de precio debe aumentar este mínimo. Dicho en términos más formales, supongamos que p_1 tiene dos valores: p_1^a *y* p_1^b y *que* $p_1^b > p_1^a$ sin cambio alguno en todos los demás precios entre los estados *a* y *b*. Asimismo, supongamos que *x* es el paquete de bienes adquiridos en el estado *a,* y que *y* es el adquirido en el estado *b*. De acuerdo con la definición de la función gasto, estos dos paquetes de bienes deben proporcionar la misma utilidad meta. Está claro que el paquete *y* cuesta más con los precios del estado *b* que lo que costaría con los precios del estado *a*. Sin embargo, sabemos que el paquete *x* es el camino que tiene costos más bajos para alcanzar al nivel de utilidad meta con los precios del estado *a*. Por tanto, el gasto en el paquete *y* debe ser superior al gasto en el paquete *x*. Asimismo, una disminución de precio no debe incrementar el gasto.

3. *Las funciones gasto son cóncavas en los precios:* En el capítulo 2 se dijo que las funciones cóncavas eran funciones que siempre quedan debajo de sus tangentes. Si bien las condiciones matemáticas técnicas que describen estas funciones son complicadas, es relativamente sencillo demostrar la aplicación del concepto a las funciones gasto si se analiza la variación de un solo precio. La figura 4.7 muestra los gastos de un individuo como función de un solo precio, p_1. Al precio inicial, p_1^*, los gastos de esta persona están dados por $E(p_1^* \ . \ . \ .)$. Ahora consideremos los precios que están por encima o por debajo de p_1^*. Si esta persona siguiera comprando el mismo paquete de bienes, los gastos aumentarían o disminuirían linealmente a medida que el precio fuera cambiando. Esto daría lugar a la función de seudo gasto de la figura E^{seudo}. Esta línea muestra un nivel de gastos que permitiría que esta persona comprara el paquete original de bienes no obstante el valor cambiante de p_1. Si esta persona, como parecería probable, ajustara sus compras a medida que p_1 va cambiando, entonces sabemos (debido a la minimización del gasto) que los gastos reales estarán por debajo de estas seudo cantidades. Por tanto, la función gasto real, *E,* estará siempre debajo de E^{seudo} y la función será cóncava.[11] La concavidad de la función gasto es una propiedad muy útil para una serie de aplicaciones, especialmente con la relacionada con la interpretación de números de índices (véanse las ampliaciones del capítulo 5).

[11]Un resultado de la concavidad es que $f_{ii} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_i^2} \leq 0$. Esto es precisamente lo que muestra la figura 4.7.

FIGURA 4.7 **Las funciones gasto son cóncavas en los precios**

En p_1^* esta persona gasta $E(p_1^* \ . \ . \ .)$. Si continúa comprando el mismo conjunto de bienes a medida que p_1 cambia, los gastos estarían dados por E^{seudo}. Dado que es muy probable que sus patrones de consumo cambien a medida que p_1 va cambiando, los gastos reales serán más bajos.



RESUMEN

En este capítulo hemos analizado el modelo económico básico de la maximización de la utilidad, sujeto a una restricción presupuestaria. Si bien se ha abordado el problema de diversas maneras, todos estos planteamientos llevan al mismo resultado básico:

- Para alcanzar un máximo con restricciones, un individuo tendría que gastar todos sus ingresos disponibles y que elegir un paquete de bienes de tal modo que la *TMS* entre dos bienes sea igual a la tasa de los precios de mercado de dichos bienes. Esta tangencia básica hará que el individuo iguale la tasa de la utilidad marginal al precio de mercado de cada uno de los bienes que consume de hecho. Este resultado es común a la mayor parte de los problemas de optimización con restricciones.

- Sin embargo, las condiciones de tangencia son tan sólo condiciones de primer orden para alcanzar un máximo con restricciones. Para garantizar que estas condiciones también sean suficientes, el mapa de curvas de indiferencia del individuo debe exhibir una *TMS* decreciente. En términos formales, la función de utilidad debe ser estrictamente cuasi cóncava.

- Además, debemos modificar las condiciones de tangencia para dar cabida a soluciones de esquina, en las cuales el nivel óptimo de consumo de algunos bienes es igual a cero. En este caso, la tasa de la utilidad marginal respecto al precio de este bien estará por abajo de la proporción común del beneficio marginal al costo marginal de los bienes que adquiera de hecho.

- Una consecuencia del supuesto de la maximización de la utilidad con restricciones es que las elecciones óptimas del individuo dependerán, implícitamente, de los parámetros de la restricción presupuestaria. Es decir, las elecciones observadas serán funciones implícitas de todos los precios y los ingresos. Por tanto, la utilidad también puede ser una función indirecta de estos parámetros.

- El problema dual de la maximización de la utilidad con restricciones consiste en minimizar el gasto necesario para alcanzar determinada meta de utilidad. Si bien este planteamiento dual ofrece la misma solución óptima que el problema original de maximización con restricciones, también ofrece nuevas perspectivas de la teoría de la elección. En concreto, este planteamiento genera funciones gasto en las cuales el ingreso necesario para alcanzar determinada meta de utilidad depende de los precios de mercado de los bienes. Por tanto, en principio, las funciones gasto son mensurables.

PROBLEMAS

4.1

Pablo, que cursa el tercer año de primaria, almuerza en el colegio todos los días. Sólo le gustan los pastelillos Twinki (t) y las bebidas de sabores (s), que le proporcionan una utilidad de

$$\textbf{utilidad} = U(t, s) = \sqrt{ts}.$$

a. Si los pastelillos cuestan \$0.10 cada uno y la bebida \$0.25 por vaso, ¿Pablo cómo debe gastar el dólar que le da su madre para maximizar su utilidad?

b. Si el colegio trata de que los niños no consuman Twinkies y aumenta su precio a \$0.40, ¿cuánto dinero más tendrá la madre que darle a Pablo para que conserve el mismo nivel de utilidad que tenía en el inciso a?

4.2

a. Un joven, amante de los buenos vinos, tiene \$300 que gastará para tener una pequeña bodega. Le gustan dos en particular: un caro Bordeaux francés de 1997 (w_F) que cuesta \$20 por botella y un vino californiano, más barato, de 1993 (w_C) que cuesta \$4. ¿Cuántas botellas de cada tipo debe comprar si su utilidad está dada por la siguiente función?

$$U(w_F, w_C) = w_F^{2/3} w_C^{1/3}$$

b. Cuando acude a la vinatería, el joven enólogo descubre que el precio del Bordeaux francés ha disminuido a \$10 la botella debido a que el valor del franco francés ha disminuido también. Si el precio del vino californiano permanece estable a \$4 por botella, ¿nuestro amigo cuántas botellas de cada vino debe comprar para maximizar su utilidad en estas nuevas condiciones?

c. Explique por qué este amante de los vinos está en mejor posición en el inciso b que en el inciso a. ¿Usted cómo asignaría un valor monetario a este incremento de su utilidad?

4.3

a. Una noche, J.P. decide consumir cigarros (c) y brandy (b) siguiendo la función

$$U(c, b) = 20c - c^2 + 18b - 3b^2.$$

¿Cuántos cigarros y copas de brandy consume esa noche? (Su costo no es obstáculo para J.P.)

b. Sin embargo, recientemente, los médicos han aconsejado a J.P. que limite a 5 su consumo de cigarros y brandy. ¿Cuántas copas de brandy y cuántos cigarros consumirá en estas nuevas circunstancias?

4.4

a. El Sr. B disfruta de los bienes x y y de acuerdo con la función de utilidad

$$U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Maximice la utilidad del Sr. B si $p_x = \$3$, $p_y = \$4$, y tiene \$50 para gastar.

Pista: En este caso tal vez sea más fácil maximizar U^2 que U. ¿Al hacerlo, por qué no cambiarían los resultados?

b. Dibuje la curva de indiferencia del Sr. B y su punto de tangencia dada la restricción de su presupuesto. ¿Qué dice la gráfica sobre el comportamiento del Sr. B? ¿Ha encontrado usted un auténtico máximo?

4.5

El Sr. A obtiene utilidad de los martinis (m) en función de la cantidad que bebe:

$$U(m) = m.$$

Sin embargo, el Sr. A es muy quisquilloso con sus martinis: sólo le gustan los preparados con una proporción exacta de dos partes de ginebra (g) y una de vermouth (v). Por tanto, podemos volver a escribir la función de utilidad del Sr. A como

$$U(m) = U(g, v) = \text{mín}\left(\frac{g}{2}, v\right).$$

a. Dibuje la curva de indiferencia del Sr. A en términos de g y v para diversos niveles de utilidad. Muestre que, independientemente de los precios de los dos ingredientes, el Sr. A nunca alterará la forma en que mezcla los martinis.

b. Calcule las funciones de demanda de g y v.

c. Partiendo de los resultados del inciso b, ¿cuál es la función de utilidad indirecta del Sr. A?

d. Calcule la función gasto del Sr. A y, para cada nivel de utilidad, muestre el gasto como una función de p_g y p_v.

Pista: Dado que este problema implica una función de utilidad de proporciones fijas, usted no podrá utilizar el cálculo para resolver las decisiones que maximizan la utilidad.

4.6

Suponga que un adicto a la comida rápida obtiene utilidad de tres bienes: bebidas (x), hamburguesas (y), y helados (z) de acuerdo con la función de utilidad Cobb-Douglas

$$U(x, y, z) = x^{0.5}\, y^{0.5}\, (1 + z)^{0.5}.$$

Suponga también que los precios de estos bienes están dados por $p_x = 0.25$, $p_y = 1$ y $p_z = 2$ y que los ingresos de este consumidor están dados por $I = 2$.

a. Demuestre que para $z = 0$, la maximización de la utilidad da por resultado las mismas elecciones óptimas que el ejemplo 4.1. Demuestre también que una elección que dé por resultado $z > 0$ (incluso una fracción de z) reduce la utilidad respecto a este óptimo.

b. ¿Usted cómo explicaría el hecho de que $z = 0$ es un óptimo en este caso?

c. ¿Los ingresos de este individuo qué tan altos deben ser para que pueda comprar una cantidad z cualquiera?

4.7

En el ejemplo 4.1 vimos la función de utilidad Cobb-Douglas $U(x, y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$ donde $0 \leq \alpha \leq 1$. Este problema ilustra unos cuantos atributos más de esa función.

a. Calcule la función de utilidad indirecta para este caso Cobb-Douglas.

b. Calcule la función gasto para este caso.

c. Demuestre, explícitamente, la forma en que la compensación requerida para equilibrar el efecto de un aumento del precio de x está relacionado con el tamaño del exponente α.

4.8

El principio de la suma única ilustrado en la figura 4.5 se puede aplicar tanto a la política de transferencias como a la tributación. Este problema analiza la aplicación del principio.

a. Utilice una gráfica similar a la figura 4.5 para demostrar que una dotación de ingresos a una persona proporciona más utilidad que un subsidio para el bien x, que le cuesta la misma cantidad de dinero al gobierno.

b. Utilice la función gasto Cobb-Douglas que presentamos en la ecuación 4.52 para calcular la cantidad extra de poder adquisitivo que necesita esta persona para incrementar su utilidad de $U = 2$ a $U = 3$.

c. Utilice la ecuación 4.52 de nueva cuenta para calcular el grado en que el gobierno debe subsidiar el bien x para incrementar la utilidad de esta persona de $U = 2$ a $U = 3$. ¿Cuánto le costaría este subsidio al gobierno? ¿Compare este costo con el costo que calculó en el inciso b?

d. El problema 4.7 le pide que compare una función gasto para una función de utilidad Cobb-Douglas más general que la utilizada en el ejemplo 4.4. Utilice esa función gasto para contestar, de nueva cuenta, los incisos b y c en el caso donde $\alpha = 0.3$; es decir, una cifra cercana a la fracción de los ingresos que las personas de bajos ingresos gastan en alimentos.

e. ¿Cómo habrían cambiado sus cálculos para este problema si, hubiéramos utilizado la función gasto, en cambio, para un caso de proporciones fijas (ecuación 4.54)?

4.9

La función de utilidad con ESC general está dada por

$$U(x, y) = \frac{x^{\delta}}{\delta} + \frac{y^{\delta}}{\delta}.$$

a. Demuestre que las condiciones de primer orden para una utilidad máxima con restricción con esta función exige que los individuos elijan los bienes en la proporción

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{\delta - 1}}.$$

b. Demuestre que el resultado del inciso a implica que los individuos asignarán sus fondos a partes iguales entre x y y en el caso Cobb-Douglas ($\delta = 0$), tal como hemos demostrado antes en varios problemas.

c. ¿La proporción $p_x x/p_y y$ cómo depende del valor de δ? Explique sus resultados basándose en la intuición. (Para más detalles sobre esta función, véase la ampliación A4.3.)

d. Utilice la técnica lagrangiana para derivar la función gasto para este caso.

4.10

Suponga que los individuos necesitan determinada cantidad de alimentos (x) para sobrevivir y que esta cantidad es igual a x_0. Una vez adquirida la cantidad x_0 los individuos obtienen utilidad de los alimentos y de otros bienes (y) de acuerdo con la fórmula

$$U(x, y) = (x - x_0)^{\alpha} y^{\beta}$$

donde $\alpha + \beta = 1$.

a. Demuestre que si $I > p_x x_0$ el individuo maximizará su utilidad gastando $\alpha(I - p_x x_0) + p_x x_0$ en el bien x y $\beta(I - p_x x_0)$ en el bien y. Interprete este resultado.

b. En este problema, ¿las proporciones $p_x x/I$ y $p_y y/I$ cómo varían a medida que aumenta el ingreso? (Véase también la ampliación.)

LECTURAS RECOMENDADAS

Barten, A. P. y Volker Böhm. "Consumer Theory", en K. J. Arrow y M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics,* vol. II, North-Holland, Amsterdam, 1982.

Las secciones 10 y 11 contienen resúmenes muy compactos de muchos de los conceptos que hemos visto en este capítulo.

Deaton, A. y J. Muelbauer. *Economics and Consumer Behavior,* Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

La sección 2.5 presenta un buen tratamiento geométrico de los conceptos de dualidad.

Dixit, A. K. *Optimization in Economic Theory,* Oxford University Press, Oxford, 1990.

El capítulo 2 contiene varios análisis lagrangianos que se concentran en la función de utilidad Cobb-Douglas.

Hicks, J. R. *Value and Capital,* Clarendon Press, Oxford, 1946.

El capítulo II y el apéndice de matemáticas ofrecen algunas sugerencias básicas de la importancia que tiene la función gasto.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory,* Oxford University Press, Oxford, 1995.

El capítulo 3 analiza a fondo las funciones de utilidad de gasto.

Samuelson, Paul A. *Foundations of Economic Analysis,* Harvard University Press, Cambridge, 1947.

El capítulo 5 y el apéndice A presentan un análisis sucinto de las condiciones de primer orden para alcanzar el máximo de utilidad. El apéndice cubre atinadamente las condiciones de segundo orden.

Silberberg, E. y W. Suen. *The Stricture of Economics: A Mathematical Analysis,* 3a. ed., Irwin/McGraw-Hill, Boston, 2001.

Un útil, pero un tanto complicado tratado de la dualidad en la teoría del consumidor.

Theil, H. *Theory and Measurement of Consumer Demand,* North-Holland, Amsterdam, 1975.

Magnífico resumen de la teoría básica de la demanda y sus implicaciones para los cálculos empíricos.

AMPLIACIONES

Porciones del presupuesto

Ernst Engel, el economista del siglo XIX, fue uno de los primeros científicos sociales que estudió a fondo los patrones de gasto reales de la gente. Se concentró en específico en el consumo de alimentos. Su hallazgo de que la fracción de los ingresos que las personas gastan en alimentos disminuye a medida que sus ingresos aumenten ahora se conoce como la ley de Engel y ha sido confirmada por numerosos estudios. La ley de Engel es tan regular empíricamente que algunos economistas han sugerido que la pobreza se mida con base en la fracción de los ingresos destinados a alimentos. Otras dos aplicaciones interesantes son: 1) el estudio de Hayashi (1995) que muestra la porción de los ingresos destinada a los alimentos que prefieren las personas mayores es mucho mayor en los hogares que incluyen a dos generaciones que en los que sólo incluyen a una generación y 2) los resultados de los países menos desarrollados de Behrman (1989) demuestran que los deseos de las personas por una dieta más variada a medida que sus ingresos aumentan, de hecho, puede dar por resultado que disminuya la fracción de los ingresos gastados en nutrientes concretos. En la parte restante de esta ampliación se analizarán algunas pruebas de la porción de los presupuestos (denotada por $s_i = p_i x_i / I$) con algo más de teoría sobre el tema.

A4.1 Variabilidad de las porciones del presupuesto

La tabla A4.1 muestra algunos datos recientes de las porciones del presupuesto de Estados Unidos. En la tabla, la ley de Engels salta a la vista; es decir, a medida que los ingresos de las familias aumentan, éstas gastan una porción mucho menor de sus fondos en alimentos. Otras variaciones importantes de la tabla son la porción decreciente de los ingresos que gastan en necesidades de servicios médicos y la porción mucho mayor de los ingresos que las personas de ingresos altos dedican a instrumentos para su jubilación. Es interesante señalar que las porciones de los ingresos que destinan a vivienda y transporte son bastante constantes dentro de los rangos de ingresos que muestra la tabla; es decir, las personas con ingresos altos aparentemente compran casas y autos más grandes a medida que sus ingresos aumentan.

Las porciones variables del ingreso de la tabla A4.1 ilustran por qué la función de utilidad de Cobb-Douglas no es especialmente útil para es-

TABLA A4.1 **Porciones del presupuesto de los hogares estadounidenses, 2001**

	Ingresos anuales		
	\$10 000-\$14 999	**\$30 000-\$39 999**	**Más de \$70 000**
Rubro del gasto			
Alimento	16.5	14.3	11.9
Vivienda	19.8	17.6	18.3
Servicios públicos, luz y combustible	9.7	7.5	5.0
Transporte	17.1	21.3	18.2
Seguro médico	4.1	3.1	1.7
Otros gastos de salud	4.6	3.1	2.1
Entretenimiento (inclusive alcohol)	4.9	5.5	6.1
Tabaco	1.3	1.0	0.4
Educación	1.3	0.8	1.8
Seguro y pensiones	3.4	8.4	15.2
Otros (ropa, cuidado personal, otros gastos de vivienda y varios)	17.3	17.2	19.2

FUENTE: *Consumer Expenditure Report,* 2001, sitio Web de Bureau of Labor Statistics en: http://www.bls.gov.

tudios empíricos detallados del comportamiento de los hogares. Cuando la utilidad está dada por $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$ las ecuaciones de demanda implícitas son $x = \alpha I/p_x$ y $y = \beta I/p_y$. Por tanto,

$$s_x = p_x x/I = \alpha \text{ y}$$
$$s_y = p_y y/I = \beta \tag{i}$$

y las porciones del presupuesto son constantes para todos los niveles de ingreso y los precios relativos observados. Dada esta falla, los economistas han investigado la posibilidad de estudiar otra serie de fórmulas para la función de utilidad que permitan mayor flexibilidad.

A4.2 Sistema lineal del gasto

Una generalización de la función Cobb-Douglas, que incorpora la idea de que el individuo debe comprar ciertas cantidades mínimas de cada bien (x_0, y_0) es la función de utilidad

$$U(x, y) = (x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta \tag{ii}$$

para valores de $x \geq x_0$ y de $y \geq y_0$ y de nuevo con $\alpha + \beta = 1$.

Podemos derivar funciones de demanda de esta función de utilidad de manera análoga al caso Cobb-Douglas si introducimos el concepto del ingreso supernumerario (I^*), que representa la cantidad de poder adquisitivo remanente tras comprar el paquete

$$I^* = I - p_x x_0 - p_y y_0. \tag{iii}$$

Por tanto, si se utiliza esta notación, las funciones de demanda son

$$x = (p_x x_0 + \alpha I^*)/p_x \tag{iv}$$
$$y = (p_y y_0 + \beta I^*)/p_y$$

Así, en este caso, cuando el individuo ha adquirido el paquete mínimo, después gasta una porción constante del ingreso supernumerario en cada bien. La manipulación de la ecuación vi ofrece las ecuaciones de las porciones:

$$s_x = \alpha + (\beta p_x x_0 - \alpha p_y y_0)/I \tag{v}$$
$$s_y = \beta + (\alpha p_y y_0 - \beta p_x x_0)/I,$$

que muestran que este sistema de demanda no es homotético. El análisis de la ecuación v muestra el resultado, nada extraño, de que la porción del presupuesto destinada a un bien guarda una relación positiva con la cantidad mínima que los individuos necesitan de ese bien y una negativa con la cantidad mínima del otro bien que requieren. Dado que este concepto de las compras necesarias aparentemente concuerda bien con la observación del mundo real, este sistema lineal del gasto, desarrollado inicialmente por Stone (1954), es muy utilizado en los estudios empíricos.

Compras tradicionales

Una de las aplicaciones más interesantes del SLG consiste en analizar cómo el concepto de las compras necesarias varía a medida que cambian las circunstancias. Por ejemplo, Oczkowski y Philip (1994) estudian cómo el acceso a los bienes modernos de consumo puede afectar la porción de los ingresos que los individuos de las economías en transición dedican a los artículos locales tradicionales. Demuestran que los habitantes de Papúa, Nueva Guinea, disminuyen estas porciones sustancialmente a medida que van teniendo más acceso a los bienes extranjeros. Por tanto, algunas mejoras, como mejores carreteras para trasladar los bienes, representan una de las principales vías que provocan el deterioro de las prácticas culturales tradicionales.

E4.3 Utilidad con CES

En el capítulo 3 se introdujo la función de utilidad con CES

$$U(x, y) = \frac{x^\delta}{\delta} + \frac{y^\delta}{\delta} \tag{vi}$$

para $\delta \leq 1$, $\delta \neq 0$. La principal aplicación de esta función consiste en mostrar las distintas posibilidades de sustitución (tal y como quedan reflejadas por el parámetro δ). Las porciones del presupuesto implícitas en esta función de utilidad ofrecen una serie de ideas. La manipulación de las condiciones de primer orden para maximizar la utilidad con restricciones, con una función con CES, produce las ecuaciones de las porciones

$$s_x = 1/[1 + (p_y/p_x)^K] \tag{vii}$$
$$s_y = 1/[1 + (p_x/p_y)^K]$$

donde $K = \delta/(\delta - 1)$.

La naturaleza homotética de la función con CES queda reflejada por el hecho de que estas expresiones de las porciones dependen únicamente de la razón de precios, p_x/p_y. El comportamiento de las porciones en respuesta a las variaciones de los precios relativos depende del valor del parámetro K. Para el caso Cobb-Douglas, $\delta = 0$ por lo que $K = 0$ y $s_x = s_y = ½$. Cuando $\delta > 0$, las posibilidades de sustitución son mayores y $K < 0$. En este caso, la ecuación vii muestra que s_x y p_x/p_y se mueven en direcciones opuestas. Si p_x/p_y aumenta, el individuo sustituye y por x hasta el punto que s_x disminuye. De otra parte, si $\delta < 0$, las posibilidades de sustitución son limitadas, $K > 0$ y s_x y p_x/p_y se mueven en la misma dirección. En este caso, un incremento de p_x/p_y sólo provoca una pequeña sustitución de y por x, y s_x de hecho aumenta debido al precio relativamente más alto del bien x.

Libre comercio en América del Norte

Los economistas suelen usar las funciones de demanda con CES en modelos informáticos de equilibrio general a gran escala (véase el capítulo 12) para evaluar el efecto de grandes cambios económicos. Dado que el modelo de CES destaca que las porciones responden a variaciones de los precios relativos, resulta particularmente adecuado para fijarnos en innovaciones como las variaciones de la política impositiva o las restricciones al comercio internacional, donde es bastante probable que varíen los precios relativos. Un campo de la investigación que ha adquirido importancia recientemente ha sido el efecto del Tratado de Libre Comercio de América del Norte, que incluye a Canadá, México y Estados Unidos. En general, estos modelos concluyen que cabe esperar que todos los países implicados ganen con el Tratado, pero que México podría ganar más porque sus precios relativos registrarán las mayores variaciones. Kehoe y Kehoe (1995) presentan una serie de modelos de equilibrio calculable que los economistas han utilizado para realizar estas evaluaciones[1]

[1]Se hablará con más detenimiento de las investigaciones sobre el Tratado de Libre Comercio de América del Norte en las ampliaciones del capítulo 12.

Referencias

Behrman, Jere R. "Is Variety the Spice of Life? Implications for Caloric Intake", *Review of Economics and Statistics*, noviembre de 1989, pp. 666-672.

Green, H. A. *Consumer Theory*, Londres: The Macmillan Press, 1976.

Hyashi, Fumio. "Is the Japanese Extended Family Altruistically Linked? A Test Based on Engel Curves", *Journal of Political Economy*, junio de 1995, pp. 661-674.

Kehoe, Patrick J. y Timothy J. Kehoe. *Modeling North American Economic Integration*, Klower Academic Publishers, Londres, 1995.

Oczkowski, E. y N. E. Philip. "Household Expenditure Patterns and Access to Consumer Goods in a Transitional Economy", *Journal of Economic Development*, junio de 1994, pp. 165-183.

Stone, R. "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis", *The Economic Journal*, septiembre de 1954, pp. 511-527.

Capítulo 5

EFECTO INGRESO Y EFECTO SUSTITUCIÓN

En este capítulo utilizaremos el modelo de maximización de la utilidad para estudiar cómo el cambio de precio de un bien afecta la cantidad de éste que escogerá un individuo. Este análisis permitirá construir la curva de demanda del individuo para ese bien. En el proceso se presentará una serie de ideas sobre la naturaleza de esta respuesta a los precios y sobre el tipo de supuestos que sustentan la mayor parte de los análisis de la demanda.

Funciones de demanda

Como señalamos en el capítulo 4, en principio normalmente será posible resolver las condiciones necesarias para maximizar la utilidad para los niveles óptimos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (y λ, el multiplicador lagrangiano) como funciones de todos los precios y del ingreso. Matemáticamente, podemos expresar lo anterior como n funciones de demanda con la fórmula

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1(p_1, p_2, \ldots p_n, I) \\ x_2^* &= x_2(p_1, p_2, \ldots p_n, I) \\ &\vdots \\ x_n^* &= x_n(p_1, p_2, \ldots p_n, I). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Si sólo hay dos bienes (x y y —el caso que habitualmente nos ocupará—), podemos simplificar un poco esta notación como

$$\begin{aligned} x^* &= x(p_x, p_y, I) \\ y^* &= y(p_x, p_y, I). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Una vez que conocemos la fórmula de estas funciones de demanda y los valores de todos los precios y los ingresos, entonces se podrán utilizar para "predecir" la cantidad de cada bien que esta persona decidirá comprar. La notación subraya que los precios y los ingresos son "exógenos" al proceso; es decir, son parámetros que el individuo no controla en absoluto en esta etapa del análisis. Las variaciones de los parámetros, evidentemente, cambiarán la restricción presupuestaria y ello llevará a la persona a optar por otras elecciones. Esta cuestión es el enfoque de este capítulo y del siguiente. En concreto, en este capítulo se analizarán las derivadas parciales $\partial x/\partial I$ y $\partial x/\partial p_x$ para un bien arbitrario cualquiera, x. El capítulo 6 ampliará la explicación analizando los efectos "cruzados de precios" de la fórmula $\partial x/\partial p_y$ para un par arbitrario de bienes, x y y.

Homogeneidad

Una primera propiedad de las funciones de demanda requiere algo de matemáticas. Si duplicáramos todos los precios y los ingresos (de hecho, si los multiplicáramos todos por una constante positiva), las cantidades óptimas demandadas no sufrirían cambio alguno. La duplicación de todos los precios y los ingresos sólo cambia las unidades que utilizamos para contar, pero no la cantidad "real" demandada de los bienes. Podemos ver este resultado de distintas maneras, aun cuando la más fácil sería un planteamiento gráfico. Si nos referimos de nueva cuenta a las figuras 4.1 y 4.2, podremos ver con claridad que si duplicamos p_x, p_y o I, no se afecta la gráfica de la restricción presupuestaria. Por tanto, x^*, y^* seguirán siendo la combinación elegida. $p_x x + p_y y = I$ es la misma restricción que $2p_x x + 2p_y y = 2I$. De una forma un poco más técnica, podemos escribir este resultado diciendo que para un bien cualquiera x_i,

$$x_i^* = x_i\,(p_1, p_2, \ldots p_n, I) = x_i\,(tp_1, tp_2, \ldots tp_n, tI) \tag{5.3}$$

para una $t > 0$ cualquiera. Decimos que las funciones que obedecen a la propiedad ilustrada en la ecuación 5.3 son homogéneas de grado cero.[1] Por tanto, hemos demostrado que las *funciones de demanda individuales son homogéneas de grado cero en todos los precios y los ingresos.* La variación de todos los precios y los ingresos en las mismas proporciones no afectará las cantidades materiales de bienes demandadas. Este resultado demuestra que (en teoría) las demandas de los individuos no se verán afectadas por una inflación "pura" en la cual todos los precios y los ingresos aumentan proporcionalmente. Los individuos seguirán demandando el mismo paquete de bienes. Por supuesto que, si la inflación no es pura (es decir, si algunos precios aumentan con más rapidez que otros), el caso sería otro.

EJEMPLO 5.1

Homogeneidad

La homogeneidad de la demanda es un resultado directo del supuesto de maximización de la utilidad. Las funciones de demanda derivadas de la maximización de la utilidad serán homogéneas y, por el contrario, las funciones de demanda que no son homogéneas no podrán reflejar la maximización de la utilidad (a no ser que los precios aparezcan en la función de utilidad misma, como el caso de los bienes que se demandan por esnobismo). Por ejemplo, si la utilidad que un individuo obtiene de los alimentos (x) y la vivienda (y) está determinada por

$$\text{utilidad} = U(x, y) = x^{0.3}y^{0.7}, \tag{5.4}$$

y derivar las funciones de demanda es una cuestión muy sencilla (siguiendo el procedimiento aplicado en el ejemplo 4.1)

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{0.3I}{p_x} \\ y^* &= \frac{0.7I}{p_y} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Estas funciones muestran una homogeneidad evidente; es decir, la duplicación de todos los precios y los ingresos no alterarían x^* ni tampoco y^*.

En cambio, si las x y y que prefieren los individuos estuvieran reflejadas por la función CES:

$$U(x, y) = x^{0.5} + y^{0.5}, \tag{5.6}$$

[1]En términos más generales, como vimos en el capítulo 2, decimos que una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es homogénea de grado k si $f(tx_1, tx_2 \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para una $t > 0$ cualquiera. Los casos más frecuentes de funciones homogéneas son $k = 0$ y $k = 1$. Si f es homogénea de grado cero, la duplicación de todos sus argumentos no altera en forma alguna el valor de f. Si f es homogénea de grado 1, entonces la duplicación de todos sus argumentos duplicará el valor de f.

entonces, demostramos en el ejemplo 4.2 que las funciones de demanda están determinadas por:

$$
\begin{aligned}
x^* &= \left(\frac{1}{1 + p_x/p_y}\right) \cdot \frac{I}{p_x} \\
y^* &= \left(\frac{1}{1 + p_y/p_x}\right) \cdot \frac{I}{p_y}.
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Al igual que antes, estas dos funciones de demanda son homogéneas de grado cero; es decir, la duplicación de p_x, p_y e I no afectaría a x^* ni y^*.

Pregunta: ¿Las funciones de demanda derivadas en este ejemplo garantizan que el gasto total en x y y agotará los ingresos del individuo para una *combinación cualquiera* de p_x, p_y e I? ¿Puede demostrar que es así?

Variaciones en el ingreso

A medida que el poder adquisitivo de un individuo aumenta, es natural esperar que la cantidad que adquirirá de cada bien también aumente. La figura 5.1 ilustra esta situación. A medida que los gastos aumentan de I_1 a I_2 a I_3, la cantidad demandada de x aumenta de x_1 a x_2 a x_3. Además, la cantidad de y aumenta de y_1 a y_2 a y_3. Nótese que las rectas del presupuesto I_1, I_2 e I_3 son todas paralelas, lo cual refleja el hecho de que sólo están cambiando los ingresos, pero no los precios relativos de x y y. Dado que la proporción p_x/p_y permanece constante, las condiciones para maximizar la utilidad también requieren que la *TMS* permanezca constante a medida que el individuo pasa a niveles más altos de utilidad. Por tanto, la *TMS* es la misma en el punto (x_3, y_3) que en (x_1, y_1).

Bienes normales y bienes inferiores

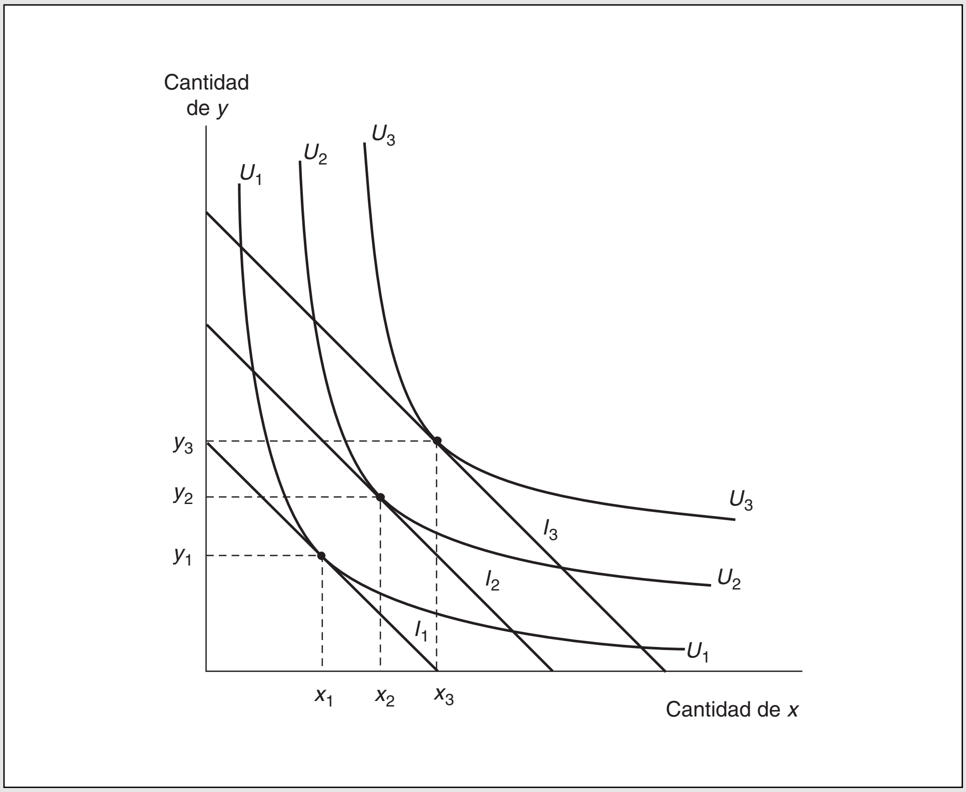
En la figura 5.1, tanto x como y aumentan a medida que los ingresos aumentan; es decir, $\partial x/\partial I$ y $\partial y/\partial I$ son positivas las dos. Cabe considerar que ésta es la situación habitual, por lo cual se dice que los bienes que tienen esta propiedad son *bienes normales* para el intervalo de variación de los ingresos que estamos observando.

Sin embargo, en el caso de algunos bienes, la cantidad elegida puede disminuir a medida que los ingresos aumentan en algunos intervalos. Algunos ejemplos de estos bienes son el alcohol barato, el transporte público y la ropa de segunda mano. Decimos que un bien z en cuyo caso $\partial z/\partial I$ es negativa, es un *bien inferior*. La figura 5.2 ilustra este fenómeno. En ese diagrama, el bien z es inferior porque, para los incrementos de los ingresos en el intervalo mostrado, el individuo elige, de hecho, menos cantidad de z. Nótese que las curvas de indiferencia no necesariamente deben tener una forma "extraña" para que exhiban inferioridad; es decir, en la figura 5.2, las curvas correspondientes a los bienes y y z siguen cumpliendo el supuesto de una *TMS* decreciente. El bien z es inferior debido a la forma en que se relaciona con los demás bienes disponibles (en este caso el bien y), y no debido a una peculiaridad del bien. Por tanto, tenemos que establecer las siguientes definiciones:

Bienes inferiores y bienes normales. Un bien x_i para el cual $\partial x_i/\partial I < 0$ en algún intervalo de variación de los ingresos es un *bien inferior* en ese intervalo. Si $\partial x_i/\partial I \geq 0$ dentro de algún intervalo de variación de los ingresos, entonces el bien es un *bien normal,* o "no es inferior" en ese intervalo.

FIGURA 5.1 **Efecto de un incremento de los ingresos en las cantidades elegidas de *x* y *y***

A medida que los ingresos aumentan de I_1 a I_2 a I_3, los sucesivos puntos de tangencia que aumentan muestran las elecciones óptimas (que maximizan la utilidad) de x y y. Nótese que la restricción presupuestaria se desplaza en paralelo porque su pendiente (dada por $-\,p_x/p_y$) no cambia.



Variaciones en el precio de un bien

El efecto que la variación de un precio tiene en la cantidad demandada de un bien es más difícil de analizar que el efecto de una variación en los ingresos. Geométricamente, esto se debe a que la variación de un precio no sólo implica cambiar las intersecciones de la restricción presupuestaria, sino también su pendiente. Por consiguiente, pasar a la nueva elección que maximiza la utilidad implica no sólo pasar a otra curva de indiferencia, sino también una alteración de la *TMS*. Por tanto, cuando un precio cambia, entonces entran en juego dos efectos analíticamente distintos. Uno de ellos es el *efecto sustitución*; es decir, incluso si el individuo se quedara sobre la *misma* curva de indiferencia, los patrones de consumo serían asignados de forma que la *TMS* fuera igual al nuevo cociente de precios. El segundo efecto, el *efecto ingreso*, surge porque una variación del precio afecta necesariamente los ingresos "reales" del individuo; es decir, el individuo no puede permanecer sobre la curva de indiferencia inicial, sino que se debe desplazar a otra distinta. Empezaremos analizando estos efectos gráficamente. Después se presentará el análisis matemático.

Análisis gráfico de una caída del precio

La figura 5.3 ilustra el efecto ingreso y el efecto sustitución. Este individuo maximiza inicialmente su utilidad (sujeto a sus gastos totales, I) consumiendo la combinación x^*, y^*. La restricción inicial del presupuesto es $I = p_x^1\, x + p_y\, y$. Suponga ahora que el precio de x disminuye hasta p_x^2. La nueva restricción presupuestaria está determinada por la ecuación $I = p_x^2\, x + p_y\, y$ en la

FIGURA 5.2 **Un mapa de curvas de indiferencia que refleja la inferioridad**

En este diagrama, el bien z es inferior porque la cantidad adquirida disminuye a medida que aumentan los ingresos. Asimismo, y es un bien normal (como debe ser si sólo hay dos bienes disponibles) y las compras de y aumentan a medida que los gastos totales aumentan.

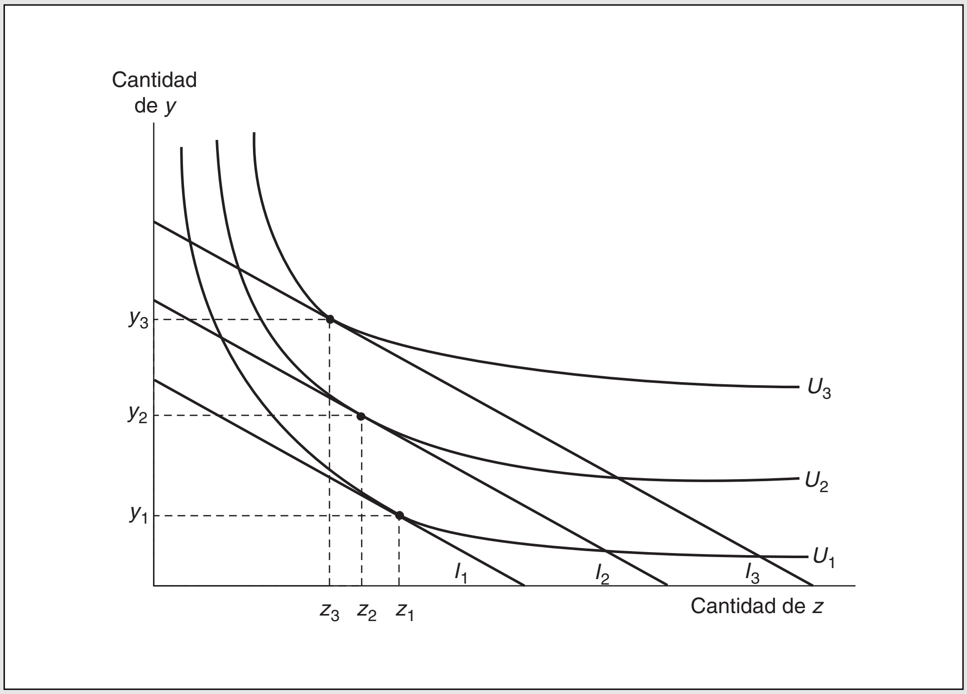
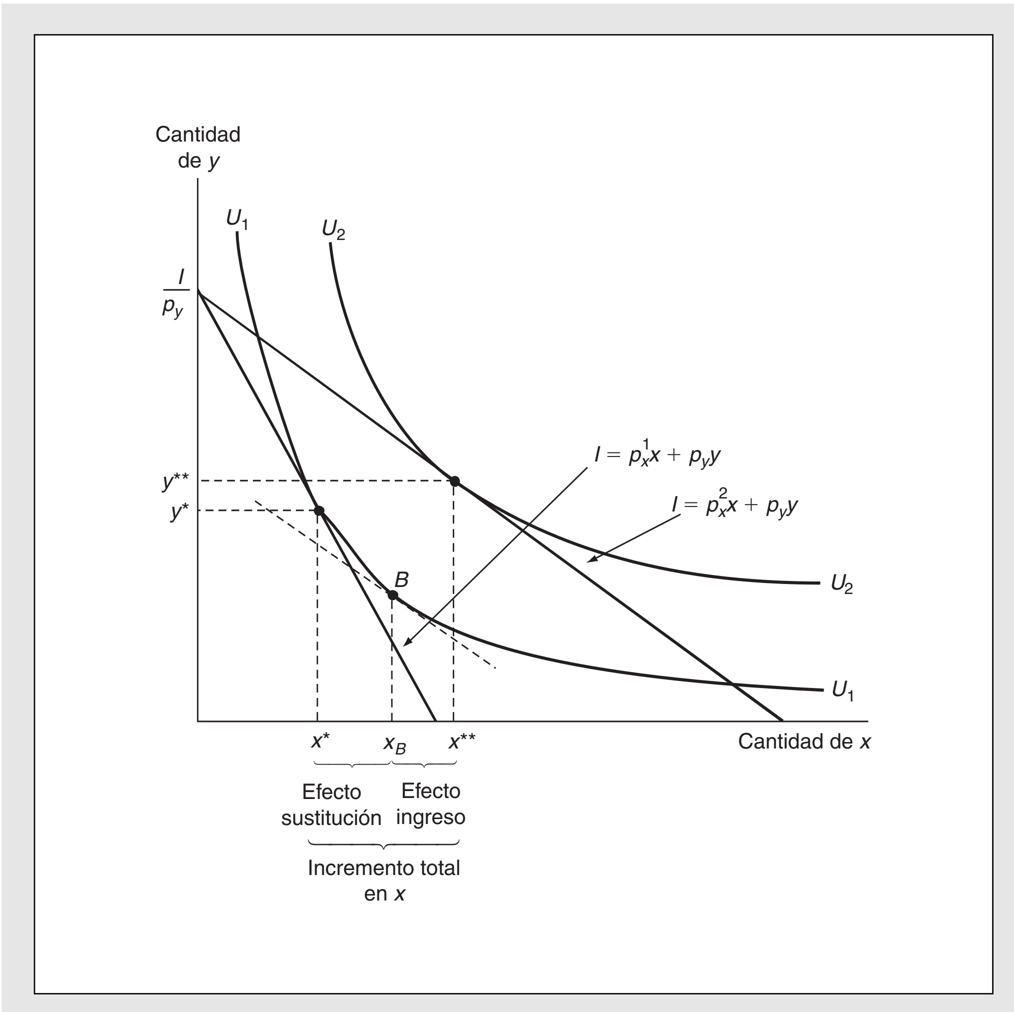


figura 5.3. Es evidente que la nueva posición de la utilidad máxima está en x^{**}, y^{**}, donde la nueva recta del presupuesto es tangente a la curva de indiferencia U_2. Podemos considerar que el movimiento a este nuevo punto está compuesto por dos efectos. En primer término, el cambio de la pendiente de la restricción presupuestaria habría provocado un movimiento al punto B, incluso si las elecciones se hubieran confinado a las de la curva de indiferencia original U_1. La línea de puntos de la figura 5.3 tiene la misma pendiente que la nueva restricción presupuestaria ($I = p_x^2\, x + p_y y$), pero está trazada la tangente a U_1 porque, conceptualmente, estamos manteniendo constante los ingresos "reales" (es decir, la utilidad). Un precio relativamente más bajo de x provoca un movimiento de x^*, y^* a B si no permitimos que este individuo mejore gracias a la reducción del precio. Este movimiento es una demostración gráfica del *efecto sustitución*. El siguiente paso de B al punto óptimo x^{**}, y^{**} es analíticamente idéntico al tipo de cambio mostrado antes para variaciones de los ingresos. Dado que el precio de x ha disminuido, esta persona tiene más ingresos "reales" y puede adquirir un nivel de utilidad (U_2) superior al que podría haber alcanzado previamente. Si x es un bien normal, elegirá más cantidad de x debido a este incremento del poder adquisitivo. Esta observación explica el origen de la expresión *efecto ingreso* para este movimiento. Por tanto, en general, el resultado de una disminución del precio es que provoca una mayor demanda de x.

Es importante señalar que esta persona no llega a pasar de la elección de x^*, y^* a B y después a x^{**}, y^{**}. Nunca observamos el punto B; es decir, sólo se reflejan dos posiciones óptimas en el comportamiento observado. Sin embargo, el concepto del efecto ingreso y el efecto sustitución son analíticamente valiosos porque muestran que una variación del precio afecta la cantidad demandada de x de dos formas conceptualmente distintas. En la teoría de la demanda se verá cómo esta desagregación de los efectos ofrece importantes ideas.

FIGURA 5.3 **Demostración del efecto ingreso y el efecto sustitución de una caída del precio de *x***

Cuando el precio de x cae de p_x^1 a p_x^2, la elección que maximiza la utilidad se desplaza de x^*, y^* a x^{**}, y^{**}. Podemos desagregar este movimiento en dos efectos analíticamente distintos: primero, el efecto sustitución, que implica un movimiento a lo largo de la curva de indiferencia inicial hasta el punto B, donde la *TMS* es igual a los nuevos precios relativos y, segundo, el efecto ingreso, que implica un movimiento a un nivel más alto de utilidad, porque los ingresos reales han aumentado. En el diagrama, el efecto ingreso y el efecto sustitución provocan que el individuo compre una mayor cantidad de x cuando disminuye su precio. Nótese que el punto I/p_y es el mismo que antes de la variación del precio. Esto se debe a que p_y no ha cambiado. Por tanto, el punto I/p_y aparece en la nueva restricción presupuestaria y también en la anterior.

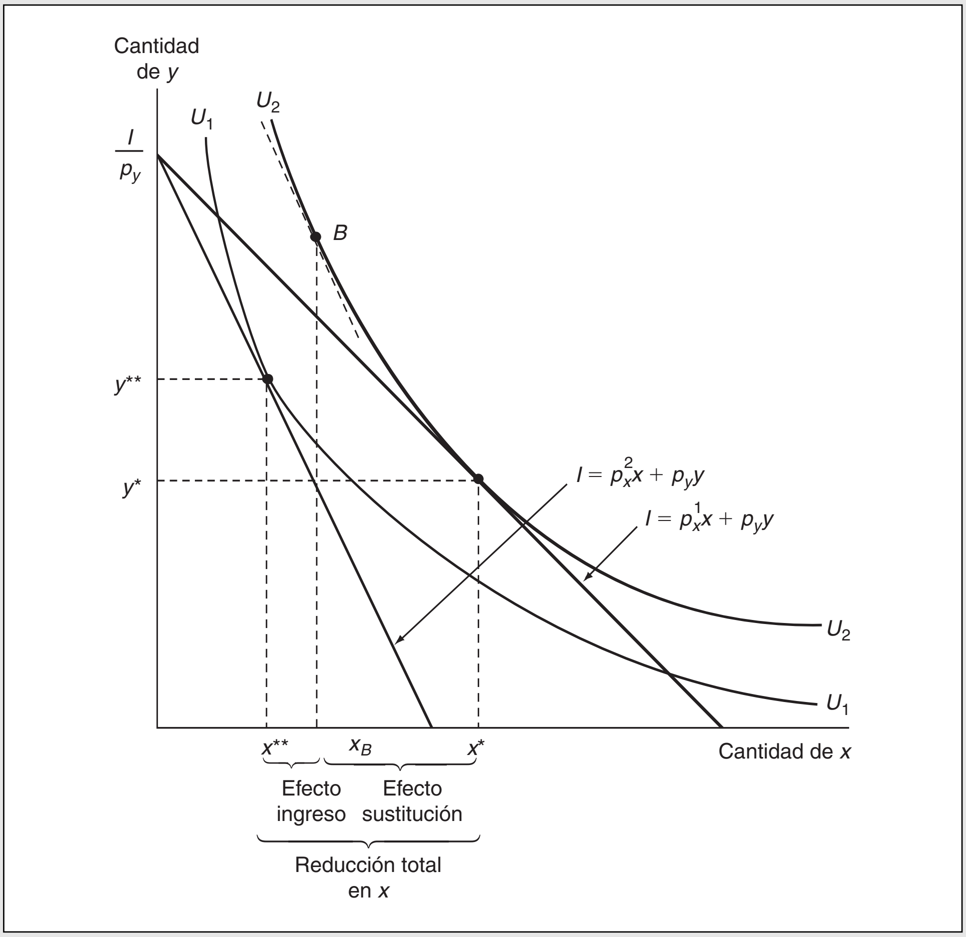


Análisis gráfico de un incremento del precio

Si el precio del bien x aumentara, aplicaríamos el mismo análisis. En la figura 5.4, la recta presupuestaria se ha desplazado hacia dentro debido a un incremento del precio de x de p_x^1 a p_x^2. Podemos desagregar el movimiento del punto inicial de maximización de la utilidad (x^*, y^*) al nuevo punto (x^{**}, y^{**}) en dos efectos. En primer término, incluso si esta persona se pudiera quedar sobre la curva inicial de indiferencia (U_2), seguiría teniendo un incentivo para sustituir y por x y moverse a lo largo de U_2 hasta el punto B. Sin embargo, dado que el aumento del precio de x, ha reducido el poder adquisitivo de la persona, ésta se debe mover a un nivel más bajo de utilidad. Este movimiento también se llama efecto ingreso. En la figura 5.4, nótese que tanto el efecto ingreso como el efecto sustitución operan en el mismo sentido y provocan que disminuya la cantidad demandada de x ante un aumento de su precio.

FIGURA 5.4 **Demostración del efecto ingreso y el efecto sustitución de un incremento del precio de *x***

Cuando el precio de *x* aumenta, la restricción presupuestaria se desplaza hacia dentro. Podemos analizar el movimiento del punto inicial de maximización de la utilidad (x^*, y^*) al nuevo punto (x^{**}, y^{**}) como dos efectos distintos. Describiríamos el efecto sustitución como un movimiento al punto *B* sobre la curva inicial de indiferencia (U_2). Sin embargo, el incremento del precio provocaría una pérdida del poder adquisitivo y un movimiento a una curva de indiferencia más baja. Éste es el efecto ingreso. En el diagrama, tanto el efecto ingreso como el efecto sustitución hacen que disminuya la cantidad demandada de *x* debido al incremento de su precio. De nuevo, el punto I/p_y no se ve afectado por la variación del precio de *x*.



Efectos de las variaciones de los precios de los bienes inferiores

Hasta ahora hemos demostrado que el efecto ingreso y el efecto sustitución tienden a reforzarse el uno al otro. En el caso de una disminución del precio, los dos provocan que los individuos demanden más del bien, mientras que en el caso de un incremento del precio, los dos provocan que demanden menos. Si bien este análisis es válido para el caso de bienes normales (no inferiores), la posibilidad de que existan bienes inferiores complica la historia. En este caso, el efecto ingreso y el efecto sustitución operan en sentido opuesto y el resultado combinado de una variación del precio no es contundente. Por ejemplo, una disminución del precio siempre provocará que un individuo tienda a consumir más de un bien debido al efecto sustitución. Pero, si el bien es inferior, el incremento del poder adquisitivo derivado de la disminución del precio podría llevarle a comprar menos de ese bien. Por tanto, el resultado no es contundente; es decir, el efecto sustitución tiende a aumentar la cantidad que adquirirá del bien inferior, mientras que el efecto ingreso (negativo) tiende a reducir esta cantidad. A diferencia de lo que ocurre con los bienes normales, en este caso no podemos ni siquiera predecir la dirección del efecto que un cambio en p_x tendrá en la cantidad de x consumida.

La paradoja de Giffen

Si el efecto ingreso de la variación de un precio es bastante fuerte, entonces la variación del precio y la resultante variación de la cantidad demandada, de hecho, se podrían mover en el mismo sentido. Cuenta la leyenda que el economista inglés Robert Giffen fue quien observó esta paradoja en la Irlanda decimonónica, observando que cuando el precio de las papas aumentaba, entonces la gente consumía mayor cantidad de éstas. Si se analiza la magnitud del efecto ingreso de una variación del precio de las papas encontraremos la explicación de este peculiar resultado. Las papas no sólo eran bienes inferiores, sino que también se llevaban una parte importante de los ingresos de los irlandeses. Por tanto, un incremento en el precio de las papas reducía sustancialmente sus ingresos reales. Los irlandeses se veían obligados a reducir el consumo de otros alimentos de lujo para poder comprar más papas. A pesar de que este relato de hechos históricos no es muy plausible, la posibilidad de un incremento de la cantidad demandada ante un incremento del precio de un bien ahora se conoce como la *paradoja de Giffen*.[2] Más adelante se presentará un análisis matemático que explica cómo se puede producir la paradoja de Giffen.

Un resumen

Por tanto, nuestro análisis gráfico nos lleva a las conclusiones siguientes:

PRINCIPIO DE OPTIMIZACIÓN

Efecto ingreso y efecto sustitución. La hipótesis de maximización de la utilidad sugiere que, en el caso de los bienes normales, una disminución del precio de un bien lleva a un incremento de la cantidad adquirida del mismo porque 1) el *efecto sustitución* provoca que el individuo compre más a medida que avanza *a lo largo* de una curva de indiferencia y porque 2) el *efecto ingreso* provoca que compre más debido a que la disminución del precio aumenta su poder adquisitivo, permitiéndole así pasar a una curva de indiferencia *más alta*. Cuando el precio de un bien normal aumenta, hay un razonamiento análogo que predice que disminuirá la cantidad que adquiera. En el caso de los bienes inferiores, el efecto ingreso y el efecto sustitución operan en sentido opuesto y no podemos hacer predicciones contundentes.

La curva de demanda del individuo

Los economistas muchas veces quieren hacer gráficas de las funciones de demanda. A estas alturas, a usted no le extrañará que estas gráficas se llamen "curvas de demanda". Si entendemos cómo estas curvas tan usadas se relacionan con las funciones subyacentes de la demanda se obtendrá información adicional de los argumentos económicos más fundamentales. Para simplificar las cosas, supongamos que sólo hay dos bienes y que, como antes, la función de demanda del bien x está dada por

$$x^* = x(p_x, p_y, I).$$

La curva de demanda derivada de esta función analiza la relación entre x y p_x mientras mantenemos p_y, $\bar{I}$ y las preferencias constantes. Es decir, muestra la relación

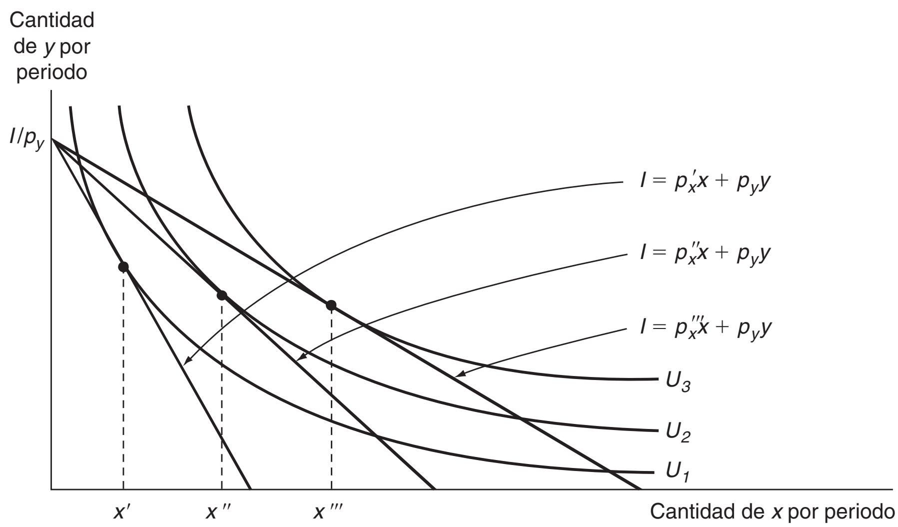
$$x^* = x(p_x, \bar{p}_y, \bar{I}), \tag{5.8}$$

donde las barras sobre p_y e I indican que estos determinantes de la demanda son constantes. La figura 5.5 muestra esta construcción. La gráfica muestra las elecciones de x y y que maximizan la utilidad a medida que este individuo va encontrando precios sucesivamente más bajos del bien x (mientras p_y e I son constantes). Suponemos que las cantidades de x que elige pasan de x' a x'' a x''' a medida que el precio del bien disminuye de p_x' a p_x'' a p_x'''. Este supuesto concuerda con

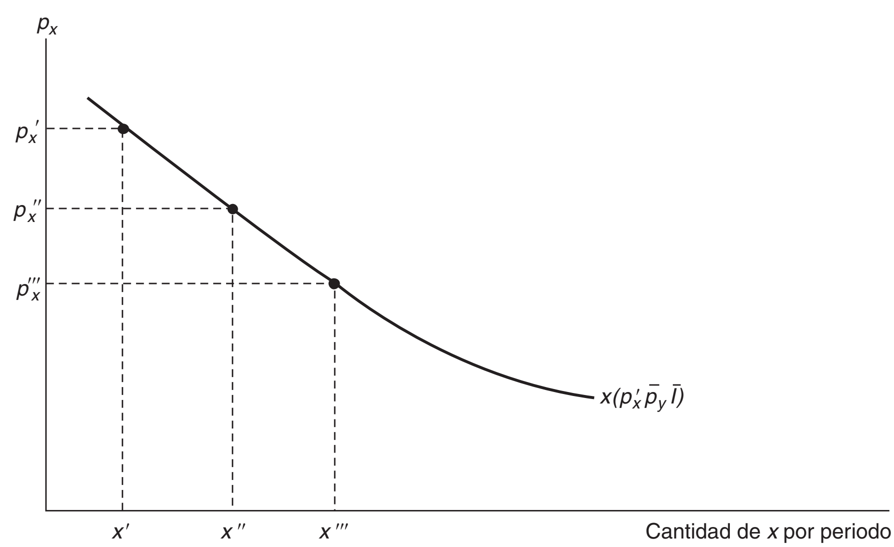
[2]Esta explicación tiene el grave problema de que ignora la observación de Marshall en el sentido de que, cuando analizamos las variaciones de precios, debemos tener en cuenta los factores de la oferta y la demanda. Si los precios de las papas aumentaron porque una plaga afectó las papas en Irlanda, entonces la oferta debería haber sido menor y, por lo mismo, ¿cómo es posible que se consumieran más papas? Además, dado que muchos irlandeses cultivaban papas, el incremento del precio de éstas habría elevado sus ingresos reales. Para un análisis detallado de ésta y otras cuestiones fascinantes sobre conocimientos populares de las patatas, véase G. P. Dwyer y C. M. Lindsey. "Robert Giffen and the Irish Potato", *American Economic Review*, marzo de 1984, pp. 188-192.

FIGURA 5.5 **Construcción de la curva de demanda de un individuo**

La sección a) muestra las elecciones de x y de y que maximizan la utilidad del individuo en el caso de tres precios distintos de x (p_x', p_x'' y p_x'''). En la sección b) utilizamos la relación entre p_x y x para construir la curva de demanda de x. La curva de demanda ha sido trazada partiendo del supuesto de que p_y, I y las preferencias permanecen constantes cuando p_x varía.



a) Mapa de curvas de indiferencia del individuo



b) Curva de demanda

nuestra conclusión general que dice que, salvo en el caso inusual de la paradoja de Giffen, $\partial x/\partial p_x$ será negativa.

En la figura 5.5b, la información relativa a las elecciones del bien x que maximizan la utilidad es trasladada a la *curva de demanda*, con p_x en el eje vertical y compartiendo el mismo eje horizontal que la figura que se encuentra sobre ella. La pendiente negativa de la curva vuelve a reflejar el supuesto de que $\partial x/\partial p_x$ es negativa. Por tanto, podría definirse la curva de demanda de un individuo de la manera siguiente:

DEFINICIÓN

Curva de demanda individual. Una *curva de demanda individual* muestra la relación entre el precio de un bien y la cantidad de ese bien que adquiere un individuo, suponiendo que todas las demás determinantes de la demanda permanecen constantes.

La curva de demanda que presenta la figura 5.5 permanecerá en una posición fija sólo en tanto que todas las demás determinantes de la demanda no registren cambio alguno. Si alguno de estos otros factores cambiara, entonces la curva se desplazaría a otra posición, tal como describiremos a continuación.

Desplazamientos de la curva de demanda

Cuando derivamos esta curva de demanda mantuvimos constantes tres factores: 1) el ingreso, 2) los precios de otros bienes (por decir, p_y) y 3) las preferencias del individuo. Si alguno de estos factores cambiara, toda la curva de demanda se desplazaría a otra posición. Por ejemplo, si aumentara I, entonces la curva se desplazaría hacia la derecha (siempre y cuando $\partial x/\partial I > 0$; es decir, que el bien sea "normal" dentro de este intervalo de ingresos). El individuo demandaría mayor cantidad de x a *cada uno* de los precios. Si otro precio cambiara, por decir, p_y, entonces la curva se desplazaría hacia la izquierda o hacia la derecha, dependiendo precisamente de la relación entre x y y. En el próximo capítulo se analizará esta relación con más detalle. Por último, la curva se desplazará si las preferencias del individuo en tanto del bien x cambiaran. Por ejemplo, una repentina campaña publicitaria agresiva de McDonald's podría desplazar la demanda de hamburguesas hacia la derecha.

Como deja en claro este análisis, debemos recordar que la curva de demanda es tan sólo una representación bidimensional de la verdadera función de demanda (ecuación 5.8) y que sólo será estable si todo lo demás permanece constante. Es importante recordar con claridad la diferencia entre un movimiento a lo largo de una determinada curva de demanda, que ha sido provocado por una variación de p_x y un desplazamiento de toda la curva, que ha sido provocado por una variación de los ingresos, de uno de los otros precios o de las preferencias. Tradicionalmente, la expresión *incremento de la demanda* está reservada para un desplazamiento hacia la derecha de la curva de demanda, mientras que la expresión *incremento de la cantidad demandada* se refiere a un movimiento a lo largo de la curva de demanda, el cual ha sido provocado por una variación de p_x.

Funciones de demanda y curvas de demanda

Para poder trazar una curva de demanda a partir de una función de demanda determinada, tenemos que suponer que las preferencias que generaron la función permanecen estables y que conocemos los valores de los ingresos y de otros precios relevantes. En el primer caso que estudiamos en el ejemplo 5.1, encontramos que

$$x = \frac{0.3I}{p_x} \tag{5.9}$$

y

$$y = \frac{0.7I}{p_y}$$

Si las preferencias del individuo no cambian y si sus ingresos ascienden a \$100, estas funciones serán

$$\begin{aligned} x &= \frac{30}{p_x} \\ y &= \frac{70}{p_y} \end{aligned} \tag{5.10}$$

o

$$\begin{aligned} p_x x &= 30 \\ p_y y &= 70, \end{aligned}$$

lo cual deja en claro que las curvas de demanda de estos dos bienes son simples hipérbolas. Un incremento del ingreso desplazaría hacia la derecha las dos curvas de demanda. Nótese también que, en este caso, los cambios de p_y no desplazan la curva de demanda del bien x, y viceversa.

En el segundo caso que vimos en el ejemplo 5.1, el análisis es más complejo. Por ejemplo, en el caso del bien x, sabemos que

$$x = \left(\frac{1}{1 + p_x / p_y}\right) \cdot \frac{I}{p_x} \tag{5.11}$$

de modo que, para poder trazar esta curva en el plano $p_x - x$ debemos conocer tanto I como p_y. De nueva cuenta, si suponemos que $I = 100$ y dejamos que $p_y = 1$, entonces la ecuación 5.11 será

$$x = \frac{100}{p_x^2 + p_x}, \tag{5.12}$$

que, una vez trazada, también mostrará una relación hiperbólica general entre el precio y la cantidad consumida. En este caso, la curva será relativamente más plana porque los efectos sustitución son mayores que en el caso de una función Cobb-Douglas. Dada la ecuación 5.11, también sabemos que

$$\frac{\partial x}{\partial I} = \left(\frac{1}{1 + p_x / p_y}\right) \cdot \frac{1}{p_x} > 0 \tag{5.13}$$

y

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} = \frac{I}{(p_x + p_y)^2} > 0,$$

por lo cual, los incrementos de I o de p_y desplazarían la curva de demanda del bien x hacia la derecha.

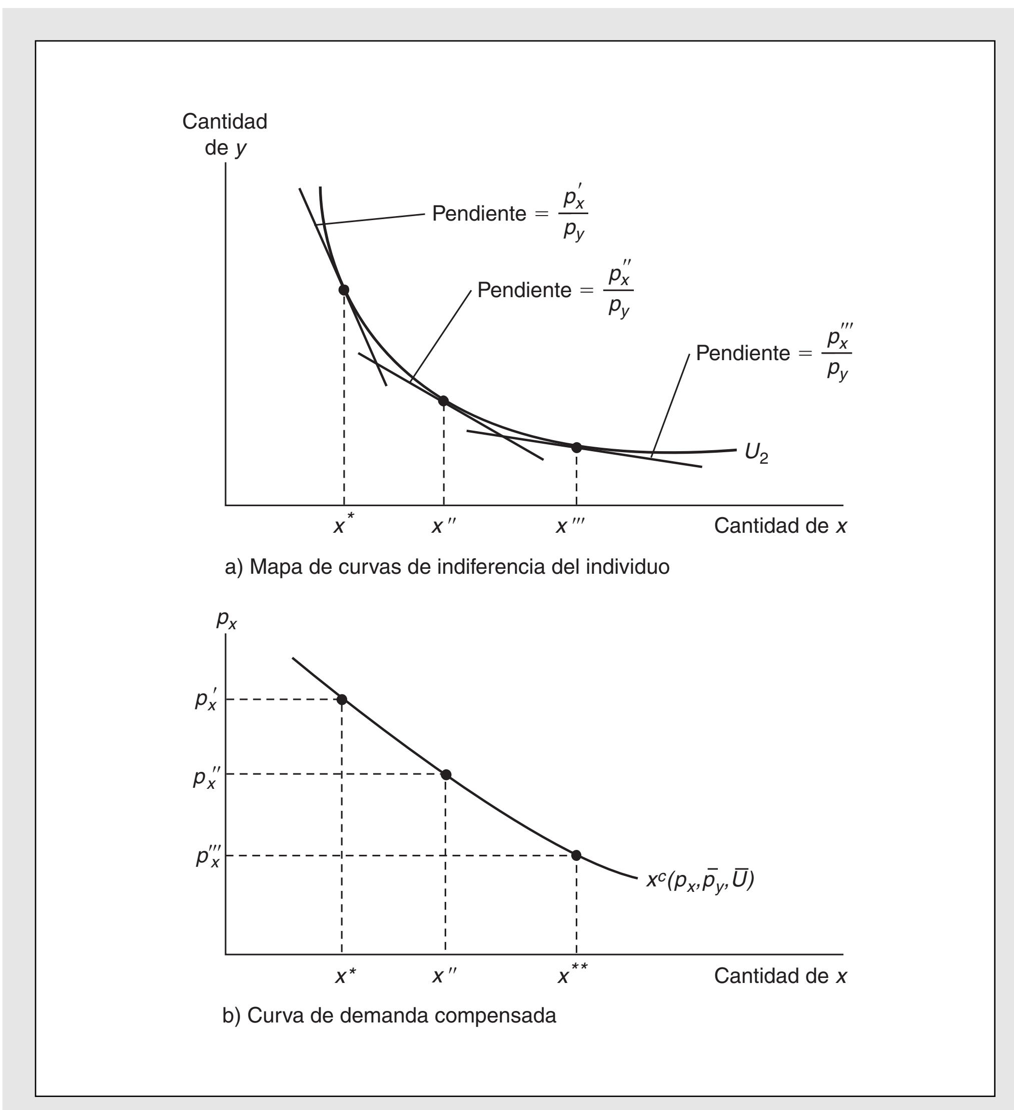
Pregunta: ¿Cómo cambiarían las funciones de demanda de las ecuaciones 5.10, si esta persona gastara la mitad de sus ingresos en cada uno de los bienes? Demuestre que esta función de demanda predice el mismo consumo de x en el punto $p_x = 1$, $p_y = 1$, $I = 100$ que en la ecuación 5.11. Utilice un ejemplo numérico para demostrar que la función de demanda CES es más sensible a un incremento de p_x que la función de demanda Cobb-Douglas.

Curvas de demanda compensada

En la figura 5.5, el nivel de utilidad que obtiene esta persona varía a lo largo de la curva de demanda. A medida que p_x disminuye, ella estará cada vez en mejor posición, como muestra el incremento de utilidad de U_1 a U_2 y a U_3. Esto se explica porque la curva de demanda ha sido trazada partiendo del supuesto de que el *ingreso nominal* y los demás precios se mantienen constantes. Por tanto, una disminución de p_x hace que esta persona esté en mejor posición ya que aumenta su poder adquisitivo real. Esta forma es la más común de imponer el supuesto ceteris paribus para desarrollar una curva de demanda, pero no es la única. Otro planteamiento consiste en mantener constantes los ingresos *reales* (o la utilidad) mientras analizamos las reacciones a las variaciones de p_x. La figura 5.6 ilustra esta derivación. En ella, se mantiene constante la utilidad (en U_2) mientras que vamos disminuyendo p_x sucesivamente. A medida que p_x disminuye, los ingresos nominales del individuo se reducen de hecho, impidiendo así que aumente la utilidad. En otras palabras, los efectos de la variación del precio en el poder adquisitivo se “compensan” a modo de obligar al individuo a permanecer en U_2. Sus reacciones ante la variación del precio tan sólo incluyen efectos sustitución. Por el contrario, si fuéramos a analizar los efectos de los incrementos de p_x, la compensación de los ingresos sería positiva; es decir, los ingresos de este

FIGURA 5.6 **Construcción de una curva de demanda compensada**

La curva h_x muestra cómo varía la cantidad demandada de x cuando cambia p_x, si p_y y la ***utilidad*** permanecen constantes. Es decir, “compensamos” los ingresos del individuo para poder mantener constante la utilidad. Por tanto, x^c refleja tan sólo los efectos sustitución de las variaciones de los precios.



individuo tendrían que aumentar para que pudiera permanecer en la curva de indiferencia U_2 ante los incrementos del precio. Podemos resumir estos resultados de la manera siguiente:

DEFINICIÓN

Curva de demanda compensada. Una *curva de demanda compensada* muestra la relación entre el precio de un bien y la cantidad adquirida del mismo, partiendo del supuesto que los demás precios *y la utilidad* se mantienen constantes. Por tanto, la curva (que a veces es llamada curva de demanda "hicksiana" en honor al economista británico John Hicks) tan sólo ilustra el efecto sustitución. En términos matemáticos, la curva es una representación bidimensional de una *función de demanda compensada*

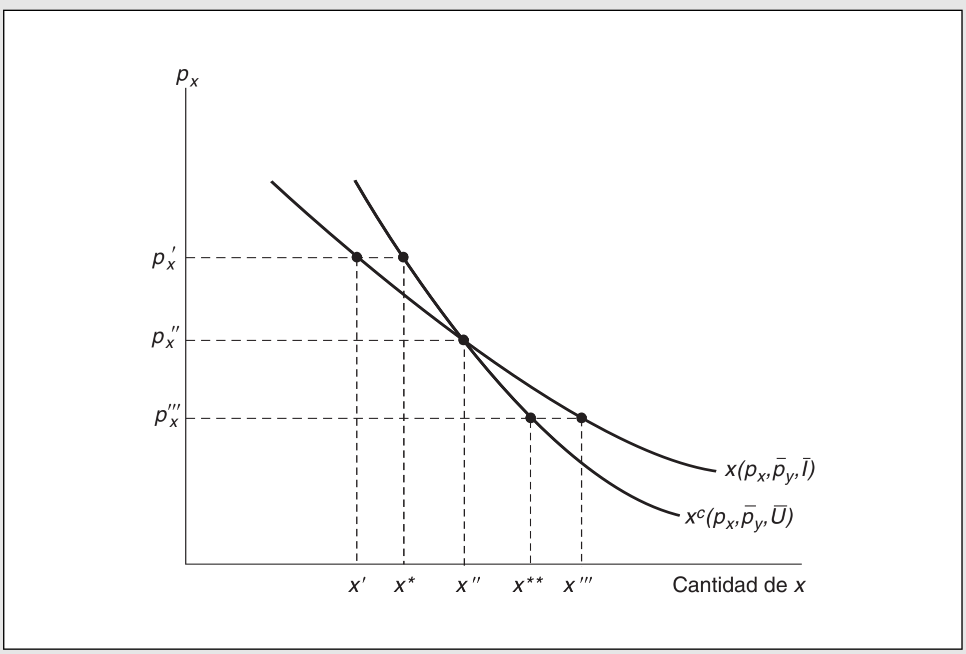
$$x^* = x^c(p_x, p_y, U). \quad \textbf{(5.14)}$$

Relaciones entre curvas de demanda compensada y marshalliana

La figura 5.7 ilustra la relación entre los dos conceptos de la curva de demanda que hemos desarrollado. Las curvas intersecan en p_x'' porque, a ese precio, los ingresos del individuo son justo bastantes para alcanzar el nivel de utilidad U_2 (compare las figuras 5.5 y 5.6). Por tanto, x'' será la cantidad demandada de acuerdo con los dos conceptos de demanda. Sin embargo, en el caso de los precios inferiores a p_x'', el individuo padece una reducción compensatoria de sus ingresos en la curva x^c para impedir que incremente la utilidad debido al precio más bajo. Por tanto, suponiendo que x es un bien normal, el individuo demandará menos x a p_x''' a lo largo de x^c que a lo largo de la curva marshalliana de x. De otra parte, en el caso de un precio superior a p_x''

FIGURA 5.7 **Comparación de las curvas de demanda compensada y marshalliana**

Las curvas de demanda compensada (x^c) y marshalliana (x) intersecan en el punto p_x'' porque x'' es la cantidad demandada con ambas curvas. En el caso de los precios por encima de p_x'' los ingresos del individuo aumentan con la curva de demanda compensada, por lo cual demanda más de x que con la curva marshalliana. En el caso de precios por debajo de p_x'', los ingresos disminuyen en la curva compensada, por lo cual la cantidad demandada de x es menor que con la curva marshalliana. La curva de demanda marshalliana es más plana porque incorpora tanto el efecto ingreso como el efecto sustitución, mientras que la curva x^c tan sólo refleja los efectos sustitución.



(como sería p'_x), la compensación del ingreso será positiva, porque el individuo necesita cierta ayuda para permanecer en U_2. Por tanto, si de nueva cuenta suponemos x es un bien normal, en p'_x el individuo demandará más de x a lo largo de x^c que a lo largo de x. En consecuencia, por lo general, en el caso de un bien normal, la curva de demanda compensada es algo menos sensible a las variaciones de precios que la curva de demanda marshalliana, porque esta última refleja tanto el efecto ingreso como el efecto sustitución de las variaciones de precios, mientras que la curva compensada sólo refleja el efecto sustitución.

La decisión de usar una curva de demanda compensada o una marshalliana para el análisis económico es, en gran medida, cuestión de conveniencia. En la mayor parte de los trabajos empíricos se utilizan curvas sin compensar (en ocasiones llamadas "curvas de demanda marshalliana"), porque generalmente es fácil tener acceso a los datos de precios y de ingresos nominales que se necesitan para estimarlas. En las ampliaciones del capítulo 10 se describirán algunas de estas estimaciones y se demostrará cómo pueden utilizarse para cuestiones de políticas prácticas. Sin embargo, para algunas cuestiones teóricas, las curvas de demanda compensada serán un concepto más adecuado, dado que su capacidad para mantener constante la utilidad nos ofrece ciertas ventajas. Nuestro análisis del "excedente del consumidor" en la última sección de este capítulo proporciona un ejemplo de estas ventajas.

EJEMPLO 5.3

Función de demanda compensada

En el ejemplo 3.1 supusimos que la función de utilidad de las hamburguesas (y) y de las bebidas (x) estaba dada por

$$\textbf{utilidad} = U(x, y) = x^{0.5}y^{0.5}, \tag{5.15}$$

y en el ejemplo 4.1 se demostró que podemos calcular las funciones de demanda marshallianas para esta función de utilidad como

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha I}{p_x} = \frac{I}{2p_x} \\ y &= \frac{\beta I}{p_y} = \frac{I}{2p_y}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Además, en el ejemplo 4.3 calculamos la función de utilidad indirecta combinando las ecuaciones 5.15 y 5.16 como

$$\textbf{utilidad} = V(I, p_x, p_y) = \frac{I}{2p_x^{0.5}p_y^{0.5}}. \tag{5.17}$$

Para obtener las funciones de demanda compensada de x y y, simplemente resolvemos la ecuación 5.17 para obtener I después sustituimos esta expresión involucrando V en las ecuaciones 5.16. Esto permite intercambiar los ingresos y utilidad de forma que podamos mantener constante esta última, como se requiere en el concepto de demanda compensada. Estas sustituciones producen

$$\begin{aligned} x &= \frac{Vp_y^{0.5}}{p_x^{0.5}} \\ y &= \frac{Vp_x^{0.5}}{p_y^{0.5}}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Éstas son las funciones de demanda compensada de x y y. Nótese que ahora la demanda depende de la utilidad (V) en vez de depender del ingreso. Si se mantiene constante la utilidad, es evidente que los incrementos de p_x reducen la demanda de x, y esto ahora refleja únicamente el efecto sustitución (véase también el ejemplo 5.4).

Si bien p_y no se encuentra en la función de demanda marshalliana del bien x, si aparece en la función compensada; es decir, los incrementos de p_y desplazan a la curva de demanda compensada de x hacia la derecha. Los dos conceptos de demanda coinciden en nuestro punto inicial supuesto de que $p_x = 1$, $p_y = 4$, $I = 8$ y $V = 2$; las ecuaciones 5.16 predicen $x = 4$, $y = 1$ en este punto, al igual que las ecuaciones 5.18. Sin embargo, para $p_x > 1$ o $p_x < 1$, las demandas difieren en función de cada concepto. Si, por ejemplo, $p_x = 4$, las funciones marshallianas (ecuaciones 5.16) predicen que $x = 1$, $y = 1$ mientras que las funciones compensadas (ecuaciones 5.18) predicen que $x = 2$, $y = 2$. La reducción de x debida a un incremento de su precio es menor con la función de demanda compensada que con la función sin compensar porque el primer concepto no incluye el efecto negativo en el poder adquisitivo que se deriva del incremento del precio.

Este ejemplo deja en claro los distintos supuestos ceteris paribus incluidos en los dos conceptos de demanda. Para la demanda marshalliana, se mantienen constantes los gastos en $I = 2$ de modo que el incremento de p_x de 1 a 4, provoca una pérdida de utilidad; en este caso, la utilidad disminuye de 2 a 1. En el caso de la demanda compensada, la utilidad se mantiene constante en $V = 2$. Para mantener constante la utilidad, los gastos deben aumentar a $E = 1(2) + 1(2) = 4$ para compensar los efectos del incremento de precios (véase la ecuación 5.17).

Pregunta: ¿Las funciones de demanda compensada de las ecuaciones 5.18 son homogéneas de grado cero en p_x y p_y si la utilidad se mantiene constante? ¿Esperaría usted que esto sea válido para todas las funciones de demanda compensada?

Un análisis matemático de la respuesta ante las variaciones del precio

Hasta este punto hemos dependido, en gran medida, de recursos gráficos para describir la respuesta de los individuos ante las variaciones del precio. Un planteamiento más matemático ofrece nuevas perspectivas. Nuestro principal objetivo consiste en analizar la derivada parcial $\partial x/\partial p_x$; es decir, cómo una variación del precio de un bien, ceteris paribus, afecta las compras del mismo. En el siguiente capítulo se abordará la cuestión de cómo las variaciones del precio de un bien afectan las cantidades que se compran de otro bien.

Planteamiento directo

Nuestro objetivo consiste en utilizar el modelo de maximización de la utilidad para conocer algo de cómo la demanda del bien x cambia cuando p_x cambia; es decir, queremos calcular $\partial x/\partial p_x$. El planteamiento directo de este problema utiliza las condiciones de primer orden para maximizar la utilidad (ecuaciones 4.8). La derivación de estas $n + 1$ ecuaciones produce un nuevo sistema de $n + 1$ ecuaciones, que podemos resolver para determinar la derivada que buscamos.[3] Por desgracia, el cálculo de esta solución es muy laborioso y los pasos requeridos no ofrecen mucha información económica. Por tanto, adoptaremos, en cambio, un planteamiento indirecto que parte del concepto de dualidad. Al final de cuentas, ambos planteamientos generan la misma conclusión, pero el planteamiento indirecto es mucho más rico en cuanto a las cuestiones económicas que contiene.

Planteamiento indirecto

Para iniciar nuestro planteamiento indirecto[4] supondremos (como antes) que sólo hay dos bienes (x y y) y nos centraremos en la función de demanda compensada, $x^c(p_x, p_y, U)$, que introdujimos en la ecuación 5.14. Ahora queremos ilustrar la relación entre esta función de demanda y

[3]Véase, por ejemplo, Paul A. Samuelson. *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947, pp. 101-103.

[4]La siguiente demostración es una adaptación tomada de Phillip J. Cook. "A 'One Line' Proof of the Slutsky Equation", *American Economic Review 62*, marzo de 1972, p. 139.

la función de demanda original, $x(p_x, p_y, I)$. En el capítulo 4 se introdujo el concepto de función gasto, la cual registra el gasto mínimo necesario para alcanzar determinado nivel de utilidad. Si denotamos esta función con

$$\textbf{gasto mínimo} = E(p_x, p_y, U), \tag{5.19}$$

entonces, por definición,

$$x^c(p_x, p_y, U) = x[p_x, p_y, E(p_x, p_y, U)]. \tag{5.20}$$

Esta conclusión ya ha sido introducida respecto a la figura 5.7, la cual mostraba que la cantidad demandada es idéntica para las funciones de demanda compensada y sin compensar cuando los ingresos son justo los necesarios para alcanzar el nivel de utilidad exigido. Obtenemos la ecuación 5.20 insertando el nivel de gasto en la función de demanda, $x(p_x, p_y, I)$. Ahora podemos proseguir diferenciando parcialmente la ecuación 5.20 respecto a p_x y viendo que esta variable aparece en la función de demanda ordinaria en dos lugares. Por tanto,

$$\frac{\partial x^c}{\partial p_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x} + \frac{\partial x}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial p_x}, \tag{5.21}$$

y, reordenando los términos,

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{\partial x^c}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial p_x}. \tag{5.22}$$

El efecto sustitución

Por tanto, la derivada que buscamos tiene dos términos. La interpretación del primer término es clara: es la pendiente de la curva de demanda compensada. Pero esa pendiente representa un movimiento a lo largo de una sola curva de indiferencia; de hecho, es lo que antes se ha denominado "efecto sustitución". El primer término de la ecuación 5.22 que encontramos a la derecha es una representación matemática de dicho efecto.

El efecto ingreso

El segundo término de la ecuación 5.22 expresa la forma en que los cambios de p_x afectan la demanda de x mediante los cambios de los niveles necesarios de gasto (es decir, variaciones del poder adquisitivo). Así, este término expresa el efecto ingreso. El signo negativo de la ecuación 5.22 muestra la dirección del efecto. Por ejemplo, un incremento de p_x incrementa el nivel de gasto que habría sido necesario para mantener constante la utilidad (matemáticamente, $\partial E/\partial p_x > 0$). Sin embargo, dado que los ingresos nominales, de hecho, se mantienen constantes en la demanda marshalliana, estos gastos adicionales no están disponibles. Por tanto x (y y) deben disminuir para satisfacer esta diferencia. El grado de reducción de x está determinado por $\partial x/\partial E$. De otra parte, si p_x disminuye, el nivel de gasto necesario para alcanzar determinada utilidad también disminuye. La disminución de x que normalmente acompañaría a esa disminución del gasto es precisamente la cantidad que se debe volver a sumar mediante el efecto ingreso. Nótese que, en este caso, el efecto ingreso aumenta la cantidad de x.

La ecuación de Slutsky

El economista ruso Eugen Slutsky fue el primero en descubrir, a finales del siglo XIX, las relaciones incluidas en la ecuación 5.22. Tendremos que hacer un pequeño cambio de notación para expresar el resultado como lo hizo Slutsky. Primero, escribimos el efecto sustitución como

$$\textbf{efecto sustitución} = \frac{\partial x^c}{\partial p_x} = \left.\frac{\partial x}{\partial p_x}\right|_{U=\text{constante}} \tag{5.23}$$

para indicar el movimiento a lo largo de una sola curva de indiferencia. En el caso del efecto ingreso tenemos

$$\textbf{efecto ingreso} = -\frac{\partial x}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial p_x} = -\frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial p_x}, \tag{5.24}$$

porque las variaciones de los ingresos o los gastos son iguales en la función $x(p_x, p_y, I)$.

Resulta relativamente fácil demostrar que

$$\frac{\partial E}{\partial p_x} = x. \tag{5.25}$$

La intuición nos dice que un incremento de \$1 en p_x incrementa los gastos necesarios en x dólares, porque el individuo debe pagar \$1 más por cada unidad de x que adquiera. En la nota al pie, se presenta una demostración formal de esta afirmación, que depende del teorema de la envolvente (véase el capítulo 2).[5]

Al combinar las ecuaciones 5.23-5.25 podemos llegar al siguiente:

Principio de optimización

Ecuación de Slutsky. La hipótesis de maximización de la utilidad demuestra que podemos representar el efecto ingreso y el efecto sustitución que se derivan de una variación del precio como

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \textbf{efecto sustitución + efecto ingreso,} \tag{5.26}$$

o

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x}\bigg|_{U=\text{constante}} - x\frac{\partial x}{\partial I}. \tag{5.27}$$

La ecuación de Slutsky permite un tratamiento de la dirección y la magnitud del efecto ingreso y el efecto sustitución más contundente que el que pudimos aplicar con un mero análisis gráfico. Primero, el efecto sustitución ($\partial x/\partial p_x | U =$ constante) siempre es negativo en tanto la *TMS* sea decreciente. Una disminución (incremento) de p_x disminuye (incrementa) p_x/p_y, y la maximización de la utilidad exige que la *TMS* también disminuya (suba). Sin embargo, esto sólo puede ocurrir a lo largo de una curva de indiferencia si x aumenta (o, en el caso de un incremento de p_x, x disminuye). Por tanto, por cuanto se refiere al efecto sustitución, el precio y la cantidad siempre se mueven en sentido opuesto. De manera análoga, la pendiente de la curva de demanda compensada debe ser negativa.[6] En la última sección de este capítulo demostraremos este resultado de una manera un tanto distinta.

El signo del efecto ingreso ($-x\partial x/\partial I$) depende del signo de $\partial x/\partial I$. Si x es un bien normal, $\partial x/\partial I$ será positivo y todo el efecto ingreso, al igual que el efecto sustitución, será negativo. Así pues, en el caso de bienes normales, el precio y la cantidad siempre se mueven en sentido opuesto. Por ejemplo, una disminución de p_x incrementa los ingresos reales y, dado que x es un bien normal, las compras de x aumentan. Por otra parte, un aumento de p_x disminuye los ingresos reales, y las compras de x disminuyen. Así pues, en general, tal y como describíamos antes usando el análisis gráfico, el efecto ingreso y el efecto sustitución operan en el mismo sentido generando una curva de demanda con pendiente negativa. En el caso de un bien inferior, $\partial x/\partial I < 0$ y los dos términos de la ecuación 5.27 tendrían signos distintos. Es posible, cuando menos en teoría, que en este caso el segundo término domine al primero, llevando así a la paradoja de Giffen ($\partial d_x/\partial p_x > 0$).

---

[5]Recuerde que el problema dual del individuo consiste en minimizar $E = p_x x + p_y y$, sujeto a $\bar{U} = U(x, y)$. La expresión lagrangiana de este problema es

$$\mathscr{L} = p_x x + p_y y + \lambda[\bar{U} - U(x,y)],$$

y el teorema de la envolvente aplicado a problemas de minimización con restricciones afirma que, en el punto óptimo,

$$\frac{\partial E}{\partial p_x} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p_x} = x.$$

Éste es el resultado de la ecuación 5.25. Este resultado, y otros parecidos que encontraremos en la teoría de los costos de la empresa, a veces se conocen como el ***lema de Shephard***. Su importancia en el trabajo empírico es que podemos derivar la ***función de la demanda*** del bien x directamente de la función gasto mediante una sencilla derivada parcial. Las funciones de la demanda generadas así dependerán de $\bar{U}$, por lo cual debemos interpretarlas como funciones de demanda compensada. En el ejemplo 4.4 vimos que la función de gasto era

$$E = 2\ V p_x^{0.5} p_y^{0.5}.$$

La derivada parcial de esta expresión respecto a p_x nos permite obtener la función de demanda compensada de las ecuaciones 5.18. Para un análisis más detallado, véanse las ampliaciones de este capítulo.

[6]Existe la posibilidad de que los efectos sustitución sean igual a cero si las curvas de indiferencia tienen forma de L (lo cual implica que x y y han sido usados en proporciones fijas). Ofrecemos algunos ejemplos en los problemas de este capítulo.

EJEMPLO 5.4

Una desagregación de Slutsky

El ejemplo Cobb-Douglas que estudiamos antes servirá estupendamente para ilustrar la desagregación del efecto de un precio que fue descubierta por Slutsky. En el ejemplo 5.3 vimos que la función de demanda marshalliana para el bien x era

$$x(p_x, p_y, I) = \frac{0.5I}{p_x}, \tag{5.28}$$

y que la función de demanda (compensada) de Hicks era

$$x^c(p_x, p_y, V) = \frac{Vp_y^{0.5}}{p_x^{0.5}}. \tag{5.29}$$

Podemos determinar el efecto global de una variación del precio en la demanda del bien x diferenciando la función de demanda marshalliana:

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{-0.5I}{p_x^2}. \tag{5.30}$$

Ahora se demostrará que este efecto es la suma de los dos efectos que identificó Slutsky. Como antes, encontramos el efecto sustitución diferenciando la función de demanda compensada:

$$\text{efecto sustitución} = \frac{\partial x^c}{\partial p_x} = \frac{-0.5Vp_y^{0.5}}{p_x^{1.5}}. \tag{5.31}$$

Podemos eliminar la utilidad indirecta, V, al sustituir en la ecuación 5.17:

$$\text{efecto sustitución} = \frac{-0.5(0.5Ip_x^{-0.5}p_y^{-0.5})p_y^{0.5}}{p_x^{1.5}} = \frac{-0.25I}{p_x^2}. \tag{5.32}$$

El cálculo del efecto ingreso en este ejemplo es bastante más fácil. Si aplicamos los resultados de la ecuación 5.27 se obtendrá

$$\text{efecto ingreso} = -x\frac{\partial x}{\partial I} = -\left[\frac{0.5I}{p_x}\right]\cdot\frac{0.5}{p_x} = -\frac{0.25I}{p_x^2}. \tag{5.33}$$

Una comparación de las ecuaciones 5.30 con las ecuaciones 5.32 y 5.33 muestra que, de hecho, hemos desagregado la derivada del precio de esta función de demanda en los componentes de la sustitución y del ingreso. Cabe señalar que el efecto ingreso y el efecto sustitución son exactamente de la misma magnitud. Esto, como se verá en ejemplos posteriores, es una de las razones que explica por qué el caso Cobb-Douglas es muy especial.

El ejemplo numérico que hemos venido utilizando también demuestra esta desagregación. Cuando el precio del bien x aumenta de \$1 a \$4, la demanda marshalliana de x disminuye de $x = 4$ a $x = 1$. Sin embargo, la demanda compensada de x disminuye tan sólo de $x = 4$ a $x = 2$. Esta disminución del 50% es el efecto de sustitución. La otra disminución de 50%, de $x = 2$ a $x = 1$ representa las reacciones ante la disminución del poder adquisitivo incorporada por la función de demanda marshalliana. Este efecto ingreso no ocurre cuando se utiliza el concepto de la demanda compensada.

Pregunta: En este ejemplo, el individuo gasta la mitad de sus ingresos en el bien x y la otra mitad en el bien y. ¿Cómo se modificarían las magnitudes relativas del efecto ingreso y el efecto sustitución si los exponentes de la función de utilidad Cobb-Douglas no fueran iguales?

Elasticidades de la demanda

Hasta este punto del capítulo hemos estudiado las respuestas de los individuos ante variaciones de precios y de ingresos analizando las derivadas de la función de demanda. En el caso de muchas cuestiones analíticas se trata de una forma conveniente de proceder porque podemos aplicar directamente métodos de cálculo. No obstante, como se dijo en el capítulo 2, el concentrarse en las derivadas representa una gran desventaja en los trabajos empíricos; es decir, la magnitud de las derivadas depende directamente de la forma de medir las variables. Lo anterior puede provocar que las comparaciones de distintos bienes o países y los periodos de tiempo resulten sumamente difíciles. Por lo anterior, en la microeconomía, casi todos los trabajos empíricos utilizan alguna forma de medida de la elasticidad. En esta sección presentamos los tres tipos más comunes de elasticidades de la demanda y exploramos algunas de las relaciones matemáticas que existen entre ellos. De nueva cuenta, en aras de la sencillez, se analizará una situación en la cual el individuo sólo elige entre dos bienes, pero aclarando que estas ideas son fáciles de generalizar.

Elasticidades de la demanda marshalliana

Las elasticidades de la demanda que se utilizan con más frecuencia son las derivadas de la función de demanda marshalliana $x(p_x, p_y, I)$. Específicamente se utilizan las definiciones siguientes:

DEFINICIÓN

1. *Elasticidad precio de la demanda* (e_{x,p_x}): Mide el cambio proporcional de la cantidad demandada ante una variación proporcional del propio precio del bien. En términos matemáticos,

$$e_{x,p_x} = \frac{\Delta x/x}{\Delta p_x/p_x} = \frac{\Delta x}{\Delta p_x}\cdot\frac{p_x}{x} = \frac{\partial x}{\partial p_x}\cdot\frac{p_x}{x}. \qquad (5.34)$$

2. *Elasticidad ingreso de la demanda* ($e_{x,I}$): Mide el cambio proporcional de la cantidad demandada ante una variación proporcional de los ingresos. En términos matemáticos,

$$e_{x,I} = \frac{\Delta x/x}{\Delta I/I} = \frac{\Delta x}{\Delta I}\cdot\frac{I}{x} = \frac{\partial x}{\partial I}\cdot\frac{I}{x}. \qquad (5.35)$$

3. *Elasticidad precios cruzados de la demanda* (e_{x,p_y}): Mide el cambio proporcional de la cantidad demandada ante una variación proporcional del precio de algún otro bien (y):

$$e_{x,p_y} = \frac{\Delta x/x}{\Delta p_y/p_y} = \frac{\Delta x}{\Delta p_y}\cdot\frac{p_y}{x} = \frac{\partial x}{\partial p_y}\cdot\frac{p_y}{x}. \qquad (5.36)$$

Nótese que todas estas definiciones utilizan derivadas parciales, lo cual significa que todos los demás determinantes de la demanda tendrán que mantenerse constantes cuando estudiamos el efecto de una variable específica. En la parte restante de esta sección se estudiará la definición de la elasticidad del propio precio con cierto detenimiento. El tema central del capítulo 6 es el análisis de la elasticidad precios cruzados de la demanda.

Elasticidad precio de la demanda

La elasticidad (del propio) precio de la demanda probablemente es el concepto más importante de la elasticidad en toda la microeconomía. Éste no sólo ofrece un camino cómodo para resumir cómo responden las personas ante las variaciones de los precios de una amplia variedad de bienes económicos, sino que también es un concepto central de la teoría de cómo reaccionan las empresas ante las curvas de demanda que afrontan. En cursos anteriores de economía usted probablemente ha aprendido que, de manera habitual, se señala una diferencia entre los casos de una demanda elástica (cuando el precio afecta sustancialmente la cantidad) y la demanda inelástica (cuando el efecto del precio es muy pequeño). Cuando tratamos de precisar estas ideas, se presenta la complicación matemática de que la elasticidad precio de la demanda misma es negativa[7] porque, salvo en el caso poco probable de la paradoja de Giffen, $\partial x/\partial p_x$ es negativa.

[7]En algunas ocasiones, los economistas usan el valor absoluto de la elasticidad precio de la demanda en sus explicaciones. Esto no es correcto matemáticamente, pero se usa con mucha frecuencia. Por ejemplo, un estudio que encuentra que $e_{x,p_x} = -1.2$ a veces podría presentar la elasticidad precio de la demanda como "1.2".

Por lo regular, la línea que divide las reacciones grandes de las pequeñas normalmente es establecida en –1. Si $e_{x,p_x} = -1$, entonces los cambios de x y p_x tienen la misma magnitud proporcional. Es decir, un aumento de 1% en el precio conlleva a una disminución de 1% en la cantidad demandada. En este caso se dice que la demanda tiene "elasticidad unitaria". De otra parte, si $e_{x,p_x} < -1$ los cambios de la cantidad son proporcionalmente más grandes que los cambios de precio, decimos que la demanda es "elástica". Por ejemplo, si $e_{x,p_x} = -3$, cada aumento de 1% en el precio conlleva a una disminución del 3% en la cantidad demandada. Por último, si $e_{x,p_x} > -1$, la demanda es inelástica; es decir, los cambios de la cantidad son proporcionalmente más pequeños que los cambios de precio. Por ejemplo, un valor de $e_{x,p_x} = -0.3$, significa que un aumento de 1% en el precio conlleva a una disminución del 0.3% en la cantidad demandada. En los capítulos 10 y 11 veremos cómo se utilizan los datos agregados para estimar la elasticidad precio de la demanda de un bien típico del individuo y cómo se utilizan estos cálculos en diversas cuestiones de la microeconomía aplicada.

Elasticidad precio y total de gastos

La elasticidad precio de la demanda determina el efecto que un cambio de precio, ceteris paribus, tiene en el gasto total destinado a un bien. El cálculo sirve para mostrar esta relación:

$$\frac{\partial(p_x \cdot x)}{\partial p_x} = p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial p_x} + x = x[e_{x,p_x} + 1]. \tag{5.37}$$

Por tanto, el signo de esta derivada dependerá de que e_{x,p_x} sea mayor o menor que –1. Si la demanda es inelástica ($0 > e_{x,p_x} > -1$), entonces la derivada será positiva y el precio y el total de gastos se moverán en el mismo sentido. La intuición nos dice que si el precio no afecta mucho la cantidad demandada, entonces la cantidad permanecerá relativamente constante a medida que el precio cambia y el total de gastos reflejará básicamente esos movimientos de precio. Por ejemplo, es el caso de la demanda de la mayor parte de los productos artículos. Los cambios de precio de cosechas específicas, provocados por el clima, generalmente provocan que el total de gastos de esas cosechas se muevan en la misma dirección. Por otra parte, si la demanda es elástica ($e_{x,p_x} < -1$) la reacción ante los cambios de precio es tan grande que el efecto en el total de gastos se revierte; es decir, un aumento de precio provoca que el total de gastos disminuya (porque la cantidad disminuye demasiado) y una disminución del precio provoca que el total de gastos aumente (la cantidad aumenta de manera sustancial). En el caso de la unidad elástica ($e_{x,p_x} = -1$) el total de gastos es constante, independientemente de los cambios de precio.

Elasticidades precio compensado

Dado que algunos análisis microeconómicos que concentran en la función de demanda compensada, también es útil definir las elasticidades con fundamento en ese concepto. Estas definiciones se derivan directamente de sus contrapartes marshallianas:

Definición

Si la función demanda compensada está dada por $x^c(p_x, p_y, U)$ entonces definimos:

1. *Elasticidad precio compensado de la demanda* (e_{x^c,p_x})*:* Esta elasticidad mide el cambio proporcional compensado de la cantidad demandada ante una variación proporcional del precio del propio bien:

$$e_{x^c,p_x} = \frac{\Delta x^c / x^c}{\Delta p_x / p_x} = \frac{\Delta x^c}{\Delta p_x} \cdot \frac{p_x}{x^c} = \frac{\partial x^c}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x^c}. \tag{5.38}$$

2. *Elasticidad precios cruzados compensados de la demanda* (e_{x^c,p_x})*:* Mide el cambio proporcional compensado de la cantidad demandada ante una variación proporcional del precio de otro bien:

$$e_{x^c,p_y} = \frac{\Delta x^c / x^c}{\Delta p_y / p_y} = \frac{\Delta x^c}{\Delta p_y} \cdot \frac{p_y}{x^c} = \frac{\partial x^c}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{x^c}. \tag{5.39}$$

El hecho de que las elasticidades precio difieran de sus contrapartes marshallianas depende de la importancia de la compensación de los ingresos dentro de la demanda global del bien x.

Podemos mostrar la relación precisa entre las dos multiplicando el resultado Slutsky de la ecuación 5.27 por el factor p_x/x:

$$\frac{p_x}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p_x} = e_{x,p_x} = \frac{p_x}{x}\cdot\frac{\partial x^c}{\partial p_x} - \frac{p_x}{x}\cdot x\cdot\frac{\partial x}{\partial I} = e_{x^c,p_x} - s_x e_{x,I}, \qquad \textbf{(5.40)}$$

donde $s_x = \dfrac{p_x x}{I}$ es la proporción del total de ingresos destinada a la adquisición del bien x. Por tanto, la ecuación 5.40 muestra que las elasticidades precios propios de la demanda, compensada y sin compensar, serán similares si es válida alguna de estas dos condiciones: 1) la parte del ingreso destinada al bien x (s_x) es pequeña; o 2) la elasticidad ingreso de la demanda del bien x ($e_{x,I}$) es pequeña. Cualquiera de estas condiciones sirve para disminuir la importancia de la compensación de los ingresos empleada para construir la función de demanda compensada. Si el bien x no es importante en el presupuesto de una persona, entonces la cantidad de compensación de los ingresos que requiere para anular el cambio de precio será pequeño. Incluso si un bien es importante en el presupuesto, si la persona no reacciona muy fuerte a los cambios compensatorios del ingreso, los dos resultados del concepto de la demanda serán similares. Por tanto, habrá muchas circunstancias en las cuales podamos utilizar los dos conceptos de la elasticidad precio en forma más o menos intercambiable. En otras palabras, existen muchas circunstancias económicas en las cuales los efectos sustitución constituyen el componente más importante de las respuestas del precio.

Relaciones entre elasticidades de la demanda

En esta sección hemos analizado una serie de relaciones entre los conceptos de elasticidad. Todos ellos se derivan del modelo fundamental de la maximización de la utilidad. A continuación se verán tres de estas relaciones que ofrecen más conocimiento sobre la naturaleza de la demanda individual.

Homogeneidad. Podemos expresar la homogeneidad de las funciones de demanda en términos de elasticidad. Dado que todo cambio proporcional de todos los precios y los ingresos no cambia nada la cantidad demandada, entonces la suma neta de todas las elasticidades precio y la elasticidad ingreso de un bien particular debe ser igual a cero. La prueba de esta propiedad se funda en el teorema de Euler (véase el capítulo 2). Si aplicamos ese teorema a la función de demanda $x(p_x, p_y, I)$ y recordando que esta función es homogénea de grado cero, tendremos

$$0 = p_x\cdot\frac{\partial x}{\partial p_x} + p_y\cdot\frac{\partial x}{\partial p_y} + I\cdot\frac{\partial x}{\partial I}. \qquad \textbf{(5.41)}$$

Si simplemente se divide la ecuación 5.41 entre x tendremos

$$0 = e_{x,p_x} + e_{x,p_y} + e_{x,I} \qquad \textbf{(5.42)}$$

tal como sugiere la intuición. Este resultado demuestra que las elasticidades de la demanda de un bien cualquiera no se pueden ceñir a un patrón completamente flexible. Deben exhibir alguna suerte de consistencia interna que refleje el planteamiento básico de la maximización de la utilidad en el que se basa la teoría de la demanda.

Agregación de Engel

En las ampliaciones del capítulo 4 vimos el análisis empírico de las porciones del mercado tomando nota de la ley de Engel; es decir, que la fracción de los ingresos destinada a alimentos disminuye a medida que los ingresos aumentan. Desde la perspectiva de la elasticidad, la ley de Engel es un enunciado de la regularidad empírica que expresa que la elasticidad ingreso de la demanda de alimentos, por lo general, resulta considerablemente menor a uno. Dado lo anterior, cabe suponer que la elasticidad ingreso de todos los bienes que no son alimentos debe ser superior a uno. Si los ingresos de un individuo registran un aumento, entonces podemos esperar que sus gastos para alimentos aumenten una cantidad proporcionalmente menor, pero que tendrá que gastar sus ingresos en otras cosas. Estos otros gastos, en agregado, deben aumentar proporcionalmente a mayor velocidad que los ingresos.

Podemos derivar una expresión más formal de esta propiedad de las elasticidades ingreso al derivar la restricción presupuestaria del individuo ($I = p_x x + p_y y$) con respecto al ingreso, tratando los precios como constantes:

$$1 = p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial I} + p_y \cdot \frac{\partial y}{\partial I}. \tag{5.43}$$

La manipulación algebraica de esta expresión dará

$$1 = p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{xI}{xI} + p_y \cdot \frac{\partial y}{\partial I} \cdot \frac{yI}{yI} = s_x e_{x,I} + s_y e_{y,I}, \tag{5.44}$$

donde, como antes, s_i representa la fracción del ingreso gastada en el bien i. La ecuación 5.44 muestra que el promedio ponderado de las elasticidades ingreso de todos los bienes que compra una persona deben ser igual a uno. Si supiéramos, por decir, que la persona gasta una cuarta parte de sus ingresos en alimentos y que la elasticidad ingreso de la demanda de alimentos es 0.5, entonces la elasticidad ingreso de la demanda para todo lo demás debe ser aproximadamente 1.17 [= (1 − 0.25 · 0.5)/0.75]. Dado que los alimentos son una "necesidad" importante, todo lo demás será un "lujo" en cierto sentido.

Agregación Cournot. Antoine Cournot, el economista francés del siglo XVIII, presentó uno de los primeros análisis matemáticos de los cambios de precio empleando el cálculo. Su descubrimiento más importante fue el concepto del ingreso marginal, un concepto que es central para la hipótesis de la maximización de las ganancias de las empresas. Cournot también estaba interesado en saber cómo el cambio de un solo precio afectaría la demanda de todos los bienes. Nuestra última relación muestra que, de hecho, existe una conexión entre todas las reacciones ante el cambio de un solo precio. De nueva cuenta, comenzamos por derivar la restricción presupuestaria, en esta ocasión con respecto a, por decir, a p_x:

$$\frac{\partial I}{\partial p_x} = 0 = p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial p_x} + x + p_y \cdot \frac{\partial y}{\partial p_x}.$$

Si multiplicamos esta ecuación por p_x/I se obtendrá

$$\begin{aligned} 0 &= p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{I} \cdot \frac{x}{x} + x \cdot \frac{p_x}{I} + p_y \cdot \frac{\partial y}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{I} \cdot \frac{y}{y} \\ 0 &= s_x e_{x,p_x} + s_x + s_y e_{y,p_x}, \end{aligned} \tag{5.45}$$

por tanto, el resultado Cournot final será

$$s_x e_{x,\,p_x} + s_y e_{y,\,p_x} = -s_x. \tag{5.46}$$

Esta ecuación demuestra que la magnitud del efecto precios cruzados de una variación del precio de x en la cantidad de y consumida es restringida debido a la restricción presupuestaria. Los efectos directos del propio precio no pueden quedar totalmente superados por los efectos de precios cruzados. Ésta es la primera de las muchas conexiones que existen entre las demandas de bienes que se estudiarán más a fondo en el capítulo siguiente.

Generalizaciones. Si bien hemos demostrado los resultados de agregación tan sólo para el caso de dos bienes, de hecho es fácil generalizarlos al caso de muchos bienes. El problema 5.9 le pide que haga esto precisamente. Una cuestión más difícil es si podemos esperar que estos resultados sean válidos en el caso de datos económicos típicos que combinan las demandas de muchas personas. Los economistas con frecuencia tratan las relaciones de demanda agregada como si describieran el comportamiento de una "persona típica" y, de hecho, estas relaciones deben ser válidas para la referida persona. Sin embargo, la situación podría no ser tan sencilla, como demostraremos cuando se aborde la agregación más adelante en el libro.

EJEMPLO 5.5

Elasticidades de la demanda: la importancia de los efectos sustitución

En este ejemplo se calculan las elasticidades de la demanda que implican tres de las funciones de utilidad que hemos venido utilizando. Si bien las posibilidades incorporadas a estas funciones son demasiado simples para expresar la forma en la que los economistas de hecho estudian la demanda empíricamente, sí muestran cómo las elasticidades, al final de cuentas, reflejan las preferencias de las personas. Una lección en especialimportante es demostrar por qué la mayor parte de la variación de las elasticidades de la demanda de varios bienes probablemente surge debido a diferencias en la magnitud de los efectos de sustitución.

Caso 1. Cobb-Douglas ($\sigma = 1$): $U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ donde $\alpha + \beta = 1$.

Las funciones de demanda derivadas de esta función de utilidad son

$$x(p_x, p_y, I) = \frac{\alpha I}{p_x}$$
$$y(p_x, p_y, I) = \frac{\beta I}{p_y} = \frac{(1-\alpha)I}{p_y}$$

La aplicación de las definiciones de elasticidad demuestra que

$$\begin{aligned} e_{x,p_x} &= \frac{\partial x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x} = \frac{-\alpha I}{p_x^2} \cdot \frac{p_x}{\frac{\alpha I}{p_x}} = -1 \\ e_{x,p_y} &= \frac{\partial x}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{x} = 0 \cdot \frac{p_y}{x} = 0 \\ e_{x,I} &= \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{I}{x} = \frac{\alpha}{p_x} \cdot \frac{I}{\frac{\alpha I}{p_x}} = 1. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Las elasticidades del bien y toman valores análogos. Por tanto, las elasticidades asociadas a la función de utilidad Cobb-Douglas son constantes dentro de todos los intervalos de precios y de ingresos y toman valores especialmente simples. Podemos demostrar con facilidad que éstos obedecen a las tres relaciones mostradas en la sección anterior si utilizamos el hecho de que, en este caso $s_x = \alpha$, $s_y = \beta$.

Homogeneidad: $e_{x,p_x} + e_{x,p_y} + e_{x,I} = -1 + 0 + 1 = 0$.

Agregación Engel: $s_x e_{x,I} + s_y e_{y,I} = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = \alpha + \beta = 1$.

Agregación Cournot: $s_x e_{x,p_x} + s_y e_{y,p_x} = \alpha(-1) + \beta \cdot 0 = -\alpha = -s_x$.

También podemos utilizar la ecuación Slutsky en forma de elasticidad (ecuación 5.40) para derivar la elasticidad precio compensada en este ejemplo:

$$e_{x^c,p_x} = e_{x,p_x} + s_x e_{x,I} = -1 + \alpha(1) = \alpha - 1 = -\beta. \tag{5.48}$$

Por tanto, en este caso, la elasticidad precio compensada de x dependerá del grado de importancia que los otros bienes (y) tengan en la función de utilidad.

(*continúa*)

EJEMPLO 5.5 *CONTINUACIÓN*

Caso 2. CES ($\sigma = 2$; $\delta = 0.5$): $U(x, y) = x^{0.5} + y^{0.5}$

En el ejemplo 4.2 se demostró que las funciones de demanda que podemos derivar de esta función de utilidad son

$$x(p_x, p_y, I) = \frac{I}{p_x(1 + p_x p_y^{-1})}$$
$$y(p_x, p_y, I) = \frac{I}{p_y(1 + p_x^{-1} p_y)}.$$

Como es de suponer, calcular las elasticidades directamente de estas funciones llevaría bastante tiempo. Por tanto, aquí nos concentramos en la elasticidad precio propio y utilizamos el resultado (del problema 5.6) que dice que la "elasticidad de la proporción" de un bien cualquiera está determinada por

$$e_{s_x, p_x} = \frac{\partial s_x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{s_x} = 1 + e_{x, p_x}. \tag{5.49}$$

En este caso

$$s_x = \frac{p_x x}{I} = \frac{1}{1 + p_x p_y^{-1}},$$

por tanto, es más fácil calcular la elasticidad de la proporción que está determinada por

$$e_{s_x, p_x} = \frac{\partial s_x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{s_x} = \frac{-p_y^{-1}}{(1 + p_x p_y^{-1})^2} \cdot \frac{p_x}{(1 + p_x p_y^{-1})^{-1}} = \frac{-p_x p_y^{-1}}{1 + p_x p_y^{-1}}. \tag{5.50}$$

Dado que, en la teoría de la utilidad, las unidades que sirven para medir los bienes son bastante arbitrarias, bien podríamos definirlas de modo que al inicio $p_x = p_y$, en cuyo caso[8] se obtendrá

$$e_{x, p_x} = e_{s_x, p_x} - 1 = \frac{-1}{1 + 1} - 1 = -1.5. \tag{5.51}$$

Por tanto, la demanda es más elástica en este caso que en el ejemplo Cobb-Douglas. Esto se explica porque el efecto de sustitución es mayor en esta versión de la función de utilidad CES. Podemos demostrar lo anterior aplicando, de nueva cuenta, la ecuación de Slutsky (y utilizando los hechos de que $e_{x,I} = 1$ y $s_x = 0.5$):

$$e_{x^c, p_x} = e_{x, p_x} + s_x e_{x,I} = -1.5 + 0.5(1) = -1, \tag{5.52}$$

o sea el doble del efecto de sustitución que en el caso Cobb-Douglas.

Caso 3. CES ($\sigma = 0.5$; $\delta = -1$): $U(x, y) = -x^{-1} - y^{-1}$

Si de nueva cuenta nos referimos al ejemplo 4.2, podremos ver que la fracción del bien x que implica esta función de utilidad está determinada por

$$s_x = \frac{1}{1 + p_y^{0.5} p_x^{-0.5}},$$

de modo que la elasticidad de la proporción está determinada por

$$e_{s_x, p_x} = \frac{\partial s_x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{s_x} = \frac{0.5 p_y^{0.5} p_x^{-1.5}}{(1 + p_y^{0.5} p_x^{-0.5})^2} \cdot \frac{p_x}{(1 + p_y^{0.5} p_x^{-0.5})^{-1}} = \frac{0.5 p_y^{0.5} p_x^{-0.5}}{1 + p_y^{0.5} p_x^{-0.5}}. \tag{5.53}$$

[8]Nótese que debemos hacer esta sustitución después de la diferenciación, porque la definición de elasticidad requiere que tan sólo cambiemos p_x mientas que p_y se mantiene constante.

Si de nueva cuenta adoptamos la simplificación de los precios iguales, podremos computar la elasticidad precio propio como

$$e_{x,p_x} = e_{s_x,p_x} - 1 = \frac{0.5}{2} - 1 = -0.75 \qquad (5.54)$$

y la elasticidad precio compensado como

$$e_{x^c,p_x} = e_{x,p_x} + s_x e_{x,I} = -0.75 + 0.5(1) = -0.25. \qquad (5.55)$$

Por tanto, en esta versión de la función de utilidad CES, la elasticidad precio propio es menor que en los casos 1 y 2 porque el efecto sustitución también es menor. Luego entonces, la principal variación entre los casos es provocada, de hecho, por las diferencias de magnitud del efecto sustitución.

Si usted no quiere volver a desarrollar este tipo de elasticidad nunca más, podría ser útil emplear el resultado, bastante general, de

$$e_{x^c,p_x} = -(1 - s_x)\sigma. \qquad (5.56)$$

Usted tal vez quiera comprobar si la fórmula funciona para estos tres ejemplos (con $s_x = 0.5$ y $\sigma = 1, 2, 0.5$, respectivamente) y el problema 5.6 le pide que demuestre que este resultado generalmente es cierto. Dado que todos estos casos basados en la función de utilidad con CES tienen una elasticidad ingreso unitaria, podemos calcular la elasticidad precio propio, partiendo de la elasticidad precio compensado, simplemente sumando $-s_x$ a la fórmula que calculamos en la ecuación 5.56.

Pregunta: En este ejemplo, ¿por qué la fracción del presupuesto para bienes que no son *x* entra en las elasticidades precio propio compensado?

El excedente del consumidor

Un problema importante en economía aplicada al bienestar consiste en desarrollar una medida monetaria de las pérdidas o las ganancias que registran los individuos debido a variaciones de los precios. Uno de los usos de tal medida sería adjudicar un valor en dólares a las pérdidas de bienestar que sufren las personas cuando el mercado es monopolizado con precios que exceden a los costos marginales. Otra aplicación es medir las ganancias de bienestar que reciben las personas cuando los avances técnicos reducen los precios que pagan por los bienes. Algunas aplicaciones relacionadas se presentan en la economía ambiental (medir los costos para el bienestar que entrañan los precios incorrectos de los recursos), las leyes y la economía (evaluar los costos para el bienestar que entraña un exceso de protecciones tomadas por temor a demandas judiciales) y la economía pública (medir la carga excesiva de un impuesto). Para poder hacer estos cálculos, los economistas utilizan datos empíricos tomados de estudios de la demanda de mercado, combinados con la teoría que sustenta esa demanda. En esta sección se verá cuáles son los principales instrumentos empleados para ello.

Bienestar del consumidor y función gasto

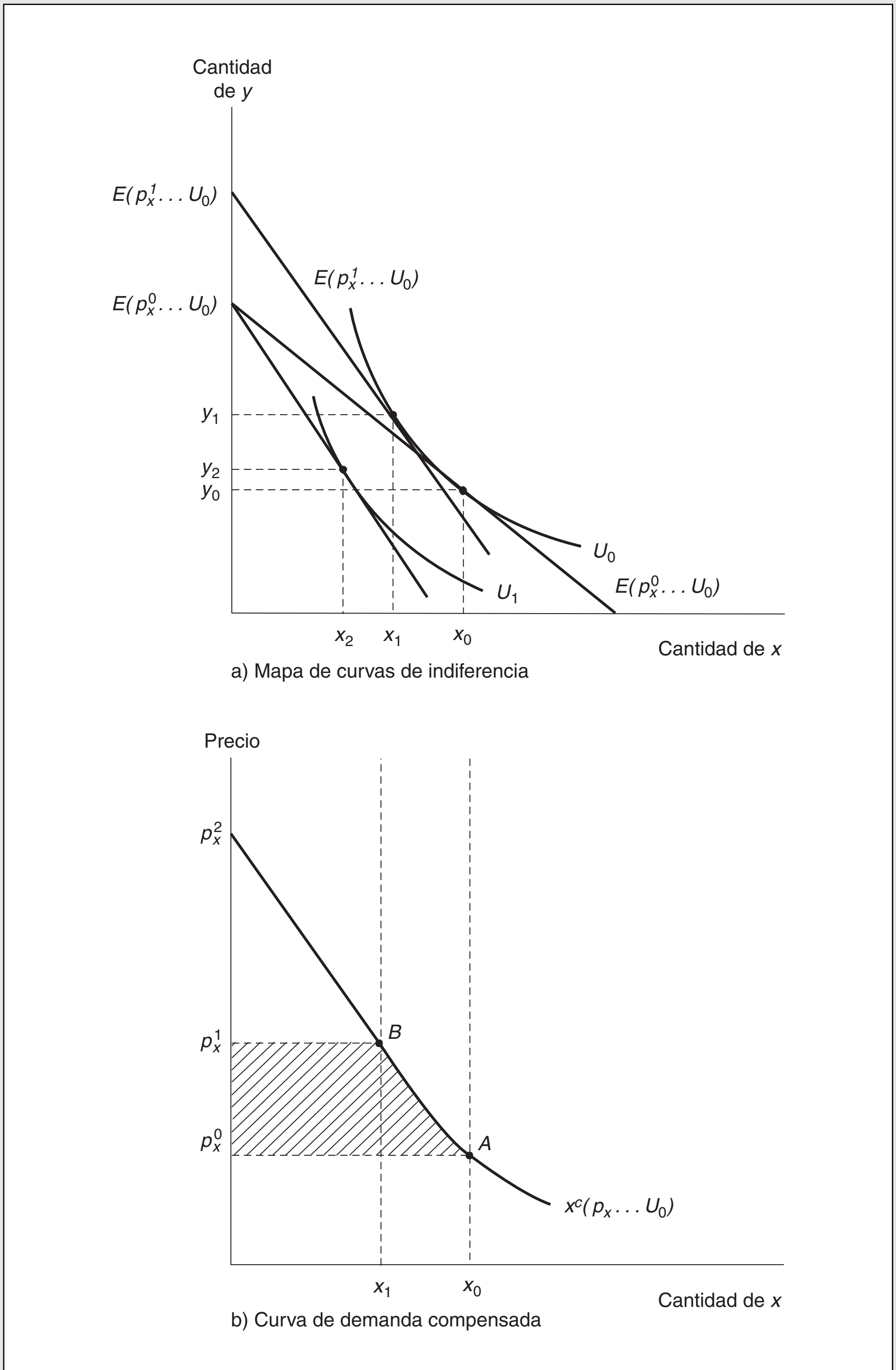
La función gasto vista en el capítulo 4 es el primer elemento para estudiar la relación entre precio y bienestar. Suponga que se quiere medir el cambio que el individuo registra en su bienestar si el precio del bien *x* aumenta de p_x^0 a p_x^1. Al inicio, esta persona requiere una cantidad de gasto $E(p_x^0, p_y, U_0)$ para llegar a la utilidad de U_0. Para alcanzar la misma utilidad después de que ha aumentado el precio de *x* la persona necesitaría, cuando menos, la cantidad de gastos $E(p_x^1, p_y, U_0)$. Por tanto, para compensar el incremento de precio, requeriría una compensación (formalmente llamada *variación compensatoria* o *VC*) de

$$VC = E(p_x^1, p_y, U_0) - E(p_x^0, p_y, U_0). \qquad (5.57)$$

La sección superior de la figura 5.8 muestra esta situación en forma gráfica. Al inicio, esta persona consume la combinación x_0, y_0 y obtiene una utilidad de U_0. Cuando el precio de *x* au-

FIGURA 5.8 **La variación compensatoria**

Si el precio de x aumenta de p_x^0 a p_x^1 esta persona necesitará los gastos extra de la *VC* para poder permanecer en la curva de indiferencia U_0. La integración muestra que también podemos representar fácilmente la *VC* mediante el área sombreada debajo de la curva de demanda compensada como se ve en la sección b).



menta, la persona se vería obligada a pasar a la combinación x_2, y_2 registraría una pérdida de utilidad. Si la persona fuera compensada con poder adquisitivo adicional por la cantidad de *VC*, entonces podría permanecer en la curva de indiferencia U_0 a pesar del aumento de precio, si escogiera la combinación x_1, y_1. Por tanto, la distancia *VC*, ofrece una medida monetaria de la cantidad que esta persona necesitará para que compense el aumento de precio.

Curva de demanda compensada utilizada para mostrar la *VC*

Por desgracia, no podemos observar directamente las funciones de utilidad de los individuos y sus correspondientes mapas de curvas de indiferencia. Sin embargo, sí podemos avanzar en la medición empírica si determinamos cómo demostrar la cantidad de la *VC* en la curva de demanda compensada como en la sección inferior de la figura 5.8. En la nota 5 al pie de página de este capítulo se describe el lema de Shephard que utiliza el teorema de la envolvente para demostrar que podemos determinar la función de demanda compensada de un bien directamente mediante la diferenciación de la función de los gastos:

$$x^c(p_x, p_y, U) = \frac{\partial E(p_x, p_y, U)}{\partial p_x}. \tag{5.58}$$

Por tanto, podemos determinar la compensación descrita en la ecuación 5.57 al integrar toda una secuencia de pequeños incrementos del precio de p_x^0 a p_x^1:

$$VC = \int_{p_x^0}^{p_x^1} dE = \int_{p_x^0}^{p_x^1} x^c(p_x, p_y, U_0)dp_x \tag{5.59}$$

mientras se mantienen p_y y la utilidad constantes. La integral definida en la ecuación 5.59 tiene una interpretación geométrica que podemos mostrar en la sección inferior de la figura 5.9; es decir, el área sombreada a la izquierda de la curva de demanda compensada y limitada por p_x^0 y p_x^1. Luego entonces, también podemos ilustrar el costo del bienestar de este incremento de precio utilizando las áreas que se encuentran debajo de la curva de demanda compensada.

El concepto del excedente del consumidor

Existe otra forma de ver el tema. Podemos preguntar cuánto estaría dispuesta a pagar esta persona por el derecho a consumir toda la cantidad que desea de este bien, a un precio de mercado de p_x^0 en lugar de renunciar totalmente al mismo. La curva de demanda compensada que presenta la sección inferior de la figura 5.8 muestra que si el precio de x aumentara a p_x^2 el consumo de esta persona disminuiría a cero y requeriría un monto de compensación por una cantidad igual al área $p_x^2 A p_x^0$ para aceptar el cambio voluntariamente. Por tanto, el derecho de consumir x_0 al precio de p_x^0 vale este monto para este individuo. Es el beneficio extra que recibe esta persona cuando puede hacer transacciones de mercado al precio de mercado prevaleciente. Se dice que este valor, determinado por el área que está debajo de la curva de demanda compensada y encima del precio de mercado se llama *excedente del consumidor*. Visto bajo esta óptica, podemos decir que el problema del bienestar que provoca un aumento del precio de x es una pérdida del excedente del consumidor. Cuando el precio aumenta de p_x^0 a p_x^1 el valor del triángulo del excedente del consumidor disminuye de $p_x^2 A p_x^0$ a $p_x^2 B p_x^1$. Como vemos con claridad en la figura se trata simplemente de otra forma de describir la pérdida de bienestar representada en la ecuación 5.59.

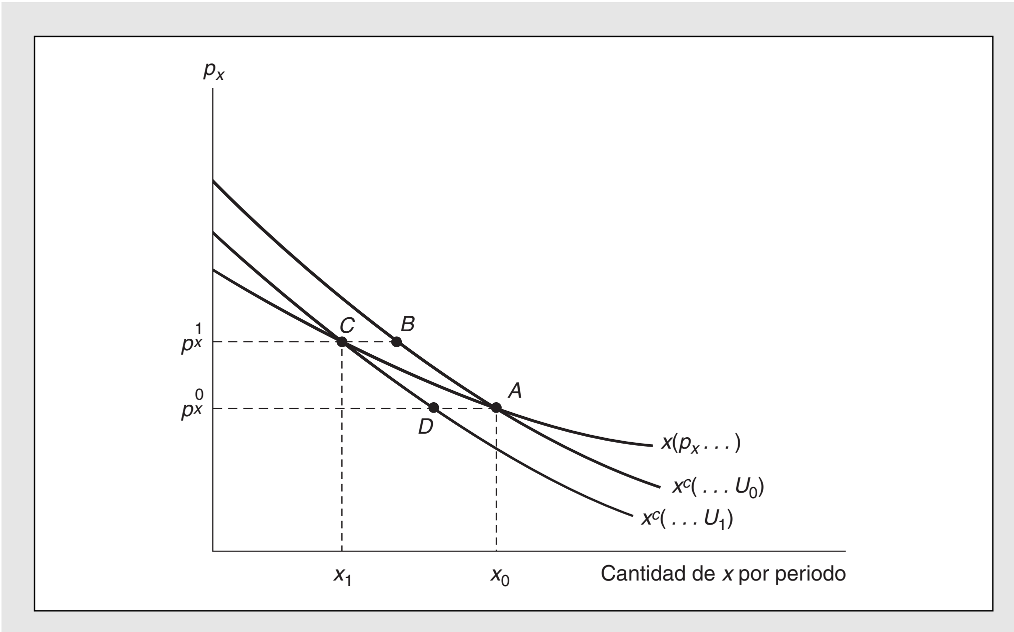
Variaciones del bienestar y la curva de demanda marshalliana

Hasta ahora, nuestro análisis de los efectos que los cambios de precio tienen en el bienestar se ha centrado en la curva de demanda compensada. Esto es desafortunado en cierto sentido, porque la mayor parte del trabajo empírico sobre la demanda de hecho calcula curvas de demanda comunes (marshallianas). En esta sección se demostrará que estudiar las variaciones en el área que queda debajo de esta curva de demanda podría ser, de hecho, un buen camino para medir las pérdidas de bienestar.

Pensemos en la curva de demanda marshalliana $x(p_x \ . \ . \ . \ )$ que ilustra la figura 5.9. Este consumidor, al inicio, afronta el precio p_x^0 y opta por consumir x_0. Este consumo le produce un nivel de utilidad U_0, y la curva de demanda compensada inicial de x [es decir, $x^c(p_x, p_y, U_0)$]

FIGURA 5.9 **Efectos que los cambios de precio tienen en el bienestar y la curva de demanda marshalliana**

$x(p_x\ .\ .\ .\ )$ es la curva de demanda marshalliana habitual (con ingreso nominal constante) para el bien x. $x^c(\ .\ .\ .\ U_0)$ y $x^c(\ .\ .\ .\ U_1)$ denotan las curvas de demanda compensada asociadas a los niveles de utilidad obtenidos cuando prevalecen p_x^0 y p_x^1, respectivamente. El área a la izquierda de $x(p_x\ .\ .\ .)$ entre p_x^0 y p_x^1 está limitada por áreas similares a la izquierda de las curvas de demanda compensada. Por tanto, en el caso de variaciones pequeñas del precio, el área a la izquierda de la curva de demanda marshalliana es una buena medida de la pérdida de bienestar.



también pasa por el punto x_0, p_x^0 (que hemos marcado como punto A). Cuando el precio aumenta a p_x^1, la demanda marshalliana del bien x disminuye a x_1 (punto C en la curva de demanda) y la utilidad de la persona también disminuye, por decir, a, U_1. Hay otra curva de demanda compensada ligada a este nivel más bajo de utilidad, la cual también aparece en la figura 5.9. Tanto la curva de demanda marshalliana como esta nueva curva de demanda compensada pasan ambas por el punto C.

La presencia de otra curva de demanda compensada en la figura 5.9 plantea una inquietante interrogante conceptual. ¿Debemos medir la pérdida de bienestar derivada de un aumento de precio como lo hicimos en la figura 5.8, utilizando la variación compensatoria (VC) asociada a la curva inicial de demanda compensada (área $p_x^1BAp_x^0$) o, tal vez, deberíamos usar esta nueva curva de demanda compensada y medir la pérdida de bienestar como el área $p_x^1CDp_x^0$? La lógica para usar el área debajo de la segunda curva podría ser centrarnos en la situación del individuo después del aumento de precio (con un nivel de utilidad U_1). A continuación, podríamos preguntar cuánto estaría dispuesto a pagar por ver que el precio volviera a sus niveles anteriores, más bajos.[9] La respuesta a esta pregunta estaría determinada por el área $p_x^1CDp_x^0$. Por tanto, la decisión de cuál de las curvas de demanda compensada se debe utilizar se resume a escoger el nivel de utilidad que consideremos el objetivo adecuado.

Por fortuna, la curva de demanda marshalliana ofrece un cómodo punto de compromiso entre estas dos posiciones. Dado que el tamaño del área entre los dos precios y debajo de la curva marshalliana (el área $p_x^1CAp_x^0$) es más pequeña que la que se encuentra debajo de la curva de demanda compensada basada en U_0, pero más grande que la que se encuentra debajo de la curva basada en U_1 aparentemente resulta un terreno intermedio muy atractivo. Por tanto, ésta será la medida de las pérdidas de bienestar que se utilizará durante la parte restante de este libro.

---

[9]A veces, esta medida alternativa de la compensación se conoce como la *variación equivalente* (VE).

DEFINICIÓN

Excedente del consumidor. El excedente del consumidor es el área que se encuentra debajo de la curva de demanda marshalliana y encima del precio de mercado. Muestra lo que un individuo pagaría por el derecho de realizar transacciones voluntarias a este precio. Podemos utilizar las variaciones del excedente del consumidor para medir los efectos que los cambios de precio tienen en el bienestar.

Cabe señalar que algunos economistas utilizan la *VC* o la *VE* para calcular los efectos que los cambios de precios tienen en el bienestar. De hecho, los economistas con frecuencia no son muy claros en cuanto a la medida del cambio de bienestar que están utilizando. Nuestra explicación en la sección anterior demuestra que si los efectos ingreso son pequeños, en realidad no hay gran diferencia en ninguno de los dos casos.

EJEMPLO 5.6

Pérdida del excedente del consumidor por un incremento del precio

Podemos ilustrar estas ideas numéricamente si volvemos al ejemplo de las hamburguesas y las bebidas. Veamos las consecuencias para el bienestar que tiene un inconsciente aumento del precio de las bebidas (bien x) de \$1 a \$4. En el ejemplo 5.3 encontramos que la demanda compensada del bien x estaba determinada por

$$x^c(p_x, p_y, V) = \frac{Vp_y^{0.5}}{p_x^{0.5}}. \tag{5.60}$$

Por tanto, el costo en términos de bienestar debido al incremento del precio está determinado por

$$VC = \int_1^4 x^c(p_x, p_y, V)dp_x = \int_1^4 Vp_y^{0.5}p_x^{-0.5}dp_x = 2Vp_y^{0.5}p_x^{0.5}\Big|_{p_x=1}^{p_x=4}. \tag{5.61}$$

Si utilizamos los valores que hemos venido suponiendo a lo largo de todo este festín gastronómico ($V = 2$, $p_y = 4$) obtendremos

$$VC = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (4)^{0.5} - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (1)^{0.5} = 8. \tag{5.62}$$

Esta cifra se reduciría a la mitad (a 4) si pensáramos que el nivel de utilidad después del aumento de precio ($V = 1$) fuera una meta de utilidad más adecuada para medir la compensación. En cambio, si se hubiera utilizado la función de la demanda marshalliana

$$x(p_x, p_y, I) = 0.5Ip_x^{-1}$$

calcularíamos la pérdida como

$$Pérdida = \int_1^4 x(p_x, p_y, I)dp_x = \int_1^4 0.5Ip_x^{-1}dp_x = 0.5I \ln p_x\Big|_1^4. \tag{5.63}$$

De tal modo, con $I = 8$ esta pérdida es

$$Pérdida = 4 \ln(4) - 4 \ln(1) = 4 \ln(4) = 4(1.39) = 5.55, \tag{5.64}$$

que, en apariencia, es un compromiso razonable entre las dos medidas alternativas basadas en las curvas de demanda compensada.

Pregunta: En este problema ninguna de las curvas de demanda tiene un precio finito en el cual la demanda llegue exactamente a cero. ¿Esto cómo afecta el cálculo del excedente total del consumidor? ¿Ello afecta los tipos del cálculo del bienestar que hemos hecho aquí?

Preferencias reveladas y el efecto sustitución

La principal predicción, sin ambigüedades, que podemos derivar del modelo de maximización de la utilidad es que la pendiente (y en consecuencia, la elasticidad precio) de la curva de demanda compensada es negativa. La demostración de esta afirmación parte del supuesto de una *TMS* decreciente y de la observación de que, con una *TMS* decreciente, las condiciones necesarias para maximizar la utilidad también son condiciones suficientes. Para algunos economistas, el tener que depender de esta hipótesis de una función de utilidad que no es posible observar representaba un cimiento débil para fundar una teoría de la demanda. Un planteamiento alternativo, que lleva al mismo resultado, fue propuesto por primera vez por Paul Samuelson a finales de la década de 1940.[10] Este planteamiento, que Samuelson llamó la *teoría de las preferencias reveladas,* define un principio de racionalidad fundado en el comportamiento observado y, después, lo utiliza para abordar la función de utilidad de un individuo. En este sentido, una persona que siga el principio de racionalidad de Samuelson se comporta como *si estuviera* maximizando una función de utilidad correcta y exhibe un efecto sustitución negativo. Dado que el planteamiento de Samuelson ofrece más información para nuestro modelo de la elección del consumidor, se analizará brevemente a continuación.

Planteamiento gráfico

En la teoría de las preferencias reveladas, el principio de racionalidad es el siguiente: Pensemos en dos paquetes de bienes, A y B. Así, dados ciertos precios y nivel de ingresos, si el individuo puede adquirir tanto A como B, pero elige A, se dice que ha "revelado su preferencia" por A en lugar de B. El principio de la racionalidad afirma que, ante otra combinación de ingresos y de precios, el individuo jamás revelará que prefiere, B en lugar de A. De hecho, si elige B con otra combinación de precios e ingresos, debe ser porque no pudo pagar el precio de A. La figura 5.10 ilustra el principio. Supongamos que cuando la restricción presupuestaria está determinada por I_1, el individuo elige el punto A, incluso si también podría haber comprado B. Así pues ha revelado que prefiere B. Si por alguna otra restricción presupuestaria elige B de hecho, entonces debe ser en un caso como el representado por I_2; es decir, uno en el cual no podía comprar A. Si eligiera B cuando la restricción presupuestaria es I_3, ello violaría el principio de racionalidad, porque con I_3 puede comprar tanto A como B. Con la restricción presupuestaria I_3 es probable que compre un punto que no será A ni B, por ejemplo, C. Nótese que este principio parte de las reacciones observables ante distintas restricciones de presupuestos con el propósito de clasificar por orden los bienes, y no para suponer la existencia de la función de utilidad misma.

Negatividad del efecto sustitución

Ahora, utilizando el principio de racionalidad, podemos demostrar por qué el efecto sustitución debe ser negativo (o cero). Supongamos que a un individuo le son *indiferentes* dos paquetes de bienes, C (compuesto por x_C y y_C) y D (compuesto por x_D y y_D). Digamos que p_x^C, p_y^C son los precios a los que escogería el paquete C y p_x^D, p_y^D los precios a los que escogería el paquete D.

Dado que al individuo le son indiferentes el C o el D, seguramente se dio el caso de que, cuando eligió C, D costaba cuando menos tanto como C:

$$p_x^C x_C + p_y^C y_C \leq p_x^C x_D + p_y^C y_D. \tag{5.65}$$

Se cumple una afirmación análoga cuando elige D:

$$p_x^D x_D + p_y^D y_D \leq p_x^D x_C + p_y^D y_C. \tag{5.66}$$

Volviendo a escribir estas ecuaciones tendremos

$$p_x^C (x_C - x_D) + p_y^C (y_C - y_D) \leq 0 \tag{5.67}$$

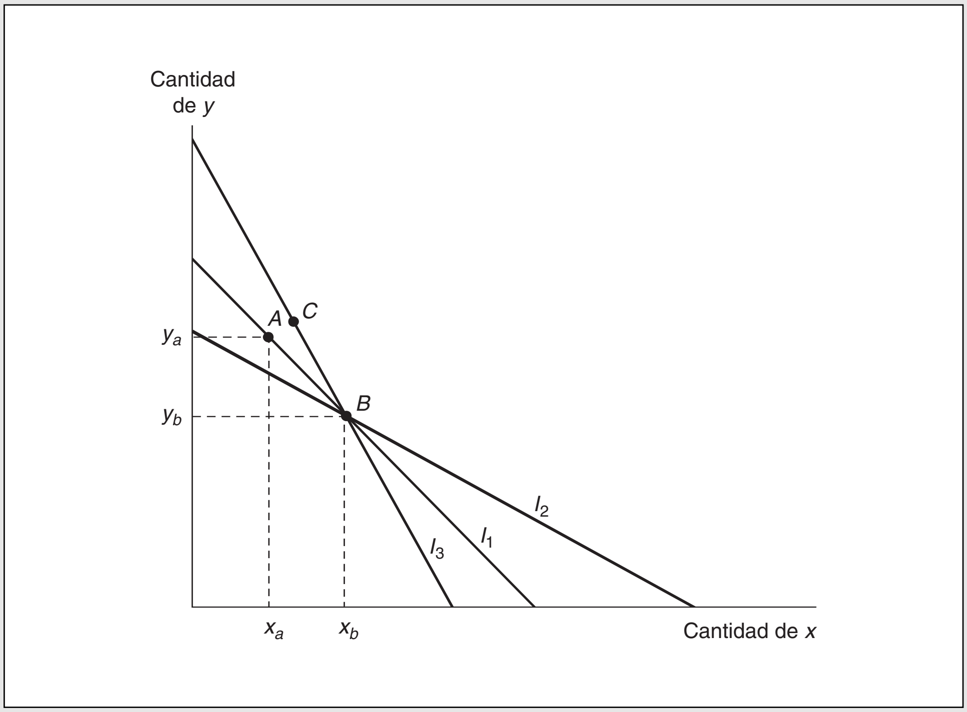
$$p_x^D (x_D - x_C) + p_y^D (y_D - y_C) \leq 0. \tag{5.68}$$

---

[10]Paul A. Samuelson. *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947.

FIGURA 5.10 **Demostración del principio de racionalidad en la teoría de las preferencias reveladas**

Con el ingreso I_1 el individuo puede adquirir tanto el punto A como el B. Si elige A, entonces revela su preferencia por A en lugar de B. Sería irracional que revelara su preferencia por B en lugar de A en el caso de alguna otra configuración de precios e ingresos.



Si sumamos estas dos últimas se obtendrá

$$(p_x^C - p_x^D)(x_C - x_D) + (p_y^C - p_y^D)(y_C - y_D) \leq 0. \tag{5.69}$$

Ahora, suponga que sólo cambia el precio de x y supongamos que $p_y^C = p_y^D$. Entonces

$$(p_x^C - p_x^D)(x_C - x_D) \leq 0. \tag{5.70}$$

pero la ecuación 5.70 dice que el precio y la cantidad se mueven en sentido opuesto cuando se mantiene constante la utilidad (recuerde, los paquetes C y D son igual de atractivos). Ésta es precisamente una expresión sobre la naturaleza no positiva del efecto sustitución:

$$\frac{\partial x^c(p_x, p_y, V)}{\partial p_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x}\bigg|_{U = \text{constante}} \leq 0. \tag{5.71}$$

Hemos llegado al resultado mediante un planteamiento que no exige la existencia de una función de utilidad ni el supuesto de que la *TMS* sea decreciente.

Generalización matemática

La generalización de la idea de la preferencia revelada a n bienes es muy sencilla. A los precios p_i^0, si el individuo escoge el paquete x_i^0 en lugar del paquete x_i^1 y el paquete x_i^1 también es asequible, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^0 \geq s \sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^1; \tag{5.72}$$

es decir, "ha revelado que prefiere" el paquete 0 al paquete 1. Por consiguiente, a los precios que prevalecen cuando adquiere el paquete 1 (por ejemplo, p_i^1), seguramente será porque x_i^0 es más caro:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^0 > \sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^1. \tag{5.73}$$

Si bien esta definición inicial de las preferencias reveladas se centra en la relación entre los dos paquetes de bienes, la versión más utilizada del principio básico exige un grado de transitividad de las preferencias entre una cantidad de paquetes arbitrariamente grande. El siguiente "gran" axioma resume lo anterior:

DEFINICIÓN

Axioma de la preferencia fuertemente revelada. El *axioma de la preferencia fuertemente revelada* afirma que si el individuo revela que prefiere el paquete de bienes 0 al paquete 1, revela que prefiere el paquete 1 al paquete 2, revela que prefiere el paquete 2 al paquete 3, . . . , y si revela que prefiere el paquete $K-1$ al paquete K, *entonces* no puede revelar que prefiere el paquete K en lugar del paquete 0 (donde K es una cantidad arbitraria cualquiera de paquetes de bienes).

Podemos utilizar este axioma de la preferencia revelada para demostrar la mayor parte de las otras propiedades que hemos desarrollado utilizando el concepto de utilidad. Por ejemplo, resultará muy fácil demostrar que las funciones de demanda son homogéneas de grado cero en todos los precios y los ingresos. Por tanto, es evidente que el axioma de la preferencia revelada y la existencia de funciones de utilidad "que se comportan correctamente" son, de alguna manera, condiciones equivalentes. En 1950, H. S. Houthakker demostró, de hecho, que esto es así. Él demostró que siempre podemos derivar un conjunto de curvas de indiferencia en el caso de un individuo que obedece al gran axioma de la preferencia revelada.[11] Por tanto, este axioma ofrece un fundamento bastante general y creíble para la teoría de la utilidad a partir de sencillas comparaciones entre distintas restricciones del presupuesto. Este planteamiento es muy usado para construir índices de precios y para toda una serie de aplicaciones más.

RESUMEN

En este capítulo hemos utilizado el modelo de maximización de la utilidad para estudiar cómo la cantidad de un bien que elige un individuo responde a las variaciones de los ingresos o a las variaciones del precio de ese bien. El resultado final de este análisis es la derivación de la conocida curva de demanda con pendiente negativa. Sin embargo, al llegar a este resultado, hemos obtenido una amplia variedad de conocimientos sobre la teoría económica general de la elección:

- Los cambios proporcionales de todos los precios y los ingresos no desplazan la restricción presupuestaria del individuo y, por tanto, no alteran las cantidades de los bienes elegidos. En términos formales se dice que las funciones de la demanda son homogéneas de grado cero en todos los precios y los ingresos.

- Cuando cambia el poder adquisitivo (es decir, cuando los ingresos aumentan y los precios no cambian), las restricciones del presupuesto se desplazan y los individuos elegirán otros paquetes de bienes. En el caso de los bienes normales, un incremento del poder adquisitivo hace que el individuo elija más. Sin embargo, en el caso de los bienes inferiores, un incremento del poder adquisitivo hace que compre menos. Por tanto, el signo de $\partial x_i/\partial I$ podría ser positivo o negativo, si bien $\partial x_i/\partial I \geq 0$ es lo más frecuente.

- Una disminución del precio de un bien provoca un efecto ingreso y un efecto sustitución que, en el caso de un bien normal, hacen que el individuo compre más del bien. Sin em-

[11] H. S. Houthakker. "Revealed Preference and the Utility Function", *Economica 17,* mayo de 1950, pp. 159-174.

bargo, en el caso de los bienes inferiores, el efecto ingreso y el efecto sustitución operan en sentido opuesto y no es posible hacer una predicción contundente.

- De manera análoga, un incremento del precio provoca tanto un efecto ingreso como un efecto sustitución que, en el caso normal, hacen que el individuo demande menos cantidad. En el caso de los bienes inferiores el resultado neto vuelve a ser ambiguo.
- La curva de demanda marshalliana resume la cantidad total demandada de un bien a cada uno de los precios posibles. Los cambios del precio provocan tanto un efecto ingreso como un efecto sustitución, que inducen movimientos a lo largo de la curva. En el caso de un bien normal, $\partial x_i/\partial p_i \leq 0$ a lo largo de esta curva. Si los ingresos, los precios de los otros bienes o las preferencias cambian, entonces la curva se podría desplazar a otra ubicación.
- Las curvas de demanda compensada ilustran movimientos a lo largo de una determinada curva de indiferencia para distintos precios. Construimos estas curvas manteniendo constante la utilidad y sólo muestra el efecto sustitución provocado por una variación del precio. Por tanto, su pendiente es contundentemente negativa (o cero).
- En los trabajos empíricos, con frecuencia se utilizan las elasticidades de la demanda para resumir las reacciones de los individuos ante variaciones de los precios y los ingresos. La más importante de estas elasticidades es la elasticidad precio (propio) de la demanda, e_{x,p_x}. Ésta mide el cambio proporcional en la cantidad ante una variación del precio de 1%. Podemos definir una elasticidad similar para movimientos a lo largo de la curva de demanda compensada.
- Existen diversas relaciones entre las elasticidades de la demanda. Algunas de las más importantes son: 1) la elasticidad precio propio que determina cómo un cambio del precio afecta el total de gastos destinado a un bien; 2) la ecuación de Slutsky resume el efecto ingreso y el efecto sustitución en forma de elasticidad, y 3) diversas relaciones de agregación son válidas para las elasticidades y éstas muestran la relación que existe entre bienes diferentes.
- Podemos medir los efectos que los cambios de precio tienen en el bienestar cambiando las superficies que están debajo de las curvas de demanda normal o compensada. Estos cambios afectan el tamaño del excedente del consumidor que las personas obtienen cuando pueden realizar transacciones de mercado.
- La negatividad del efecto sustitución es uno de los hallazgos más fundamentales de la teoría de la demanda. Podemos demostrar este resultado empleando la teoría de la preferencia revelada, la cual no requiere necesariamente que supongamos que existe una función de utilidad.

PROBLEMAS

5.1

Ed "el sediento" sólo bebe agua mineral, pero la puede comprar en botellas de dos tamaños: una de 0.75 litros u otra de 2 litros. Dado que el agua es inherentemente idéntica, considera que estos dos "bienes" son sustitutos perfectos.

a. Suponiendo que la utilidad de Ed sólo depende de la cantidad de agua que consume y que las botellas no producen utilidad alguna, exprese esta función de utilidad en términos de cantidades de botellas de 0.75 litros (x) y de 2 litros (y).

b. Exprese la función de demanda de x que tiene Ed en términos de p_x, p_y e I.

c. Trace la curva de demanda de x, manteniendo constantes I y p_y.

d. ¿Los cambios de I y de p_y cómo desplazan la curva de la demanda de x?

e. ¿Qué forma tendría la curva de demanda compensada de x en esta situación?

5.2

Cada semana, David N., recibe $3 para gastarlos como quiera. Dado que sólo le gustan los sandwiches de mantequilla de cacahuete y mermelada, se gasta toda esta cantidad en mantequilla de cacahuate (a $0.05 la onza) y mermelada (a $0.10 la onza). Un vecino amable le regala el pan sin cargo alguno. David es muy especial para comer y hace sus sandwiches exactamente con una onza de mermelada y dos onzas de mantequilla de cacahuate. Es de ideas fijas y nunca cambia estas proporciones.

a. ¿Cuánta mantequilla y mermelada comprará David por semana con sus $3?

b. Suponga que el precio de la mermelada aumenta a $0.15 la onza. ¿Cuánto comprará de cada bien?

c. ¿Cuánto tendría que aumentar la paga de David para compensar el incremento del precio de la mermelada que establece el inciso anterior?

d. Elabore una gráfica de los resultados que haya obtenido en los incisos anteriores.

e. Este problema, ¿en qué sentido implica un solo bien: o sea sandwiches de mantequilla de cacahuate y mermelada? Trace la curva de la demanda de este único bien.

f. Analice los resultados de este problema en términos del efecto ingreso y el efecto sustitución que implica la demanda de mermelada.

5.3

Como definimos en el capítulo 3, una función de utilidad es homotética si una línea recta que parta del punto de origen corta todas las curvas de indiferencia en puntos que tienen la misma pendiente; es decir, la *TMS* depende de la proporción de y/x.

a. Demuestre que, en este caso, $\partial x/\partial I$ es constante.

b. Demuestre que si un mapa de curvas homotéticas de indiferencia representa los gustos de un individuo, entonces el precio y la cantidad se deben mover en direcciones opuestas; es decir, demuestre que la paradoja de Giffen no puede ocurrir.

5.4

Como en el ejemplo 5.1, suponga que la utilidad está determinada por

$$\textbf{utilidad} = U(x, y) = x^{0.3}y^{0.7}.$$

a. Utilice las funciones de demanda sin compensar del ejemplo 5.1 para calcular la función de utilidad indirecta y la función de gasto para este caso.

b. Utilice la función de gasto calculada en el inciso anterior y el lema de Shephard (nota 5 a pie de página) para calcular la función de demanda compensada para el bien x.

c. Utilice los resultados del inciso anterior y la función de demanda sin compensar del bien x para demostrar que, en este caso, se cumple la ecuación de Slutsky.

5.5

Suponga que la función de utilidad de los bienes x y y está determinada por

$$\textbf{utilidad} = U(x, y) = xy + y.$$

a. Calcule las funciones de demanda sin compensar (marshallianas) de x y de y también describa cómo las desplazan los cambios de I o del precio del otro bien.

b. Calcule la función de gasto de x y y.

c. Utilice la función de gasto calculada en el apartado anterior para calcular las funciones de demanda compensada de los bienes x y y. Describa cómo los cambios de los ingresos o los del precio del otro bien desplazan las curvas de demanda compensada de x y de y.

5.6

En las ampliaciones del capítulo 4 se demostró que la mayor parte de los trabajos empíricos de la teoría de la demanda se concentran en las porciones de los ingresos. En el caso de un bien, x, definimos la fracción del ingreso como $s_x = \frac{p_x x}{I}$. En este problema, se demostró que podemos derivar la mayor parte de las elasticidades de la demanda a partir de las correspondientes elasticidades de las porciones.

a. Demuestre que la elasticidad de la fracción del presupuesto para un bien, con relación al ingreso $(e_{s_x,I} = \frac{\partial s_x}{\partial I} \cdot \frac{I}{s_x})$ es igual a $e_{x,I} - 1$. Interprete esta conclusión con algunos ejemplos numéricos.

b. Demuestre que la elasticidad de la fracción del presupuesto para un bien, con relación a su precio propio $(e_{s_x,p_x} = \frac{\partial s_x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{s_x})$ es igual a $e_{x,px} + 1$. De nueva cuenta, interprete este resultado con algunos ejemplos numéricos.

c. Utilice los resultados del inciso anterior para demostrar que la "elasticidad gasto" del bien x con relación a su precio propio $(e_{x \cdot p_x,p_x} = \frac{\partial(p_x \cdot x)}{\partial p_x} \cdot \frac{1}{x})$ también es igual a $e_{x,px} + 1$.

d. Demuestre que la elasticidad de la fracción del presupuesto para un bien, con relación a un cambio de precio de otro bien $(e_{s_x,p_y} = \frac{\partial s_x}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{s_x})$ es igual a $e_{x,py}$.

e. En las ampliaciones del capítulo 4 se demostró que con una función de utilidad con CES, la fracción de los ingresos dedicada al bien x está determinada por $\boldsymbol{s_x = \frac{1}{1 + p_y^k p_x^{-k}}}$ **donde** $\boldsymbol{k = \frac{\delta}{\delta - 1} = 1 - \sigma}$.

Utilice esta ecuación de la fracción para probar la ecuación 5.56: $e_{x^c,px} = -(1 - s_x)\sigma$.

Pista: Podrá simplificar el problema suponiendo que $p_x = p_y$ en cuyo caso $s_x = 0.5$.

5.7

Suponga que una persona considera que el queso y el jamón son complementos puros; es decir que siempre utilizará una rebanada de jamón con una de queso para hacer un sandwich de jamón y queso. Suponga también que el jamón y el queso son los únicos bienes que adquiere la persona y que el pan es gratis. Demuestre:

a. Que si el precio del jamón es igual al precio del queso, entonces la elasticidad precio propio de la demanda de jamón es –0.5 y la elasticidad precios cruzados de la demanda de jamón con relación al precio del queso también es –0.5.

b. Explique por qué los resultados del inciso anterior tan sólo reflejan los efectos ingreso, pero no los efectos sustitución. ¿Cuáles son las elasticidades precio compensado en este problema?

c. Utilice los resultados del inciso anterior para demostrar los cambios que registrarían sus respuestas al inciso a si el precio de una rebanada de jamón es el doble que él de una rebanada de queso.

d. Explique cómo podría resolver este problema, por intuición, suponiendo que esta persona sólo consume un bien, o sea un sandwich de jamón y queso.

5.8

El inciso e del problema 5.6 tiene varias aplicaciones muy útiles porque demuestra cómo las respuestas del precio dependen, al final de cuentas, de los parámetros fundamentales de la función de utilidad. En concreto, utilice ese resultado y la ecuación de Slutsky en términos de elasticidad para demostrar:

a. En el caso Cobb-Douglas ($\sigma = 1$) la relación siguiente se cumple entre las elasticidades precio propio de x y y: $e_{x,p_x} + e_{y,p_y} = -2$.

b. Si $\sigma > 1$, $e_{x,p_x} + e_{y,p_x} < -2$ y si $\sigma < 1$, $e_{x,p_x} + e_{y,p_y} > -2$. Ofrezca una explicación intuitiva de este resultado.

c. ¿Cómo generalizaría este resultado a casos que incluyen más de dos bienes? Explique si esta generalización tendría significado especial.

5.9

Las tres relaciones de agregación que se presentan en este capítulo pueden ser generalizadas a una cantidad cualquiera de bienes. Este problema le pide que haga justo eso. Suponemos que hay n bienes y que s_i denota la fracción de los ingresos destinada al bien i. Además, definimos las elasticidades siguientes:

$$e_{i,I} = \frac{\partial x_i}{\partial I} \cdot \frac{I}{x_i}$$

$$e_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i}.$$

utilice la notación para demostrar:

a. Homogeneidad: $\sum_{j=1}^{n} e_{i,j} + e_{i,I} = 0.$

b. Agregación de Engel: $\sum_{i=1}^{n} s_i e_{i,I} = 1.$

c. Agregación de Cournot: $\sum_{i=1}^{n} s_i e_{i,j} = -s_j.$

5.10

En un periodo de tres años, un individuo observa el siguiente comportamiento de consumo:

	p_x	p_y	x	y
Año 1	3	3	7	4
Año 2	4	2	6	6
Año 3	5	1	7	3

¿Este comportamiento es congruente con el gran axioma de la preferencia revelada?

LECTURAS RECOMENDADAS

Cook, P. J. "A 'One Line' Proof of the Slutsky Equation", *American Economic Review 62*, marzo de 1972, p. 139.

Inteligente uso de la dualidad para derivar la ecuación de Slutsky; utiliza el mismo método que se utilizó en el capítulo 5, pero con una notación bastante compleja.

Fisher, F. M. y K. Shell. *The Economic Theory of Price Indices,* Academic Press, Nueva York, 1972.

Explicación técnica muy completa acerca de las propiedades de diversos índices de precios; describe índices "ideales" basados, con gran detalle, en modelos de maximización de la utilidad.

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston y Jerry R. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Nueva York, 1995.

El capítulo 3 abarca gran parte del material de este capítulo, pero con un nivel más alto. La sección I sobre la medición de los efectos que los cambios de precio tienen en el bienestar es muy recomendable.

Samuelson, Paul A. *Foundations of Economic Analysis,* cap. V, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947.

Presenta un análisis muy completo del efecto ingreso y el efecto sustitución. También explica la noción de la preferencia revelada.

Silberberg, E y W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis,* 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2001.

Presenta una amplia derivación de la ecuación de Slutsky y una extensa explicación de los conceptos de elasticidad.

Sydsaetter, K., A. Strom y P. Berck. *Economist's Mathematical Manual,* ed. 2003, Springer-Verlag, Berlín, 2003.

Presenta un resumen compacto de los conceptos de elasticidad. Abarca la elasticidad de las nociones de la sustitución de modo sumamente completo.

Varian, H. *Microeconomic Analysis,* 3a. ed., W. W. Norton, Nueva York, 1992.

Análisis formal de las nociones de las preferencias. Amplio uso de las funciones del gasto y su relación con la ecuación de Slutsky. También contiene una prueba de la identidad de Roy.

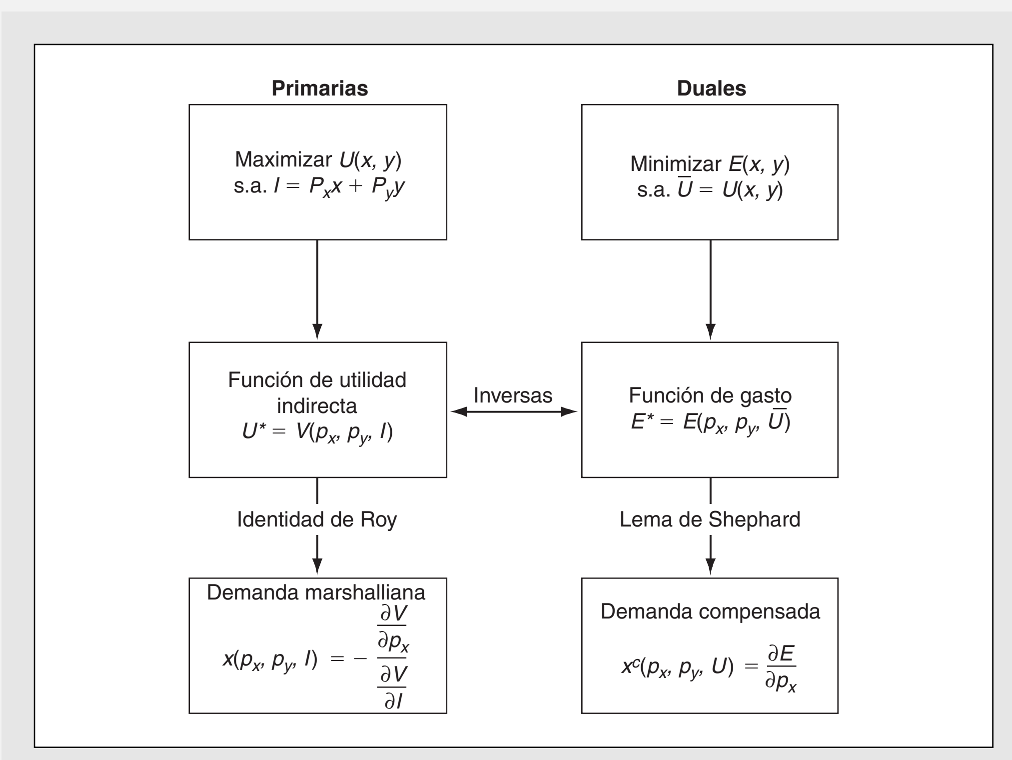
AMPLIACIONES

Conceptos de demanda y la evaluación de índices de precios

En los capítulos 4 y 5 introdujimos una serie de conceptos relacionados con la demanda y todos ellos derivados del modelo básico de la maximización de la utilidad. La figura A.51 resume las relaciones entre los diversos conceptos. También hemos visto, formalmente, la mayor parte de los nexos que aparecen en la tabla. Aún no hemos analizado la relación matemática entre las funciones de utilidad indirecta y las funciones de demanda marshalliana (identidad de Roy), cosa que haremos a continuación. Toda la información que contiene la tabla deja en claro que existen muchas maneras de aprender algo respecto a las relaciones entre el bienestar de los individuos y los precios que afrontan. En esta extensión analizaremos algunos de estos planteamientos. En concreto, veremos cómo los conceptos arrojan luz sobre la exactitud del índice de precios al consumidor (IPC), la principal medida de la inflación en Estados Unidos. Medidas similares del costo de la vida son utilizadas en todo el mundo.

El IPC es un índice de "una canasta básica" que representa el costo de la vida. Los investigadores miden las cantidades que la gente consume de un conjunto de bienes durante un periodo base cualquiera (en el caso de los dos bienes estos niveles de consumo durante el periodo base podrían estar denotados por x_0 y y_0) y, a continuación, utilizan datos del periodo actual para calcular el cambio de precio de esa canasta básica. Con este procedimiento, el costo inicial de la canasta básica es $I_0 = p_x^0 x_0 + p_y^0 y_0$ y el costo del periodo 1 es $I_1 = p_x^1 x_0 + p_y^1 y_0$. Así, I_1 / I_0.

FIGURA A5.1 **Relaciones entre conceptos de demanda**



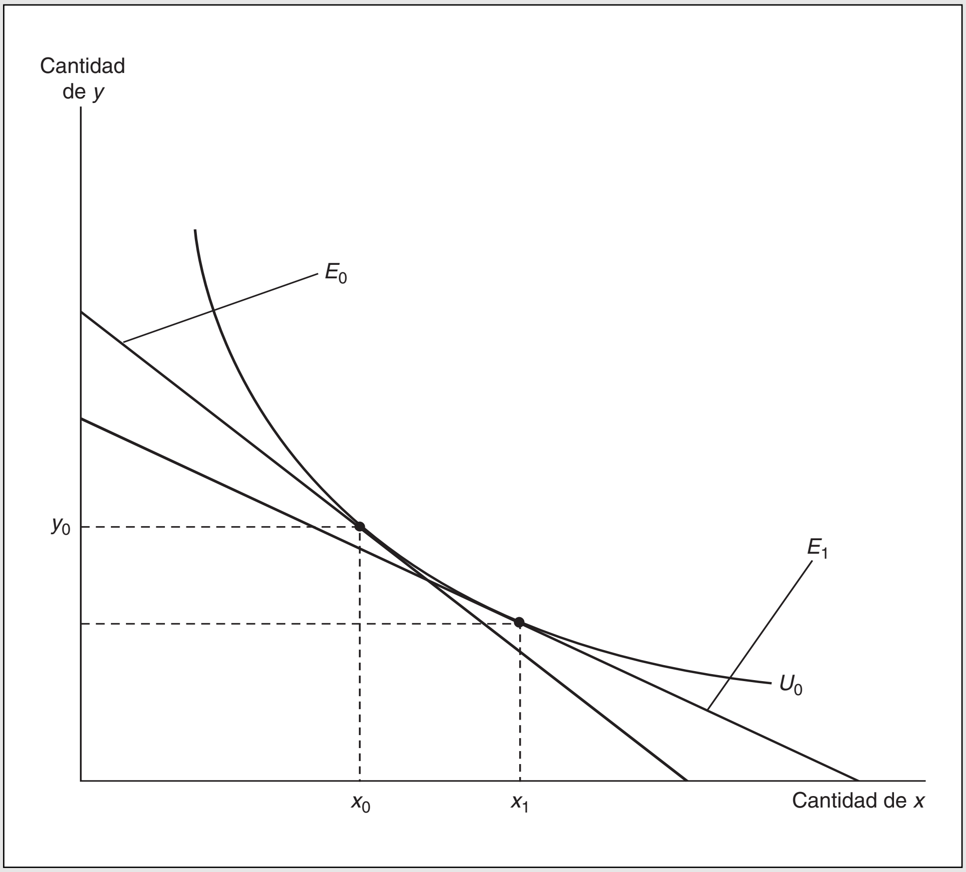
miden el cambio del costo de la vida entre estos dos periodos. Si bien la intuición nos dice que este procedimiento es una forma plausible de medir la inflación, cabe aclarar que aun cuando los índices de precios de la canasta básica son muy utilizados, también tienen muchas fallas, las cuales podemos ilustrar empleando diversos conceptos de la demanda.

A5.1: Funciones de gasto y sesgo de sustitución

Los índices de precios de la canasta básica tienen un "sesgo de sustitución". Dado que no permiten que los individuos sustituyan elementos de la canasta básica ante los cambios de los precios relativos, entonces tenderán a exagerar las pérdidas de bienestar que sufren las personas a consecuencia del aumento de precios. La figura A5.2 ilustra esta exageración. El individuo, para alcanzar inicialmente el nivel de utilidad U_0 necesita gastos por la cantidad de E_0 lo cual da por resultado que adquiera la canasta x_0, y_0. Si p_x/p_y disminuye, ahora podrá obtener el nivel de utilidad con gastos por E_1 modificando el paquete de consumo x_1, y_1. El cálculo del nivel de gasto necesario para seguir consumiendo x_0, y_0 exagera la cantidad de poder adquisitivo adicional que la persona necesita para restaurar su nivel de bienestar. La economía ha estudiado extensamente este sesgo de sustitución. Por ejemplo, Aizcorbe y Jackman (1993) encuentran que esta dificultad del índice de la canasta de mercado podría exagerar el nivel de inflación que refleja el IPC en una magnitud del orden de 0.2% al año.

FIGURA A5.2 **Sesgo de sustitución del IPC**

Al inicio, los gastos están determinados por E_0 y este individuo adquiere x_0, y_0. Si p_x/p_y disminuye, entonces la forma más barata de alcanzar el nivel de utilidad U_0 es consumiendo x_1, y_1 y gastando E_1. Las compras de x_0, y_0 a los nuevos precios costarían más que E_1. Por tanto, mantener constante el conjunto de consumo imprime un sesgo ascendente a los cálculos de índices de precios como el IPC.



A5.2: La identidad de Roy y el sesgo de los bienes nuevos

Cuando los bienes nuevos son introducidos, debe pasar algún tiempo para que queden integrados al IPC. Por ejemplo, Hausman (1999, 2003) dice que los teléfonos celulares tardaron más de 15 años en aparecer en el índice. El problema de esta demora es que los índices de la canasta básica no reflejarán las ganancias en bienestar que las personas registran al utilizar los bienes nuevos. Hausman, para medir estos costos, trató de medir un precio "virtual" (p^*) en el cual la demanda, por decir, de teléfonos celulares fuera cero y, de ahí, argumentar que la introducción del bien a su precio de mercado representaba un cambio en el excedente del consumidor que podía ser medido. Por tanto, el autor afrontó el problema de cómo pasar de la función de demanda marshalliana de teléfonos celulares (la cual estimó econométricamente) a la función de gasto. Para hacerlo, usó la identidad de Roy (véase Roy, 1942). Recuerde que podemos representar el problema de la maximización de la utilidad del consumidor mediante la expresión lagrangiana $\mathscr{L} = U(x, y) + \lambda(I - p_x x - p_y y)$. Si se aplica el teorema de la envolvente a esta expresión, sabremos que

$$\frac{\partial U^*}{\partial p_x} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p_x} = -\lambda x(p_x, p_y, I)$$

y **(i)**

$$\frac{\partial U^*}{\partial I} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial I} = \lambda.$$

Por tanto, la función de demanda marshalliana estará determinada por

$$x(p_x p_y, I) = \frac{-\partial U^* / \partial p_x}{\partial U^* / \partial I}. \tag{ii}$$

Hausman, utilizando sus cálculos de la función de demanda marshalliana, integró la ecuación ii para obtener la función implícita de utilidad indirecta y, de ahí, calculó la inversa, o sea la función de gasto (véase la figura A5.1 para encontrar la lógica del proceso). Aun cuando definitivamente no se trata de un plan totalmente redondeado, sí produjo estimados muy grandes de la ganancia de bienestar del consumidor derivada de los teléfonos celulares; un valor presente en 1999 de más de 100 mil millones de dólares por año. Por tanto, las demoras en la inclusión de estos bienes al IPC pueden resultar una medida equivocada del bienestar del consumidor.

A5.3: Otras quejas acerca del IPC

Los investigadores han encontrado otras fallas en el IPC tal como se construye actualmente. La mayor parte de ellas se concentran en las consecuencias de utilizar precios incorrectos para computar el índice. Por ejemplo, cuando mejora la calidad de un bien, las personas estarán en mejor posición, aun cuando ello no se refleje en su precio. A lo largo de las décadas de los setenta y de los ochenta, la confiabilidad de los televisores a color mejoró enormemente, pero el precio de un aparato no cambió mucho. Una canasta básica que incluyera "un televisor a color" no incluiría esta fuente de mejora para el bienestar. Asimismo, la inauguración de grandes tiendas minoristas como las de Costco y Home-Depot en la década de los noventa sin lugar a dudas redujo los precios que los consumidores pagaban por diversos bienes. No obstante, la inclusión de estas nuevas tiendas minoristas en el plan de la muestra para armar el IPC tardó varios años, de modo que el índice no reflejaba correctamente lo que la gente estaba pagando de hecho. Evaluar la magnitud del error que introducen los casos en los cuales el IPC usa precios incorrectos también ocurre cuando se utilizan los distintos conceptos de demanda que presenta la figura A5.1. Encontrará un resumen de esta investigación en Moulton (1996).

Referencias

Aizcorbe, Ana M. y Patrick C. Jackman. "The Commodity Substitution Effect in CPI Data, 1982-91", *Monthly Labor Review*, diciembre de 1993, pp. 25-33.

Hausman, Jerry. "Cellular Telephone, New Products, and the CPI", *Journal of Business and Economic Statistics*, abril de 1999, pp. 188-194.

Hausman, Jerry. "Sources of Bias and Solutions to Bias in the Consumer Price Index", *Journal of Economic Perspectives*, invierno de 2003, pp. 23-44.

Moulton, Brent R. "Bias in the Consumer Price Index: What Is the Evidence", *Journal of Economic Perspectives*, otoño de 1996, pp. 159-177.

Roy, R. *De l'utilité, contribution à la théorie des choix*, Hermann, París, 1942.

Capítulo 6

RELACIONES DE DEMANDA ENTRE BIENES

En el capítulo 5 analizamos cómo las variaciones del precio de un bien (por ejemplo, el bien x*) afectan la cantidad que el individuo escoge de ese bien. A lo largo de la explicación se mantuvieron constantes los precios de todos los demás bienes. Sin embargo, seguramente ha quedado claro que la variación en alguno de estos otros precios también afectaría la cantidad que escoja de* x*. Por ejemplo, si suponemos que* x *representa la cantidad de kilómetros que recorre un conductor en su automóvil, entonces cabe esperar que esta cantidad disminuya cuando el precio de la gasolina aumenta o que aumente cuando se incrementan los precios de los boletos de avión y de autobús. En este capítulo utilizaremos el modelo de maximización de la utilidad para estudiar estas relaciones.*

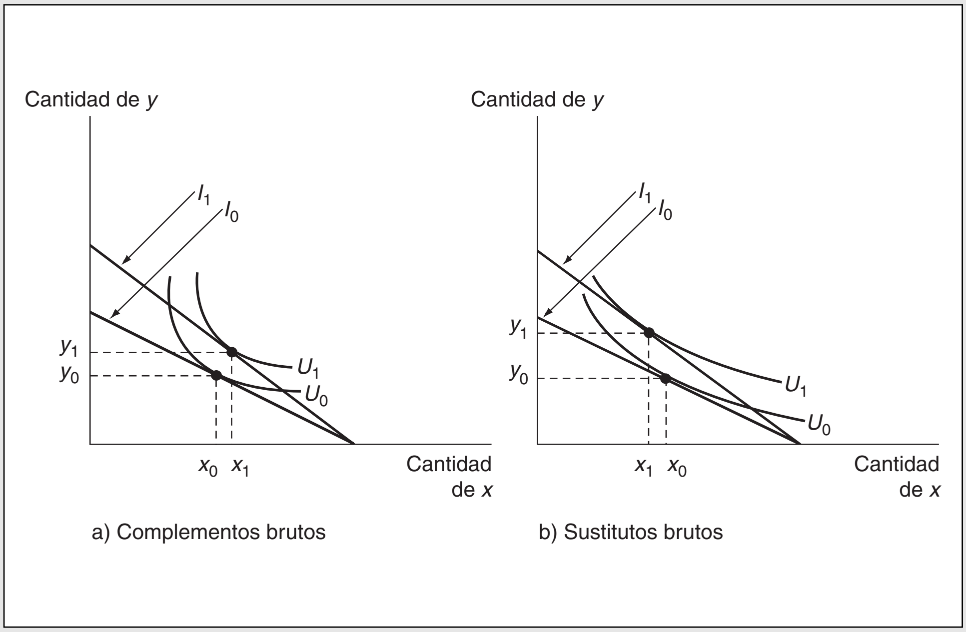
El caso de dos bienes

Iniciamos el análisis de las relaciones de la demanda de varios bienes partiendo del caso de dos bienes. Por desgracia, éste resulta poco interesante debido a que los tipos de relaciones que ocurren cuando sólo hay dos bienes son muy pocas. La figura 6.1 inicia nuestro análisis y muestra dos ejemplos de cómo la cantidad elegida del bien x se vería afectada cuando el precio de y. cambia. En las dos secciones de la figura, p_y ha disminuido, lo cual provoca que la restricción del presupuesto se desplace hacia fuera, de I_0 a I_1. Además, en ambos casos, la cantidad elegida del bien y ha aumentado de y_0 a y_1 como consecuencia de la disminución de p_y, tal como cabría esperar si y es un bien normal. Sin embargo, en el caso del bien x, los resultados de las dos secciones son diferentes. En la sección (a), las curvas de indiferencia casi llegan a tener forma de L, lo cual implica un efecto sustitución bastante pequeño. Una disminución de p_y no causa un movimiento demasiado grande a lo largo de U_0 a medida que y va siendo sustituida por x. Es decir, x disminuye relativamente poco como resultado de la sustitución. Sin embargo, el efecto ingreso refleja que ahora hay más poder adquisitivo disponible y ello hace que aumente la cantidad total elegida de x. Por tanto, $\partial x/\partial p_y$ es negativa (x y p_y se mueven en direcciones opuestas).

En la figura 6.1b se invierte la situación; es decir, $\partial x/\partial p_y$ es positiva. Las curvas de indiferencia relativamente planas de esta figura dan por resultado un gran efecto sustitución debido a la disminución de p_y. La cantidad de x disminuye pronunciadamente a medida que y es sustituida por x a lo largo de U_0. Como en la figura 6.1a, el aumento de poder adquisitivo debido a la reducción de p_y aumenta la cantidad que se compra de x pero ahora domina el efecto sustitución y la cantidad de x disminuye a x_1. Por tanto, en este caso, x y p_y se mueven en la misma dirección.

FIGURA 6.1 **Direcciones opuestas de los efectos cruzados de precios**

El precio de y ha disminuido en las dos secciones. En la a) los efectos sustitución son pequeños, por lo cual la cantidad de x consumida aumenta al mismo tiempo que y. Dado que $\partial x/\partial p_y < 0$, x y y son complementos. En la b), los efectos sustitución son grandes, por lo cual la cantidad elegida de x disminuye. Dado que $\partial x/\partial p_y > 0$, entonces diríamos que x y y son *sustitutos brutos.*



Un tratamiento matemático

Podemos ilustrar incluso más la ambigüedad del efecto de las variaciones de p_y con una ecuación de tipo Slutsky. Al usar procedimientos análogos a los del capítulo 5, resulta bastante fácil demostrar que

$$\frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial p_y} = \text{Efecto sustitución} + \text{Efecto ingreso} = \left.\frac{\partial x}{\partial p_y}\right|_{U=\text{constante}} - y \cdot \frac{\partial x}{\partial I}, \tag{6.1}$$

o, en términos de elasticidad,

$$e_{x,p_y} = e_{x^c,p_y} - s_y e_{x,I}. \tag{6.2}$$

Nótese que, la magnitud del efecto ingreso está determinada por la fracción del bien y dentro de las compras de esta persona. El efecto que una variación de p_y tiene en el poder adquisitivo está determinado por la importancia que esta persona conceda a y.

En el caso de dos bienes, los términos a la derecha de las ecuaciones 6.1 y 6.2 tienen signos diferentes. Si suponemos que las curvas de indiferencia son convexas, entonces el efecto sustitución $\partial x/\partial p_y \big| U$ = constante es positivo. Si nos limitamos a los movimientos a lo largo de una curva de indiferencia, entonces los incrementos de p_y incrementarán x y los decrementos de p_y reducirán la cantidad elegida de x. Sin embargo, si suponemos que x es un bien normal, entonces el efecto ingreso ($-\,y\partial x/\partial I$ o $-s_y e_{x,I}$) es claramente negativo. Por tanto, el efecto combinado es ambiguo; es decir, $\partial x/\partial p_y$ podría ser positiva o negativa. Incluso en el caso de dos bienes, la relación de la demanda entre x y p_y es bastante compleja.

EJEMPLO 6.1

Otra desagregación de Slutsky para los efectos cruzados de precios

En el ejemplo 5.4 se analizó la desagregación de Slutsky en el caso del efecto de una variación del precio de x. Ahora se verá el efecto cruzado de precios que un cambio en el precio de y tiene en las compras de x. Recuerde que las funciones de la demanda de x compensada y sin compensar, están determinadas por

$$x(p_x, p_y, I) = \frac{0.5I}{p_x} \tag{6.3}$$

y

$$x^c(p_x, p_y, V) = Vp_y^{0.5} p_x^{-0.5}. \tag{6.4}$$

Como se ha señalado antes, en este caso, la función de demanda marshalliana nos dará $\frac{\partial x}{\partial p_y} = 0$; es decir, los cambios en el precio de y no afectan las compras de x. A continuación se demuestra que esto se debe a que el efecto ingreso y el efecto sustitución de una variación del precio se equilibran exactamente el uno al otro. En este caso, el efecto sustitución está determinado por

$$\left.\frac{\partial x}{\partial p_y}\right|_{U=\text{constante}} = \frac{\partial x^c}{\partial p_y} = 0.5Vp_y^{-0.5} p_x^{-0.5}. \tag{6.5}$$

Si se sustituye V de la función de utilidad indirecta ($V = 0.5Ip_y^{-0.5}p_x^{-0.5}$) obtendremos una expresión final del efecto sustitución:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial p_y}\right|_{U=\text{constante}} = 0.25Ip_y^{-1} p_x^{-1}. \tag{6.6}$$

Si volvemos a la función de demanda marshalliana para y ($y = 0.5Ip_y^{-1}$) para calcular el efecto ingreso se obtendrá

$$-y\frac{\partial x}{\partial I} = -[0.5Ip_y^{-1}]\cdot[0.5p_x^{-1}] = -0.25Ip_y^{-1}p_x^{-1}, \tag{6.7}$$

y, por tanto, el efecto total de la variación del precio de y es

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} = 0.25Ip_y^{-1}p_x^{-1} - 0.25Ip_y^{-1}p_x^{-1} = 0. \tag{6.8}$$

Lo anterior deja en claro que la razón por la cual los cambios en el precio de y no tienen efecto en las compras de x en el caso Cobb-Douglas, es que el efecto ingreso y el efecto sustitución de este cambio se cancelan exactamente el uno al otro, sin embargo, ninguno de los dos efectos sólo es igual a cero.

Volvamos a nuestro ejemplo numérico ($p_x = 1$, $p_y = 4$, $I = 8$, $V = 2$), y supongamos ahora que p_y disminuye a 2. Esto no debería tener efecto alguno en la demanda marshalliana del bien x. La función de demanda compensada de la ecuación 6.4 muestra que la variación del precio provocaría que la cantidad demandada de x disminuyera de 4 a 2.83 ($= 2\sqrt{2}$), pues y es sustituida por x sin cambio en la utilidad. No obstante, el aumento del poder adquisitivo que se deriva de la disminución del precio revierte este efecto.

Pregunta: ¿Por qué sería incorrecto argumentar que si $\partial_x/\partial p_y = 0$, x y y no tendrían posibilidades de sustitución; es decir, deben ser consumidas en proporciones fijas? ¿Existe algún caso en el cual podamos llegar a esta conclusión?

Sustitutos y complementos

Cuando tenemos muchos bienes, existe mucho mayor espacio para que ocurran relaciones interesantes entre los mismos. Es relativamente fácil generalizar la ecuación de Slutsky para dos bienes cualesquier, x_i, x_j, como

$$\frac{\partial x_i(p_1 \cdots p_n, I)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}\bigg|_{U=\text{constante}} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial I}, \tag{6.9}$$

y, de nueva cuenta, podemos traducir lo anterior fácilmente a una relación de elasticidad:

$$e_{i,j} = e^c_{i,j} - s_j e_{i,x}. \tag{6.10}$$

Esto expresa que el cambio de precio de un bien cualquiera (en este caso el bien j) causa efectos ingreso y efectos sustitución que pueden modificar la cantidad demandada de cada uno de los bienes. Podemos utilizar las ecuaciones 6.9 y 6.10 para explicar el concepto de sustitutos y de complementos. La intuición nos dice que estos conceptos son bastante sencillos. Dos bienes son *sustitutos* cuando, como resultado de un cambio de condiciones, uno puede ser sustituido por el otro sin alterar su uso. Por ejemplo, el té y el café, las hamburguesas y las pizzas y la mantequilla y la margarina. De otra parte, los *complementos* "van juntos", como el café y la leche, el pollo y las patatas fritas o el coñac y los puros. En cierto sentido, los "sustitutos" pueden ser reemplazados uno por otro en cuanto a su función de utilidad, pero los "complementos" se combinan el uno al otro.

Existen dos formas de precisar más estos dos conceptos intuitivos. Una se refiere a los efectos "brutos" de las variaciones del precio e incluye tanto el efecto ingreso como el efecto sustitución, mientras que la otra sólo se concentra en los efectos sustitución. Dado que las dos definiciones se utilizan con frecuencia, a continuación las analizaremos con detalle.

Sustitutos y complementos brutos

Podemos definir las relaciones entre bienes que se sustituyen o se complementan refiriéndonos a las reacciones observadas de los precios con la siguiente:

DEFINICIÓN

Sustitutos y complementos brutos. Se dice que dos bienes, x_i y x_j, son sustitutos brutos si

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0 \tag{6.11}$$

y complementos brutos si

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < 0. \tag{6.12}$$

Es decir, dos bienes son sustitutos brutos si un incremento en el precio de un bien hace que compremos más del otro bien. Son complementos brutos si un incremento en el precio de un bien hace que compremos menos del otro bien. Por ejemplo, si aumenta el precio del café, cabe esperar que aumente la demanda de té (son sustitutos), mientras que la demanda de leche podría disminuir (el café y la leche son complementos). La ecuación 6.9 deja en claro que estamos hablando de una definición del concepto de "bruto", porque incluye tanto el efecto ingreso como el efecto sustitución que surgen de una variación del precio. Dado que, en una observación que hagamos del mundo real, estos efectos de hecho se presentan combinados, sería razonable hablar siempre tan sólo de sustitutos "brutos" y de complementos "brutos".

Asimetría de las definiciones de bruto

Sin embargo, las definiciones de bruto en el caso de sustitutos y complementos tienen varios aspectos poco deseables. El más importante es que las definiciones no son simétricas. De acuerdo con estas definiciones, podría ocurrir que x_1 sea sustituto de x_2 y, al mismo tiempo, que x_2 sea complemento de x_1. La presencia del efecto ingreso tiene resultados paradójicos. Veamos un ejemplo concreto:

EJEMPLO 6.2

Asimetría de los efectos cruzados de precios

Supongamos que la función de utilidad de dos bienes (x y y) está determinada por

$$U(x, y) = \ln x + y. \tag{6.13}$$

Al escribir la expresión lagrangiana tendremos

$$\mathscr{L} = \ln x + y + \lambda\,(I - p_x x - p_y y) \tag{6.14}$$

que permite obtener las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} &= \frac{1}{x} - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} &= 1 - \lambda p_y = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= I - p_x x - p_y y = 0. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Si pasamos los términos con λ a la derecha y se divide la primera ecuación entre la segunda se obtendrá

$$\frac{1}{x} = \frac{p_x}{p_y} \tag{6.16}$$

$$p_x x = p_y. \tag{6.17}$$

La sustitución en la restricción del presupuesto ahora permite resolver la función de demanda marshalliana para y:

$$I = p_x x + p_y y = p_y + p_y y. \tag{6.18}$$

Por tanto,

$$y = \frac{I - p_y}{p_y} \tag{6.19}$$

Esta ecuación demuestra que un incremento de p_y seguramente reduce el gasto para el bien y (es decir, $p_y y$). Por tanto, dado que p_x e I no cambian, el gasto para x seguramente aumenta. Así pues,

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} > 0, \tag{6.20}$$

y diríamos que x y y son sustitutos brutos. De otra parte, la ecuación 6.19 demuestra que el gasto para y es independiente de p_x. Por tanto,

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} = 0 \tag{6.21}$$

y, visto así, diríamos que, x y y son independientes uno del otro; es decir, no son sustitutos brutos ni complementos brutos. Por tanto, recurrir a las respuestas del mercado para definir la relación bruta entre x y y provocaría, por tanto, ambigüedades.

Pregunta: En el ejemplo 3.4 se demostró que la función de utilidad de la forma dada por la ecuación 6.13 es homotética; es decir, la *TMS* no depende únicamente de la proporción de x a y. ¿En el caso homotético puede haber asimetría?

Sustitutos y complementos netos

Debido a las posibles asimetrías que implica la definición de sustitutos y complementos brutos, a veces se utiliza una definición alternativa que se centra únicamente en los efectos sustitución:

DEFINICIÓN

Sustitutos y complementos netos.[1] Se dice que x_i y x_j son sustitutos netos si

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{U\,=\,\text{constante}} > 0 \tag{6.22}$$

y complementos netos si

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{U\,=\,\text{constante}} < 0 \tag{6.23}$$

Estas definiciones, por tanto, sólo observan los términos de sustitución para determinar si dos bienes son sustitutos o complementos. Esta definición resulta atractiva desde el punto de vista intuitivo (porque sólo observa la forma de la curva de indiferencia) y deseable desde el punto de vista teórico (porque no es ambigua). Una vez que hemos encontrado que x_i y x_j son sustitutos, siguen siendo sustitutos, independientemente del sentido en el cual apliquemos la definición. De hecho, las definiciones son perfectamente simétricas:

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{U\,=\,\text{constante}} = \left.\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right|_{U\,=\,\text{constante}}. \tag{6.24}$$

El efecto sustitución que una variación de p_i tiene en el bien x_j es idéntico al efecto sustitución que una variación de p_j tiene en la cantidad de x_i elegida. Esta simetría es importante, tanto en los trabajos teóricos como en los empíricos.[2]

La figura 6.1a sirve para demostrar, fácilmente, las diferencias entre las dos definiciones de sustitutos y complementos. En la misma, x y y son complementos brutos, pero son sustitutos netos. La derivada $\partial x/\partial p_y$ resulta negativa (x y y son complementos brutos) porque el efecto sustitución (positivo) pesa menos que el efecto ingreso (negativo), (una disminución del precio de y hace que el ingreso real aumente mucho y, por tanto, aumentan las compras de x). Sin embargo, como vemos con claridad en la figura, si sólo podemos escoger entre dos bienes, éstos deben ser sustitutos netos, aun cuando puedan ser sustitutos brutos o complementos brutos. Dado que hemos supuesto que la *TMS,* es decreciente, entonces el efecto sustitución del propio precio debe ser negativo y, por tanto, el efecto sustitución cruzado de los precios debe ser positivo.

---

[1]Algunas veces se conocen como sustitutos y complementos "hicksianos", por el economista británico John Hicks, que fue el primero en plantear estas definiciones.

[2]Podemos demostrar fácilmente esta simetría usando el lema de Shephard, que presentamos en el capítulo 5, en la nota 5 a pie de página. Ahí, demostramos que, partiendo de las funciones del gasto, podemos calcular las funciones de demanda compensada mediante la diferenciación:

$$x_i^c(p_1 \cdots p_n, V) = \frac{\partial E(p_1 \cdots p_n, V)}{\partial p_i}. \tag{i}$$

Por tanto, el efecto sustitución está dado por

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{U=\text{constante}} = \frac{\partial x_i^c}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_j \partial p_i} = E_{ij}. \tag{ii}$$

Pero ahora podemos aplicar el teorema de Young a la función del gasto:

$$E_{ij} = E_{ji} = \frac{\partial x_j^c}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right|_{U=\text{constante}}, \tag{iii}$$

que demuestra la simetría.

Sustitución con muchos bienes

Cuando extendemos el modelo de maximización de la utilidad al caso de muchos bienes surge una enorme variedad de patrones posibles de la demanda. El hecho de que un par determinado de bienes sea de sustitutos netos o de complementos netos es cuestión, básicamente, de las preferencias de una persona, por tanto podríamos observar toda suerte de extrañas relaciones. Una cuestión teórica fundamental que ha interesado a los economistas es saber si la sustitución o la complementariedad es lo que más prevalece. En casi todos los planteamientos consideramos que los bienes son sustitutos (un aumento del precio en un mercado suele aumentar la demanda en casi todos los otros mercados). Sería conveniente saber si esta intuición está justificada.

El economista británico John Hicks estudió este tema con bastante detalle hace 50 años y llegó a la conclusión de que la "mayor parte" de los bienes serían sustitutos. El resultado está resumido en lo que ahora llamamos[3] "la segunda ley de la demanda de Hicks". Una prueba moderna empieza con la función de demanda compensada de un bien concreto: $x_i^c(p_1 \ . \ . \ . \ p_n, V)$. Esta función es homogénea de grado cero en todos los precios (si mantenemos la utilidad constante y los precios se duplican, las cantidades demandadas no cambian porque las tangentes que maximizan la utilidad no cambian). Si aplicamos el teorema de Euler a la función se obtendrá

$$p_1 \cdot \frac{\partial x_i^c}{\partial p_1} + p_2 \cdot \frac{\partial x_i^c}{\partial p_2} + \cdots + p_n \cdot \frac{\partial x_i^c}{\partial p_n} \equiv 0. \tag{6.25}$$

Podemos escribir este resultado en términos de elasticidad si se divide la ecuación 6.25 entre x_i:

$$e_{i1}^c + e_{i2}^c + . \ . \ . + e_{in}^c \equiv 0. \tag{6.26}$$

Pero sabemos que $e_{ii}^c \leq 0$ debido a que el propio efecto de sustitución es negativo. Por tanto, seguramente será el caso de que

$$\sum_{j \neq i} e_{ij}^c \geq 0. \tag{6.27}$$

Lo anterior, indica que la suma de todas las elasticidades cruzadas de precios compensados de bienes determinados deben ser positivas (o igual a cero). Éste es el sentido en el cual "la mayor parte" de los bienes son sustitutos. En general, la evidencia empírica parece coincidir con este resultado teórico; en los estudios empíricos de la demanda encontramos ejemplos de una complementariedad neta entre los bienes con relativa poca frecuencia.

Bienes agregados

El análisis de la sección anterior demostraba que las relaciones de demanda entre bienes son bastante complejas. En el caso más general, un individuo que consume n bienes tendrá funciones de demanda que reflejan $n(n + 1)/2$ efectos sustitución diferentes.[4] Cuando n es muy grande (como ciertamente es el caso de todos los bienes que los individuos consumen de hecho), este caso general puede ser inmanejable. Con frecuencia es mucho más cómodo agrupar los bienes en agregados más grandes, como los alimentos, la ropa, la vivienda, etc. En el nivel más extremo de los agregados, tal vez queramos analizar un bien específico (por ejemplo, la gasolina, que llamaríamos x) y su relación con "todos los demás bienes", que llamaríamos y. Éste es el procedi-

---

[3]Véanse John Hicks, *Value and Capital* (Oxford: Oxford University Press, 1939), y los apéndices matemáticos. Existe cierta polémica en torno a si el resultado se debe llamar la "segunda" o la "tercera" ley de Hicks. De hecho, otras dos leyes que hemos visto corresponden a Hicks: 1) $\dfrac{\partial x_i^c}{\partial p_i} \leq 0$ (negatividad del propio efecto sustitución); y 2) $\dfrac{\partial x_i^c}{\partial p_j} = \dfrac{\partial x_j^c}{\partial p_i}$ (simetría de efectos cruzados de sustitución. Sin embargo en el resumen que escribió sobre sus resultados, él sólo habla de dos "propiedades" explícitamente.

[4]Para ver por qué, nótese que todos los efectos sustitución, s_{ij}, pueden ser representados en una matriz $n \times n$. Sin embargo, la simetría de los efectos ($s_{ij} = s_{ji}$) implica que sólo los términos que estén sobre la diagonal principal de esta matriz, o abajo de ella, pueden ser distintos unos de otros. Esto representa la mitad de los términos de la matriz $\left(\frac{1}{2}n^2\right)$ más la mitad restante de los términos sobre la diagonal principal de la matriz $\left(\frac{1}{2}n\right)$.

miento que hemos venido utilizando en algunas de nuestras gráficas bidimensionales y seguiremos haciéndolo en muchos otros puntos de este libro. En esta sección se mostrarán las condiciones que permiten defender este procedimiento. En la ampliación de este capítulo, se analizarán cuestiones más generales sobre la agregación de bienes en grupos más grandes.

El teorema de la agregación de bienes

Supongamos que los consumidores escogen entre n bienes, pero que a nosotros sólo nos interesa concretamente uno de ellos, por ejemplo, x_1. En general, la demanda de x_1 dependerá de los precios individuales de los demás $n - 1$ bienes. Sin embargo, si todos estos precios se mueven en la misma dirección, tal vez tenga sentido juntarlos en un único "bien agregado", y. En términos formales, si $p_2^0 \ldots p_n^0$ representan los precios iniciales de estos bienes, entonces suponemos que estos precios sólo pueden variar juntos. Todos ellos se podrían duplicar o reducir 50%, pero los precios relativos de $x_2 \ldots x_n$ no cambiarían. Ahora definiremos el bien agregado y como el total de gastos para $x_2 \ldots x_n$, utilizando los precios iniciales $p_2^0 \ldots p_n^0$:

$$y = p_2^0 x_2 + p_3^0 x_3 + \ldots + p_n^0 x_n. \tag{6.28}$$

La restricción del presupuesto inicial de esta persona está determinada por

$$I = p_1 x_1 + p_2^0 x_2 + \ldots + p_n^0 x_n = p_1 x_1 + y. \tag{6.29}$$

Dado nuestro supuesto, todos los precios $p_2 \ldots p_n$ se mueven al unísono. Suponga que todos estos precios cambian por un factor t ($t > 0$). Ahora, la restricción del presupuesto será

$$I = p_1 x_1 + t p_2^0 y_2 + \ldots + t p_n^0 x_n = p_1 x_1 + t y. \tag{6.30}$$

Por tanto, el factor de proporcionalidad t desempeña el mismo papel en la restricción del presupuesto de esta persona que el papel que desempeñaba el precio de y (p_y) en nuestro análisis anterior de dos bienes. Las variaciones de p_1 o de t causan algunos tipos de efectos sustitución iguales a los que hemos estado analizando. Siempre y cuando $p_2 \ldots p_n$ se muevan juntos, podremos confinar nuestro análisis de la demanda a las opciones entre comprar x_1 o comprar "todo lo demás".[5] Por tanto, podemos defender rigurosamente las gráficas simplificadas que muestran estos dos bienes en sus ejes, siempre y cuando se cumplan las condiciones de este "teorema del bien agregado" (que todos los demás precios se muevan juntos). Sin embargo, nótese que el teorema no hace predicción alguna sobre el comportamiento de las elecciones de $x_2 \ldots x_n$; es decir, no necesariamente se moverán al unísono. El teorema sólo se centra en el gasto total para $x_2 \ldots x_n$, y no en la asignación de este gasto entre artículos específicos (aun cuando suponemos que esta asignación se hace de forma que maximice la utilidad).

Generalizaciones y limitaciones

El teorema de la agregación de bienes se aplica a un grupo cualquiera de bienes con precios que se muevan todos juntos. Podemos tener más de uno de estos bienes si hay varias agrupaciones que cumplen el teorema (es decir, los gastos en "alimentos", "ropa", etc.). Por tanto, hemos elaborado la siguiente:

DEFINICIÓN

Bien agregado. Un bien agregado es un grupo de bienes cuyos precios se mueven juntos. Podemos considerar que estos bienes son como un solo "bien" en tanto que el individuo se comporta como si estuviera eligiendo entre otros bienes y el gasto total para todo el grupo agregado.

Esta definición y el teorema relacionado con ella ofrecen resultados muy potentes. Sirven para simplificar muchos problemas que, de lo contrario, no serían resolubles. No obstante, debe-

[5]El concepto de "bien agregado" también fue introducido por J. R. Hicks en *Value and Capital,* 2a. ed., Oxford University Press, Oxford, 1946, pp. 312-313. La demostración del teorema depende del concepto que dice que, para alcanzar la máxima utilidad, el cociente de las utilidades marginales de $x_2 \ldots x_n$ debe permanecer constante cuando todos los precios de estos bienes se mueven juntos. Por tanto, el problema de n bienes se reduce al problema bidimensional de igualar el cociente de la utilidad marginal de x respecto a y al "cociente de precios" p_1/t.

mos ser muy cuidadosos al aplicar el teorema al mundo real porque las condiciones son muy estrictas. Es muy difícil encontrar un conjunto de bienes que tienen precios que se mueven juntos. Un leve distanciamiento de la proporcionalidad estricta podría incumplir el teorema del bien agregado si los efectos de sustitución cruzada son grandes. En la ampliación de este capítulo se analizan algunos caminos para simplificar las situaciones en las cuales los precios se mueven independientemente.

EJEMPLO 6.3

Costos de vivienda como bien agregado

Suponga que un individuo obtiene utilidad de tres bienes: alimentos (x), casa (y) medida en cientos de metros cuadrados, y servicios domésticos, medidos por el consumo de electricidad (z).

Si la utilidad del individuo está determinada por la función de tres bienes CES:

$$\text{utilidad} = U(x, y, z) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}, \tag{6.31}$$

podemos utilizar la técnica del lagrangiano para calcular las funciones de demanda marshalliana de estos bienes como

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{p_x + \sqrt{p_x p_y} + \sqrt{p_x p_z}} \\ y &= \frac{1}{p_y + \sqrt{p_y p_x} + \sqrt{p_y p_z}} \\ z &= \frac{1}{p_z + \sqrt{p_z p_x} + \sqrt{p_z p_y}}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Si, inicialmente, $I = 100$, $p_x = 1$, $p_y = 4$ y $p_z = 1$, entonces las funciones de demanda predicen

$$\begin{aligned} x^* &= 25 \\ y^* &= 12.5 \\ z^* &= 25. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Por tanto, el individuo gasta 25 en alimentos y un total de 75 en necesidades relacionadas con la vivienda. Si suponemos que los precios de la casa (p_y) y los precios de los servicios domésticos (p_z) siempre se mueven juntos, entonces podemos utilizar sus precios iniciales para definir el "bien agregado" de la vivienda (h):

$$h = 4y + 1z. \tag{6.34}$$

Aquí también hemos definido (de forma arbitraria) el precio inicial de la vivienda (p_h) igual a uno. La cantidad inicial de la vivienda es simplemente el total de dólares gastados en h:

$$h = 4(12.5) + 1(25) = 75. \tag{6.35}$$

Es más, dado que p_y y p_z siempre se mueven, p_h siempre estará relacionado con estos precios mediante la fórmula

$$p_h = p_z = 0.25p_y. \tag{6.36}$$

Utilizando esta información, podemos volver a calcular la función de demanda de x como una función de I, p_x y p_h:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{p_x + \sqrt{4p_x p_h} + \sqrt{p_x p_h}} \\ &= \frac{1}{p_y + 3\sqrt{p_x p_h}}. \end{aligned} \tag{6.37}$$

(continúa)

EJEMPLO 6.3 *CONTINUACIÓN*

Al igual que antes, inicialmente $I = 100$ $p_x = 1$ y $p_h = 1$, por lo que $x^* = 25$. Podemos calcular el gasto en vivienda más fácilmente a partir de la restricción del presupuesto, siendo $h^* = 75$, porque aquí el gasto en vivienda representa "todo lo demás" que no sea comida.

Un incremento del costo de la vivienda. Si los precios de y y z aumentaran proporcionalmente hasta $p_y = 16$, $P_z = 4$ (con p_x permaneciendo en 1), p_h también aumentaría a $p_h = 4$. Ahora, la ecuación 6.37 predice que la demanda de x disminuiría a

$$x^* = \frac{100}{1 + 3\sqrt{4}} = \frac{100}{7} \tag{6.38}$$

y que las compras para la vivienda estarían determinadas por

$$p_h h^* = 100 - \frac{100}{7} = \frac{600}{7}, \tag{6.39}$$

o, dado que $p_h = 4$,

$$h^* = 150/7. \tag{6.40}$$

Nótese que éste es precisamente el nivel de compras para la vivienda previsto por las funciones de demanda originales de los tres bienes en las ecuaciones 6.32. Con $I = 100$, $p_x = 1$, $p_y = 16$ y $p_z = 4$, podemos resolver estas ecuaciones como

$$\begin{aligned} x^* &= 100/7 \\ y^* &= 100/28 \\ z^* &= 100/14, \end{aligned} \tag{6.41}$$

de modo que el monto total del bien agregado "vivienda" que se consume (según la ecuación 6.34) está determinado por

$$h^* = 4y^* + 1z^* = 150/7. \tag{6.42}$$

En consecuencia, hemos obtenido las mismas respuestas a las variaciones de precios, sea que hayamos optado por analizar las demandas de los tres bienes x, y y z o por observar exclusivamente las elecciones entre x y el bien agregado h.

Pregunta: ¿Cómo sabemos que la función de demanda de x en la ecuación 6.37 sigue garantizando que se maximiza la utilidad? ¿Por qué no cambia el problema lagrangiano de maximización con restricciones cuando se realizan las sustituciones representadas por la ecuación 6.36?

Atributos de los bienes de producción casera y precios implícitos

Hasta ahora, en este capítulo, nos hemos centrado en aquello que los economistas pueden averiguar acerca de las relaciones entre bienes cuando observan los cambios de consumo de estos bienes que se deben a la reacción de los individuos ante variaciones en los precios de mercado. De alguna manera, este análisis evita la interrogante central de *por qué* el café y la leche van juntos o *por qué* una persona puede sustituir el pescado por pollo en su dieta. Para comprender mejor estas interrogantes, los economistas han empezado a analizar las actividades dentro de las familias de los individuos. Es decir, han buscado crear un modelo de los tipos de actividades que no se desarrollan en el mercado, como la atención a los hijos por parte de los padres, la preparación de las comidas o las actividades de hágalo-usted-mismo, para comprender cómo, al final de cuentas, estas actividades dan por resultado la demanda de bienes en el mercado. En esta sección repasaremos brevemente algunos de estos modelos. Nuestro principal objetivo consiste en ilustrar algunas de las consecuencias que este planteamiento tiene en la teoría tradicional de la elección que hemos venido analizando.

El modelo de la producción casera

El punto de partida de la mayor parte de los modelos de la producción casera es el supuesto de que los individuos no reciben utilidad directamente de los bienes que adquieren en el mercado (como hemos estado suponiendo hasta ahora). Por el contrario, sólo cuando el individuo combina los bienes del mercado con sus aportaciones de tiempo es que éste obtiene productos que le brindan utilidad. Por tanto, según este planteamiento, la ternera o las papas crudas no aportan utilidad alguna hasta que se cocinan juntas para producir un guisado. Asimismo, las compras de ternera y papas en el mercado sólo tienen explicación si se analizan las preferencias del individuo en tanto del guisado, así como la tecnología subyacente para producirlo.

Para expresar lo anterior en términos formales, suponga, al igual que antes, que una persona puede adquirir tres bienes en el mercado: x, y y z. La compra de estos bienes no aporta al individuo utilidad directa, pero los puede combinar para producir uno de dos bienes caseros: a_1 o a_2. Podemos representar la tecnología de esta producción casera con las funciones de producción f_1 y f_2 (véase el capítulo 7 para una explicación más completa del concepto de la función de producción). Por tanto,

$$\begin{aligned} a_1 &= f_1(x, y, z) \\ a_2 &= f_2(x, y, z) \end{aligned} \tag{6.43}$$

y

$$\textbf{utilidad} = U(a_1, a_2). \tag{6.44}$$

El objetivo del individuo es escoger x, y, z a modo de maximizar su utilidad, sujeto a las restricciones de producción y a la restricción del dinero de su presupuesto:[6]

$$p_x x + p_y y + p_z z = I. \tag{6.45}$$

Aun cuando no se analizarán con detalle los resultados que se pueden obtener con este modelo general, cabe mencionar dos ideas que podemos extraer del mismo. En primer término, el modelo puede servir para aclarar la naturaleza de las relaciones de mercado entre varios bienes. Dado que, en principio, podemos medir las funciones de producción de las ecuaciones 6.43 empleando datos detallados sobre las actividades caseras, entonces podemos considerar que las familias son como empresas que "fabrican múltiples productos" y analizarlas empleando muchas de las técnicas que los economistas utilizan para estudiar la producción.

La segunda idea que proporciona el planteamiento de la producción casera es el concepto de los precios "implícitos" o los precios "sombra" ligados a los bienes producidos en casa: a_1 y a_2. Dado que si la persona consume, por decir, mayor cantidad de a_1, entonces tendrá que usar mayor cantidad de los "ingredientes" x, y y z, esta actividad tiene, evidentemente, un costo de oportunidad en términos de la cantidad de a_2 que puede producir. Por ejemplo, si la persona quiere producir más pan, entonces no sólo tiene que distraer harina, leche y huevos de la producción de pasteles, sino que tal vez también tenga que alterar las cantidades relativas que adquiere de estos bienes porque está atada a la restricción de su presupuesto global. Por tanto, el pan tendrá un precio implícito en términos de la cantidad de pasteles a los que debe renunciar para poder consumir una barra más de pan. Este precio implícito reflejará no sólo los precios de mercado de los ingredientes del pan, sino también la tecnología de producción casera disponible y, en los modelos más complejos, la cantidad de tiempo relativo necesario para producir los dos bienes. Sin embargo, para empezar, podemos ilustrar mejor el concepto de los precios implícitos con un modelo muy sencillo.

---

[6]A menudo, la teoría de la producción casera también se centra en la forma en la cual el individuo asigna su tiempo para producir a_1 y a_2 o para trabajar en el mercado. En el capítulo 16 analizaremos unos cuantos modelos sencillos de este tipo.

El modelo de los atributos lineales

K. J. Lancaster fue el primero en desarrollar una forma particularmente sencilla del modelo de producción casera para analizar los "atributos" subyacentes de los bienes.[7] En este modelo, los atributos de los bienes son los que aportan utilidad a los individuos y cada bien específico tiene un conjunto fijo de atributos. Por ejemplo, si nos centramos únicamente en las calorías (a_1) y en las vitaminas (a_2) que proporcionan los distintos alimentos, el modelo de Lancaster supone que la utilidad es una función de estos atributos y que los individuos compran diversos alimentos con el único objetivo de obtener las calorías y las vitaminas que éstos aportan. En términos matemáticos, el modelo supone que las ecuaciones de la "producción" tendrán la fórmula simple de

$$a_1 = a_x^1 x + a_y^1 y + a_z^1 z$$
$$a_2 = a_x^2 x + a_y^2 y + a_z^2 z, \tag{6.46}$$

donde a_x^1 representa la cantidad de calorías por unidad de alimento x, a_x^2 representa la cantidad de vitaminas por unidad de alimento x, etc. En consecuencia, con esta fórmula del modelo, no hay "producción" casera alguna. Por el contrario, el problema de decisión es escoger una dieta que proporcione la combinación óptima de calorías y vitaminas, dado el presupuesto disponible para comida.

Representación de las restricciones del presupuesto

Para iniciar nuestro análisis de la teoría de la elección con el modelo de los atributos, primero representamos la restricción del presupuesto. En la figura 6.2, la recta $0x$ muestra las diversas combinaciones de a_1 y a_2 derivadas de las cantidades cada vez más grandes del bien x. Dada la tecnología de producción lineal que supone el modelo de los atributos, estas combinaciones de a_1 y a_2 se encuentran sobre esta línea recta, si bien en los modelos más complejos de producción casera no necesariamente ocurre así. De otra parte, las rectas de $0y$ y $0z$ muestran las cantidades de los atributos a_1 y a_2 que proporcionan las diversas cantidades de los bienes y y z que podrían ser adquiridas.

Si esta persona gasta todos sus ingresos en el bien x, la restricción del presupuesto (ecuación 6.45) le permitirá comprar

$$x^* = \frac{I}{p_x}, \tag{6.47}$$

y eso nos dará

$$a_1^* = a_x^1 x^* = \frac{a_x^1 I}{p_x}$$

y

$$a_2^* = a_x^2 x^* = \frac{a_x^2 I}{p_x}. \tag{6.48}$$

Este punto se muestra como el punto x^* en la recta $0x$ de la figura 6.2. De otra parte, los puntos y^* y z^* representan las combinaciones de a_1 y a_2 que la persona obtendría si gastara todos sus ingresos en el bien y o en el bien z, respectivamente.

Los paquetes de a_1 y a_2 que puede obtener adquiriendo tanto x como y, respectivamente (con un presupuesto fijo), están representadas por la recta que une x^* y y^* en la figura 6.2.[8] De otra parte, la recta x^*z^* representa las combinaciones de a_1 y a_2 disponibles a partir de x y z, y la

---

[7] Véase K. J. Lancaster, "A New Approach to Consumer Theory", *Journal of Political Economy 74*, abril de 1966, pp. 132-157.

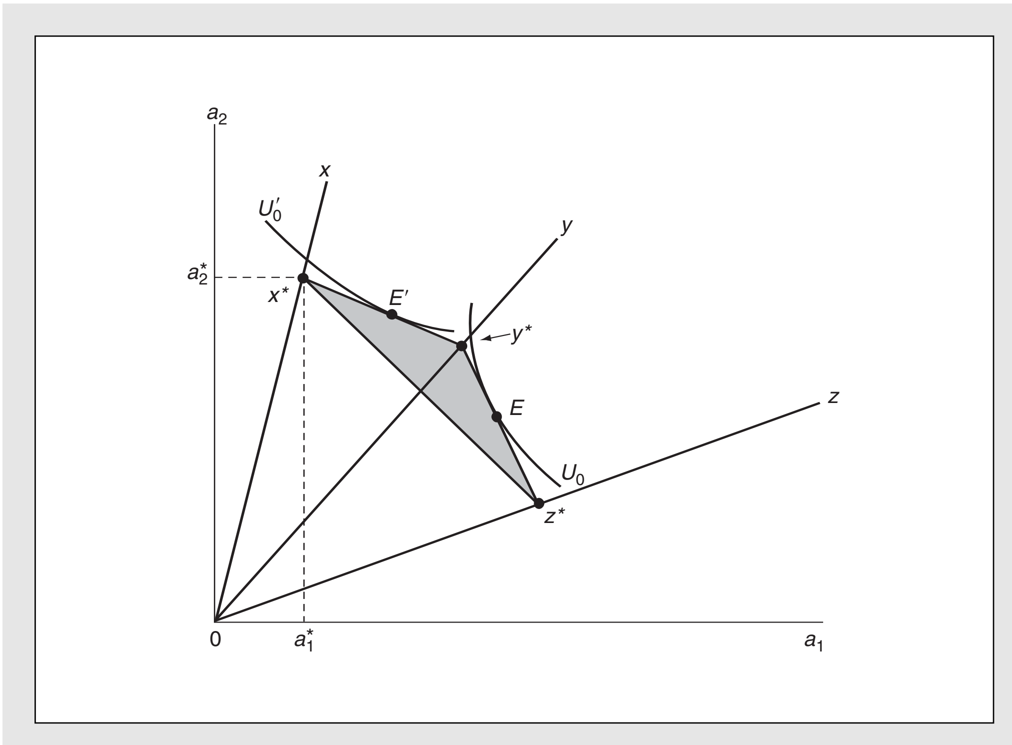
[8] Matemáticamente, suponga que la persona gasta una parte α de su presupuesto en x y $(1 - \alpha)$ en y, entonces

$$a_1 = \alpha a_x^1 x^* + (1 - \alpha) a_y^1 y^*$$
$$a_2 = \alpha a_x^2 x^* + (1 - \alpha) a_y^2 y^*.$$

Trazamos la recta x^*y^* permitiendo que α varíe entre 0 y 1. Trazamos las rectas x^*z^* y y^*z^* de manera análoga, al igual que el triángulo $x^*y^*z^*$.

FIGURA 6.2 **Maximización de la utilidad en el modelo de los atributos**

Los puntos x^*, y^* y z^* muestran las cantidades de atributos a_1 y a_2 que los individuos pueden adquirir si compran únicamente *x*, *y* o *z*, respectivamente. El área sombreada muestra todas las combinaciones que pueden comprar con paquetes mixtos. Algunos individuos podrían maximizar su utilidad en *E*, y otros en *E′*.



recta y^*z^* muestran las combinaciones disponibles al combinar *y* y *z*. Todas las combinaciones posibles a partir de la combinación de los tres bienes que se venden en el mercado están representadas por el área triangular sombreada, $x^*y^*z^*$.

Soluciones de esquina

La figura 6.2 permite ver un hecho en seguida: que un individuo que maximiza su utilidad jamás consumirá cantidades positivas de los tres bienes. Sólo el perímetro noreste del triángulo $x^*y^*z^*$ representa las cantidades máximas de a_1 y a_2 al alcance de esta persona, dados sus ingresos y los precios de los bienes que se venden en el mercado. Los individuos que prefieran a_1 tendrán curvas de indiferencia parecidas a U_0 y maximizarán su utilidad escogiendo un punto como el *E*. Pueden obtener la combinación de a_1 y a_2 especificada en ese punto consumiendo sólo los bienes *y* y *z*. De otra parte, la persona cuyas preferencias estén representadas por la curva de indiferencia U_0' escogerá el punto E' y consumirá únicamente los bienes *x* y *y*. Por tanto, el modelo de los atributos predice que las soluciones de esquina en las cuales los individuos consumen una cantidad nula de algunos bienes serán relativamente frecuentes, especialmente en los casos en que le asignan valor a una menor cantidad de atributos (en este caso, dos) que los bienes disponibles de mercado (tres). Si los ingresos, los precios o las preferencias cambian, entonces los patrones de consumo también podrían cambiar súbitamente. Podrían dejar de comprar los bienes que consumían antes de comprar bastantes más de los bienes que antes despreciaban. Este resultado proviene directamente de los supuestos lineales inherentes a las funciones de producción que suponemos en este caso. En modelos de producción casera con supuestos que permiten más sustituciones es menos probable que se produzcan estas reacciones discontinuas.

RESUMEN

En este capítulo hemos utilizado el modelo de la elección que maximiza la utilidad para analizar las relaciones entre bienes de consumo. Si bien estas relaciones pueden ser complejas, el análisis que hemos presentado ofrece una serie de maneras para catalogar y simplificar estas relaciones:

- Cuando sólo hay dos bienes, los efectos ingreso y sustitución que la variación del precio de un bien (por ejemplo, p_y) tiene en la demanda de otro bien (x) suelen operar en sentido opuesto. Por tanto, el signo de $\partial x/\partial p_y$ es ambiguo; es decir, el efecto sustitución es positivo, pero el efecto ingreso es negativo.
- Cuando hay más de dos bienes, podemos especificar las relaciones de la demanda de dos maneras: dos bienes (x_i y x_j) son "sustitutos brutos" si $\partial x_i/\partial p_j > 0$ y "complementos brutos" si $\partial x_i/\partial p_j < 0$. Por desgracia, como estos efectos precio incluyen efectos ingreso, no necesariamente son simétricos. Es decir, $\partial x_i/\partial p_j$ no necesariamente es igual a $\partial x_j/\partial p_i$.
- Al centrarnos exclusivamente en los efectos sustitución derivados de las variaciones de precios se eliminará esta ambigüedad, porque los efectos sustitución son simétricos; es decir, $\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^c}{\partial p_i}$. Ahora definimos dos bienes como sustitutos netos (o hicksianos) si $\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j} > 0$ y complementos netos si $\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j} < 0$. La "segunda ley de la demanda" de Hicks demuestra que los sustitutos netos prevalecen más.
- Si un grupo de bienes tiene precios que siempre se mueven al unísono, los gastos en estos bienes pueden ser considerados como un "bien agregado" cuyo "precio" está determinado por la magnitud del cambio proporcional de los precios de los bienes que forman el agregado.
- Una forma alternativa de desarrollar la teoría de la elección entre bienes que se venden en el mercado consiste en centrarnos en la forma en que estos bienes son usados en la producción casera para proporcionar atributos que aportan utilidad. Este planteamiento puede ofrecer nuevas ideas sobre las relaciones entre bienes.

PROBLEMAS

6.1

Heidi obtiene utilidad de dos bienes, la leche de cabra (m) y el pastel de manzana (s), de acuerdo con la función de utilidad

$$U(m, s) = m \cdot s.$$

a. Demuestre que los incrementos en el precio de la leche de cabra no afectarán la cantidad de pastel de manzana que compra Heidi; es decir, demuestre que $\partial s/\partial p_m = 0$.

b. Demuestre que $\partial m/\partial p_s = 0$.

c. Utilice la ecuación de Slutsky y la simetría de los efectos de sustitución netos para demostrar que los efectos ingreso de los incisos anteriores son idénticos.

d. Demuestre el inciso c utilizando explícitamente las funciones de demanda marshallianas para m y s.

6.2

Blas "El Duro" sólo compra whisky barato y rosquillas con jalea para alimentarse. Blas piensa que el whisky barato es un bien inferior que exhibe la paradoja de Giffen, a pesar de que el whisky y las rosquillas son sustitutos hicksianos en el sentido habitual. Desarrolle una explicación intuitiva que sugiera por qué un incremento en el precio del whisky provoca que compre menos rosquillas. Es decir, que los bienes también deben ser complementos brutos.

6.3

Donald, un estudiante universitario, sólo consume café (c) y tostadas con mantequilla (bt). Compra ambos artículos en la cafetería de la universidad y siempre utiliza dos paquetes de mantequilla por tostada. Donald gasta exactamente la mitad de su reducido presupuesto en café y la otra en tostadas con mantequilla.

a. En este problema, podemos considerar que las tostadas con mantequilla son un bien agregado. ¿Cuál es su precio en función de los precios de la mantequilla (p_b) y tostada (p_t)?

b. Explique por qué $\partial c/\partial p_{bt} = 0$.

c. ¿También es cierto, en este caso, que $\partial c/\partial p_b$ y $\partial c/\partial p_t$ son iguales a cero?

6.4

La Sra. Sarah Traveler no tiene automóvil y sólo se traslada en autobús, tren o avión. Su función de utilidad está determinada por

$$\textbf{utilidad} = \boldsymbol{b \cdot t \cdot p},$$

y cada variable representa los kilómetros que recorre en cada uno de los medios de transporte. Suponga que la proporción del precio de los viajes en tren al de los del autobús (p_t/p_b) nunca cambia.

a. ¿Cómo podríamos definir un bien agregado para el caso del transporte por tierra?

b. Defina el problema de optimización de Sarah como uno que consiste en escoger entre transporte por tierra (g) o por aire (p).

c. ¿Cuáles son las funciones de demanda de Sarah para g y p?

d. Una vez que Sarah ha decidido cuánto gastará en g, ¿cómo asignará ese gasto entre b y t?

6.5

Suponga que un individuo consume tres bienes, x_1, x_2 y x_3, y que x_2 y x_3 son bienes parecidos (por ejemplo, comidas en restaurantes baratos y caros), siendo $p_2 = kp_3$ donde $k < 1$; es decir, los precios de los bienes tienen una relación constante entre sí.

a. Demuestre que podemos considerar que x_2 y x_3 son un bien agregado.

b. Suponga que x_2 y x_3 están sujetos a un costo de transacción de t por unidad (para ver algunos ejemplos, consulte el problema 6.6). ¿Este costo de transacción cómo afectará el precio de x_2 respecto al de x_3? ¿Cómo variará este efecto con el valor de t?

c. ¿Puede usted predecir cómo un incremento de t con ingresos compensados, afectará los gastos para el bien agregado x_2 y x_3? ¿El teorema del bien agregado se cumple estrictamente en este caso?

d. ¿Un incremento de t con ingresos compensados, cómo afectaría la forma de asignar el total de gastos para el bien agregado entre x_2 y x_3?

(Encontrará un análisis más exhaustivo de las complejidades de este problema en, T. E. Borcherding y E. Silberberg, "Shipping the Good Apples Out: The Alchian-Allen Theorem Reconsidered", *Journal of Political Economy*, febrero de 1978, pp. 131-138.)

6.6

Aplique los resultados del problema 6.5 para explicar las siguientes observaciones:

a. Es difícil encontrar a la venta apartamentos de calidad en Washington o buenas naranjas frescas en Florida.

b. Es más probable que la gente que gasta mucho en servicios de niñeras vaya a restaurantes caros (y no a baratos) que la gente que no gasta en estos servicios.

c. Los individuos que valoran mucho su tiempo tienen más probabilidad de viajar en el Concorde que los que valoran menos su tiempo.

d. Es más probable que la gente intente encontrar gangas para comprar artículos caros que artículos baratos. (*Nota*: Las observaciones b y d establecen las bases para los misterios de asesinatos que podrían ser los únicos dos casos en los que los economistas llegan a resolver el crimen. Véase Marshall Jevons, *Murder at the Margin* y *The Fatal Equilibrium*.)

6.7

Por lo general, los efectos cruzados de precios no compensados no son iguales. Es decir,

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \neq \frac{\partial x_j}{\partial p_i}.$$

Utilice la ecuación de Slutsky para demostrar que estos efectos son iguales si el individuo gasta una fracción constante de sus ingresos en cada bien, independientemente de los precios relativos. (Se trata de una generalización del problema 6.1.)

6.8

En el capítulo 5 se demostró que podemos medir los costos que los cambios de un solo precio tienen para el bienestar utilizando las funciones del gasto y las curvas de demanda compensada. Este problema le pide que generalice lo anterior a los cambios de precios de dos (o muchos) bienes.

a. Suponga que un individuo consume n bienes y que los precios de estos dos bienes (por decir, p_1 y p_2) aumentan. ¿Usted cómo utilizaría la función del gasto para medir la variación compensatoria (VC) para esta persona debido a este aumento del precio?

b. Una forma de demostrar gráficamente estos costos para el bienestar es utilizar las curvas de demanda compensada para los bienes x_1 y x_2 suponiendo que un precio aumentó antes que el otro. Ilustre su planteamiento.

c. En su respuesta al inciso anterior, ¿importaría el orden en el cual usted considera las variaciones de precios? Explique.

d. En general, ¿pensaría usted que la VC para el aumento de precio de estos dos bienes sería más alta si los bienes fueran sustitutos netos o complementos netos? O ¿la relación entre los bienes no tendría repercusiones para los costos del bienestar?

6.9

Se dice que una función de utilidad es *separable* si se puede expresar como

$$U(x, y) = U_1(x) + U_2(y),$$

donde $U_i' > 0$, $U_i'' < 0$ y U_1, U_2 no necesariamente son la misma función.

a. ¿La separación qué presupone sobre la derivada parcial cruzada U_{xy}? Ofrezca un análisis intuitivo de lo que significa este concepto y en qué situaciones se puede producir.

b. Demuestre que si la utilidad es separable, entonces ninguno de los bienes puede ser inferior.

c. ¿El supuesto de la separación le permite concluir contundentemente si x y y son sustitutos brutos o complementos brutos? Explique su respuesta.

d. Utilice la función de utilidad Cobb-Douglas para demostrar que la separación no es invariable con relación a las transformaciones monótonas.

Nota: En las ampliaciones de este capítulo analizamos las funciones separables con más detenimiento.

6.10

El ejemplo 6.3 muestra las funciones de demanda implícitas en la función de utilidad con CES para tres bienes

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$$

a. Utilice la función de la demanda de x de la ecuación 6.32 para determinar si x y y o si x y z son sustitutos o complementos brutos.

b. ¿Cómo determinaría si x y y o si x y z son sustitutos o complementos netos?

LECTURAS RECOMENDADAS

Borcherding, T. E. y E. Silberberg, "Shipping the Good Apples Out—The Alchian-Allen Theorem Reconsidered", *Journal of Political Economy*, febrero de 1978, pp. 131-138.

Magnífica explicación de las relaciones entre tres bienes en la teoría de la demanda. Véanse también los problemas 6.5 y 6.6.

Hicks, J. R. *Value and Capital*, 2a. ed., Oxford: Oxford University Press, 1946. Véanse caps. I-III y apéndices relacionados.

Prueba del teorema del bien agregado. También uno de los primeros tratamientos de los sustitutos y complementos netos.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Nueva York, 1995.

Explora las consecuencias de la simetría de los efectos cruzados de precios compensados en el caso de diversos aspectos de la teoría de la demanda.

Rosen, S. "Hedonic Prices and Implicit Markets", *Journal of Political Economy*, enero/febrero de 1974, pp. 34-55.

Buen tratamiento gráfico y matemático del enfoque de los atributos para la teoría del consumidor y del concepto de los "mercados" para los atributos.

Samuelson, P. A. "Complementarity—An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory", *Journal of Economic Literature*, diciembre de 1977, pp. 1255-1289.

Reseña una serie de definiciones de complementariedad y muestra las relaciones que existen entre ellas. Contiene una explicación gráfica intuitiva y un detallado apéndice matemático.

Silberberg, E. y W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis,* 3a. ed., Irwin-McGraw-Hill, Boston, 2001.

Buena explicación de las funciones del gasto y el uso de funciones de utilidad indirectas para ilustrar el teorema del bien agregado y otros resultados.

AMPLIACIONES

Simplificación de la demanda y presupuestación en dos etapas

En el capítulo 6 vimos que, en lo general, la teoría de la maximización de la utilidad impone muy pocas restricciones respecto a lo que podría ocurrir. Aparte del hecho de que los efectos netos de sustitución cruzada son simétricos, casi todo tipo de relación entre bienes es congruente con la teoría fundamental. Esta situación plantea algunos problemas para los economistas que quieren estudiar el comportamiento de consumo en el mundo real; es decir, la teoría sencillamente no sirve demasiado de guía cuando hay muchos miles de bienes que podrían ser objeto de estudio.

Existen dos caminos generales para simplificar las cosas. El primero utiliza el teorema del bien agregado, que hemos visto en el capítulo 6, para agregar bienes en categorías dentro de las cuales los precios relativos se mueven juntos. Sin embargo, en las situaciones que están interesados específicamente en los cambios de los precios relativos dentro de una categoría de gasto (como las variaciones de los precios relativos de distintas formas de energía) este proceso no servirá. Una alternativa es suponer que los consumidores participan en un proceso de dos etapas cuando toman sus decisiones de consumo. Primero asignan ingresos a varios grupos amplios de bienes (alimento, ropa, etc.) y, después, dadas estas restricciones de los gastos, maximizan la utilidad dentro de cada una de las subcategorías de bienes utilizando tan sólo información acerca de los precios relativos de esos bienes. De tal suerte, pueden estudiar las decisiones en un marco simplificado concentrándose sólo en una categoría por vez. Decimos que este proceso es presupuestar en "dos etapas". En estas ampliaciones primero analizamos la teoría general de la presupuestación en dos etapas y, a continuación algunos ejemplos empíricos.

A6.1 Teoría de la presupuestación en dos etapas

Podemos enunciar la interrogante que surge en el caso de la presupuestación en dos etapas: ¿existe una participación de bienes en m grupos que no se sobreponen (denotados por $r = l, m$) y un presupuesto separado (l_r) dedicado a cada categoría, de tal suerte que la demanda que funciona para los bienes dentro de una categoría depende exclusivamente de los precios de los bienes dentro de la categoría y de la asignación del presupuesto a esa categoría? Es decir, ¿podemos dividir los bienes en partes de modo que la demanda esté determinada por

$$x_i(p_1 \ . \ . \ . \ p_n, I) = x_{i\in r}(p_{i\in r}, I_r) \quad para \ r = 1, m\ ? \tag{i}$$

La sugerencia de la posibilidad de hacer lo anterior nace de la comparación del problema siguiente de maximización en dos etapas

$$V^*(p_1, \cdots p_n, I_1, \cdots I_m)$$

$$= \underset{x_1,\cdots x_n}{Max}[U(x_1, \cdots x_n) s.t. \sum_{i\in r} p_i x_i \leq I_r \ r = 1, m] \tag{ii}$$

y

$$\underset{I_1,\cdots I_m}{Max} V^* \ s.t. \sum_{r=1}^{m} I_r = I,$$

en el caso del problema de maximización de la utilidad que hemos venido estudiando,

$$\underset{x_i}{Max} U(x_1, \cdots x_n) \ s.t. \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq I. \tag{iii}$$

Sin mayores restricciones, estos dos procesos de maximización producirán el mismo resultado; es decir, la ecuación (ii) es tan sólo una forma más complicada de exponer la ecuación (iii). Por tanto, debemos poner algunas restricciones a la función de utilidad para asegurarnos de que las funciones de demanda que resultan de la resolución del proceso de dos etapas serán de la forma especificada en la ecuación (i). La intuición nos dice que, al parecer, esta categorización de los bienes debería funcionar siempre y cuando los cambios de precio de un bien dentro de una categoría no afecten la asignación del gasto para bienes en otra categoría cualquiera, menos la suya propia. En el problema 6.9 demostramos un caso donde esto es así en el caso de una función de utilidad "separable sumatoriamente". Por desgracia, éste resulta ser un caso muy especial. Las restricciones matemáticas más generales que debemos colocar a la función de utilidad para justificar el presupuesto en dos etapas han sido derivadas (véase Blackorby, Primont y Russell, 1978), pero no son especialmente intuitivas. Por supuesto que los economistas que desean estudiar las decisiones descentralizadas que toman los consumidores (o, tal vez más importante, las empresas que operan muchas divisiones) deben hacer algo para simplificar las cosas. Ahora se analizarán algunos ejemplos aplicados.

A6.2 Relación con el teorema del bien agregado

Por desgracia, ninguno de los dos planteamientos teóricos disponibles para simplificar la demanda es enteramente satisfactorio. El teorema del bien agregado requiere que los precios relativos de los bienes dentro de un grupo permanezcan constantes a lo largo del tiempo, supuesto que ha sido rechazado en muchas etapas distintas de la historia. De otra parte, el tipo de separación y de presupuesto en dos etapas que indica la función de utilidad de la ecuación (i) también requiere supuestos muy sólidos sobre cómo las variaciones de los precios de un bien de un grupo afectan el gasto para los bienes de otro grupo. Al parecer, los datos rechazan estos supuestos (véase Diewert y Wales, 1995).

Los economistas han tratado de desarrollar métodos incluso más elaborados e híbridos para la agregación de los bienes. Por ejemplo, Lewbel (1996) demuestra cómo podemos generalizar el teorema del bien agregado a los casos en que los precios relativos dentro de un mismo grupo exhiben una gran variabilidad. Utiliza esta generalización para aglutinar los gastos del consumidor estadounidense en seis grandes grupos (alimentos, ropa, funcionamiento de la vivienda, servicios médicos, transporte y ocio). Utilizando estos agregados, concluye que este procedimiento es mucho más preciso que el de suponer la presupuestación en dos etapas para estas categorías de gastos.

A6.3 Funciones homotéticas y demanda de energía

Una forma de simplificar el estudio de la demanda cuando hay muchos bienes consiste en suponer que la utilidad de ciertas subcategorías de bienes es homotética y que la podemos separar de la demanda de otros bienes. Éste es el proceso que siguieron Jorgenson, Slesnick y Stoker (1997) en su estudio de la demanda de energía por parte de consumidores estadounidenses. Al suponer que las funciones de la demanda de tipos específicos de energía son proporcionales al gasto total en energía, los autores pudieron concentrar su estudio empírico en el tema que más les interesa: estimar las elasticidades precio de la demanda de diversos tipos de energía. Ellos llegan a la conclusión de que la mayor parte de los tipos de energía (es decir, electricidad, gas natural, gasolina, etc.) tienen funciones de demanda bastante elásticas. Al parecer, la demanda es más sensible al precio en el caso de la electricidad.

Referencias

Blackorby, Charles, Daniel Primont y R. Robert Russell. *Duality, Separability and Functional Structure: Theory and Economic Applications*, North Holland, Nueva York, 1978.

Diewert, W. Erwin y Terrence J. Wales. “Flexible Functional Forms and Tests of Homogeneous Separability”, *Journal of Econometrics*, junio de 1995, pp. 259-302.

Jorgenson, Dale W., Daniel T. Slesnick y Thomas M. Stoker. “Two-Stage Budgeting and Consumer Demand for Energy”, en Dale W. Jorgenson, ed., *Welfare, Volume 1: Aggregate Consumer Behavior*, pp. 475-510, MIT Press, Cambridge, MA, 1997.

Lewbel, Arthur. “Aggregation Without Separability: A Standardized Composite Commodity Theorem”, *American Economic Review*, junio de 1996, pp. 524-543.

Parte 3

PRODUCCIÓN Y OFERTA

En esta parte se analizarán la producción y la oferta de bienes económicos. Se dice que las organizaciones que coordinan la transformación de factores de producción en productos se llaman empresas. *Éstas pueden ser organizaciones muy grandes (como General Motors, IBM o el Departamento de Defensa de Estados Unidos) o pequeñas (como las tiendas "de la esquina" o los trabajadores independientes). Las empresas pueden perseguir distintos objetivos (IBM tratará de maximizar las ganancias, mientras que un kibbutz israelí procurará que sus miembros estén en la mejor situación posible), pero todas ellas deben hacer algunas elecciones básicas para el proceso de producción. El propósito de la parte 3 es desarrollar algunos métodos para analizar esas elecciones.*

En el capítulo 7 se analizan algunos modelos de la relación material entre los factores de producción y los productos. Se introduce el concepto de la función de producción, *el cual es una abstracción muy útil de las complejidades de los procesos de producción del mundo real. Destacamos dos aspectos mensurables de la función de producción: sus rendimientos a escala (es decir, cuánto aumenta la producción cuando aumentan todos los factores productivos) y su elasticidad de sustitución (es decir, la facilidad para sustituir un factor productivo por otro, manteniendo el mismo nivel de producción). También se describe brevemente cómo las mejoras técnicas se reflejan en las funciones de producción.*

A continuación, en el capítulo 8, se utiliza el concepto de la función de producción para analizar los costos de producción. Suponemos que todas las empresas buscan producir al costo más bajo posible, supuesto que permite desarrollar las funciones de costos de la empresa. El capítulo 8 también se centra en las diferencias que pueden existir entre los costos de corto y de largo plazo.

En el capítulo 9 se analiza la decisión de la empresa en cuanto a la oferta. Para ello, suponemos que el director de la empresa elegirá los factores y el nivel de producción que maximicen las ganancias. El capítulo concluye con el modelo fundamental del comportamiento de oferta que observan las empresas que maximizan sus ganancias y que utilizaremos en muchos capítulos posteriores.

Capítulo 7

FUNCIONES DE PRODUCCIÓN

La actividad principal de toda empresa es convertir los factores productivos en bienes. Dado que a los economistas les interesan las elecciones que hace la empresa para lograr este objetivo, pero que también quieren evitar el análisis de las muchas complejidades implícitas en el proceso de ingeniería, han optado por construir un modelo abstracto de la producción. En él, han formalizado la relación entre los factores de producción y los bienes con una función de producción *de la siguiente forma*

$$q = f(k, l, m, \ldots), \tag{7.1}$$

donde q representa la producción de un determinado bien durante un periodo,[1] *k representa la maquinaria (es decir, el capital) utilizada durante el periodo, l representa las horas de trabajo, m representa las materias primas empleadas,*[2] *y la notación indica la posibilidad de que otras variables afecten el proceso de producción. Suponemos que la ecuación 7.1 presenta la solución que los ingenieros ofrecen al problema de cómo combinar los factores de producción, considerando todo conjunto concebible de estos factores, de la mejor forma posible para fabricar el producto.*

Productividad marginal

En esta sección se estudiará la variación de la producción que resulta de un cambio en uno de los factores de producción. Para efectos de este análisis (y, de hecho, para la mayor parte de los objetivos de este libro), será más cómodo utilizar una función simplificada de producción que se definirá como:

DEFINICIÓN

Función de producción. La *función de producción* de la empresa en el caso de un bien determinado, q,

$$q = f(k, l), \tag{7.2}$$

muestra la cantidad máxima del bien que ésta puede producir utilizando distintas combinaciones de capital (k) y de trabajo (l).

[1]Aquí usaremos la q minúscula para representar la producción de una empresa. Reservamos la Q mayúscula para representar la producción total en un mercado. Por lo general, suponemos que una empresa sólo fabrica un producto. Analizamos algunas cuestiones derivadas de las empresas con múltiples productos que se analizan en unos cuantos problemas y notas al pie de página.

[2]Los trabajos empíricos con frecuencia no tienen en cuenta las materias primas y miden la producción, q, en función del "valor agregado".

Por supuesto que la mayor parte de nuestro análisis será válido para dos factores cualesquier de producción que queramos analizar. Utilizaremos los términos *capital* y *trabajo* sólo por comodidad. Asimismo, sería una cuestión muy fácil generalizar nuestro análisis a los casos que incluyen más de dos factores de producción y, en algunas ocasiones, así lo haremos. Sin embargo, la mayoría de las veces será muy útil limitar nuestro análisis a dos factores de producción porque podremos representarlos en gráficas bidimensionales.

Producto marginal

Para analizar las variaciones de un solo factor de producción, se define el producto marginal de la manera siguiente:

Definición

Producto marginal. El *producto marginal* de un factor productivo es el producto adicional que podemos obtener empleando una unidad más de ese factor productivo, manteniendo constantes todos los demás factores de producción. En términos matemáticos,

$$\begin{aligned}\textbf{producto marginal del capital} &= PMg_k = \frac{\partial q}{\partial k} = f_k \\ \textbf{producto marginal del trabajo} &= PMg_l = \frac{\partial q}{\partial l} = f_l.\end{aligned} \tag{7.3}$$

Nótese que las definiciones matemáticas del producto marginal utilizan derivadas parciales, reflejando así correctamente el hecho de que la utilización de todos los demás factores de producción se mantiene constante mientras varía el factor de producción que nos interesa. Por ejemplo, pensemos en el caso de un agricultor que contrata a un trabajador más para recoger la cosecha, pero mantiene constantes todos los demás factores de producción. La producción adicional de este trabajador es el producto marginal de ese agricultor, medido en cantidades como toneladas de trigo, kilos de naranjas o cabezas de lechuga. Por ejemplo, podemos observar que 50 trabajadores en una finca son capaces de producir 100 toneladas de trigo por año, mientras que 51 trabajadores, con la misma cantidad de tierra y los mismos equipos, pueden producir 102 toneladas. Así, el producto marginal del trabajador número 51 será de 2 toneladas por año.

Productividad marginal decreciente

Cabe suponer que el producto marginal de un factor productivo dependerá de la cantidad utilizada de ese factor. Por ejemplo, no podemos añadir trabajo de manera indefinida un campo determinado (manteniendo fija la cantidad de equipos, fertilizantes, etc.) sin que, finalmente, se deteriore su productividad. En términos matemáticos, el supuesto de una productividad marginal decreciente es un supuesto sobre las derivadas parciales de segundo orden de la función de producción:

$$\begin{aligned}\frac{\partial PMg_k}{\partial k} &= \frac{\partial^2 f}{\partial k^2} = f_{kk} = f_{11} < 0 \\ \frac{\partial PMg_l}{\partial l} &= \frac{\partial^2 f}{\partial l^2} = f_{ll} = f_{22} < 0.\end{aligned} \tag{7.4}$$

El primero en proponer el supuesto de la productividad marginal decreciente fue Thomas Malthus, el economista del siglo XIX, que tenía la preocupación de que los veloces incrementos de la población derivaran en una menor productividad del trabajo. Sus sombrías predicciones sobre el futuro de la humanidad hicieron que se tildara a la economía de "ciencia sombría". Sin embargo, las matemáticas de la función de producción sugieren que este pesimismo podría no estar justificado. Las variaciones de la productividad marginal del trabajo a lo largo del tiempo dependen no sólo del crecimiento que registra el factor trabajo, sino también de las variaciones de los demás factores de producción, como el capital. Es decir, también tenemos que analizar $\partial PM_l/\partial k = f_{lk}$. En la mayor parte de los casos, $f_{lk} > 0$, por lo cual no podemos dar por sentado que la productividad del trabajo *disminuye cuando aumentan l y k*. De hecho, parece que la productividad del trabajo ha aumentado sustancialmente desde los tiempos de Malthus, principalmente porque los incrementos del factor capital han compensado el efecto de la productividad marginal decreciente.

Productividad promedio

Una concepción de la expresión *productividad del trabajo* con frecuencia se entiende como *productividad promedio*. Cuando se dice que determinada industria ha registrado incrementos de productividad, se entiende que la producción por unidad de trabajo ha aumentado. En los análisis teóricos de la economía, el concepto de productividad promedio dista mucho de tener la importancia que tiene él de la productividad marginal, pero en los análisis empíricos el concepto merece mucha atención. Dado que es muy fácil cuantificar la productividad promedio (por ejemplo, como en el caso de la cantidad de toneladas de trigo por hora de trabajo), se suele utilizar como una medida de la eficiencia. El producto promedio del trabajo (PP_l)se define como

$$PP_l = \frac{\text{producto}}{\text{factor trabajo}} = \frac{q}{l} = \frac{f(k,l)}{l}. \tag{7.5}$$

Nótese que PP_l también depende del nivel de capital empleado. Esta observación será sumamente importante cuando se analice el cálculo de los avances tecnológicos al final de este capítulo.

EJEMPLO 7.1

Una función de producción con dos factores

Suponga que podemos representar la función de producción de matamoscas durante determinado periodo como

$$q = f(k, l) = 600\ k^2l^2 - k^3l^3. \tag{7.6}$$

Para determinar las relaciones de productividad promedio y marginal del trabajo (l) en el caso de esta función, debemos suponer un valor determinado para el otro factor, el capital (k). Suponga que $k = 10$. Entonces la función de producción estará determinada por

$$q = 600\ 000l^2 - 1000l^3. \tag{7.7}$$

Producto marginal. La función de productividad marginal está determinada por

$$PMg_l = \frac{\partial q}{\partial l} = 120\ 000l - 3000l^2, \tag{7.8}$$

la cual disminuye a medida que aumenta l hasta que, finalmente, se vuelve negativa. Esto implica que q alcanza un valor máximo. Si se iguala PMg_l a cero,

$$120\ 000l - 3000l^2 = 0 \tag{7.9}$$

se obtendrá

$$40l = l^2 \tag{7.10}$$

o

$$l = 40 \tag{7.11}$$

como el punto en el cual q alcanza su valor máximo. Un factor de trabajo por encima de 40 unidades por periodo reduce, de hecho, la producción total. Por ejemplo, cuando $l = 40$, la ecuación 7.7 muestra que $q = 32$ millones de matamoscas, mientras que cuando $l = 50$, la producción de matamoscas sólo asciende a 25 millones.

Producto promedio. Para calcular la productividad promedio del trabajo en la producción de matamoscas, se divide q entre l, al tiempo que se mantiene $k = 10$:

$$PP_l = \frac{q}{l} = 60\ 000l - 1000l^2. \tag{7.12}$$

(*continúa*)

EJEMPLO 7.1 *CONTINUACIÓN*

De nuevo, se trata de una parábola invertida que alcanza su valor máximo cuando

$$\frac{\partial PP_l}{\partial l} = 60\ 000 - 2000l = 0, \tag{7.13}$$

lo cual ocurre cuando $l = 30$. Para este valor del factor trabajo, la ecuación 7.12 muestra que $PP_l = 900\ 000$, y la ecuación 7.8 muestra que la PMg_l también es 900 000. Cuando AP_l está en su máximo, la productividad promedio y la productividad marginal del trabajo son iguales.[3]

Nótese la relación entre la producción total y la productividad promedio que destaca este ejemplo. Aun cuando la producción total de matamoscas es mayor con 40 trabajadores (32 millones) que con 30 (27 millones), la producción por trabajador es mayor en el segundo caso. Con 40 trabajadores, cada uno produce 800 000 matamoscas por periodo, mientras que con 30 trabajadores cada uno produce 900 000. Dado que el factor capital (las prensas de los matamoscas) se mantiene constante en esta definición de la productividad, la productividad marginal decreciente del trabajo a la larga da por resultado un nivel de producción decreciente por trabajador.

Pregunta: ¿Un incremento de k de 10 a 11, cómo afectaría las funciones de PMg_l y de PP_l en este caso? Explique su respuesta de forma intuitiva.

Mapas de isocuantas y la tasa técnica de sustitución

Cuando ilustramos la sustitución de un factor productivo por otro, que puede ocurrir en una función de producción, utilizamos su *mapa de isocuantas.* De nuevo, se utiliza una función de producción de la forma $q = f(k, l)$, en el entendido de que el "capital" y el "trabajo" son simplemente ejemplos convenientes de dos factores de producción que pudieran interesarnos. Una isocuanta (que viene de *iso,* que significa "igual") registra las combinaciones de k y l que producen una cantidad determinada de producto. Por ejemplo, todas aquellas combinaciones de k y l que están en la curva denominada "$q = 10$" de la figura 7.1 pueden producir 10 unidades de producto por periodo. Por tanto, esta isocuanta registra el hecho de que hay muchas alternativas de producir 10 unidades de un bien. Una de ellas es la representada por el punto *A:* utilizaríamos l_A y k_A para producir 10 unidades de dicho bien. Por otra parte, tal vez se prefiera utilizar relativamente menos capital y más trabajo y, por tanto, elegiríamos un punto como el *B*. De ahí que se pueda definir una isocuanta de la manera siguiente:

DEFINICIÓN

Isocuanta. Una *isocuanta* muestra las combinaciones de k y l que producen determinada cantidad de un bien (por ejemplo, q_0). Matemáticamente, una isocuanta registra el conjunto de k y l que cumple con

$$f(k, l) = q_0. \tag{7.14}$$

Tal como ocurría en el caso de las curvas de indiferencia, en el plano $k - l$ hay muchas isocuantas. Cada una de ellas representa un nivel de producción distinto. Las isocuantas registran niveles de producción cada vez más altos a medida que avanzamos en dirección nordeste. Presunta-

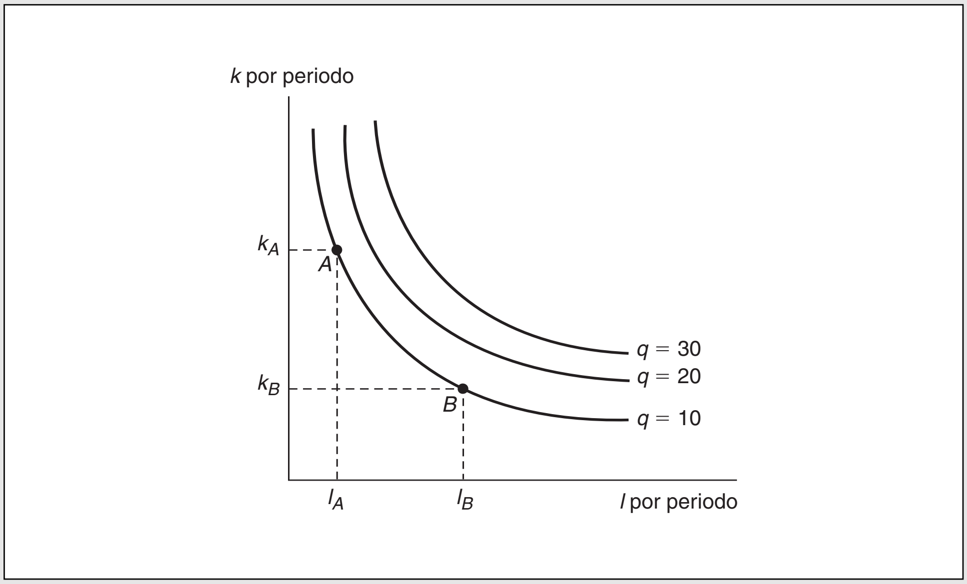
[3]Este resultado es bastante general. Dado que

$$\frac{\partial PP_l}{\partial l} = \frac{l \cdot PMg_l - q}{l^2},$$

en el máximo $l \cdot PMg_l = q$ o $PMg_l = PP_l$.

FIGURA 7.1 **Un mapa de isocuantas**

Las isocuantas registran las combinaciones alternativas de factores de producción que podemos utilizar para generar un nivel determinado de producción. La pendiente de estas curvas muestra la tasa a la cual podemos sustituir l por k manteniendo constante la producción. Esta pendiente con signo negativo es conocida como *tasa* (marginal) *técnica de sustitución* (*TTS*). En la figura, la *TTS* es positiva y decreciente a medida que aumentan las cantidades del factor trabajo.



mente, si se utiliza más de cada uno de los factores de producción, entonces aumentará la producción. La figura 7.1 muestra otras dos isocuantas (para $q = 20$ y $q = 30$). El parecido entre un mapa de isocuantas y el mapa de curvas de indiferencia de un individuo que vimos en la parte 2 salta a la vista. En efecto, son conceptos similares, porque ambos representan mapas de “curvas de nivel” de una función determinada. Sin embargo, en el caso de las isocuantas la denominación de cada curva es mensurable, es decir, una producción de 10 unidades por periodo tiene un significado cuantificable. Por tanto, los economistas están más interesados en estudiar la forma de las funciones de producción que en analizar la forma exacta de las funciones de utilidad.

La tasa técnica de sustitución *(TTS)*

La pendiente de una isocuanta muestra cómo podemos cambiar un factor de producción por otro, manteniendo constante el nivel de producción. El análisis de la pendiente ofrece información sobre la posibilidad técnica de sustituir trabajo por capital. Una definición formal es:

DEFINICIÓN

Tasa técnica de sustitución. La *tasa técnica de sustitución* (*TTS*) muestra la tasa a la que se puede sustituir capital por trabajo manteniendo constante la producción a lo largo de una isocuanta. En términos matemáticos,

$$TTS\ (l \text{ por } k) = \left.\frac{-dk}{dl}\right|_{q = q_0}. \tag{7.15}$$

En esta definición, la notación pretende recordar que debemos mantener constante la producción a medida que sustituimos l por k. El valor concreto de esta tasa de intercambio dependerá no sólo del nivel de producción, sino también de las cantidades de capital y de trabajo que se usan. Su valor dependerá del punto en el mapa de isocuantas en el cual se vaya a calcular la pendiente.

TTS y productividad marginal

Cuando analizamos la forma de las isocuantas de la función de producción es muy útil demostrar el siguiente resultado: la *TTS* (de l por k) es igual a la proporción de la productividad marginal del trabajo (PMg_l) respecto a la productividad marginal del capital (PMg_k). Empezamos por la diferencial total de la función de producción:

$$dq = \frac{\partial f}{\partial l} \cdot dl + \frac{\partial f}{\partial k} \cdot dk = PMg_l \cdot dl + PMg_k \cdot dk, \qquad (7.16)$$

la cual registra cómo los cambios pequeños de l y k afectan la producción. A lo largo de esta isocuanta, $dq = 0$ (la producción es constante), por lo cual

$$PMg_l \cdot dl = -PMg_k \cdot dk. \qquad (7.17)$$

Esta expresión afirma que, a lo largo de una isocuanta, el incremento de la producción derivado de un pequeño aumento de l queda compensado exactamente por la disminución de la producción derivada de una reducción correspondiente de k. Reorganizando los términos un poco tendremos

$$-\left.\frac{dk}{dl}\right|_{q = q_0} = TTS\ (l \text{ por } k) = \frac{PMg}{PMg}. \qquad (7.18)$$

Por tanto, la *TTS* está determinada por la proporción de las productividades marginales de los factores de producción.

La ecuación 7.18 muestra que las isocuantas que observamos deben tener una pendiente negativa. Dado que tanto la PMg_l como la PMg_k no serán negativas (ninguna empresa optaría por utilizar un factor de producción muy caro que disminuya la producción), la *TTS* también será positiva (o tal vez cero). Dado que la pendiente de una isocuanta es la *TTS,* con signo negativo, una empresa que observemos no operará en la parte positiva de la pendiente de una isocuanta. Si bien es matemáticamente posible pensar en funciones de producción cuyas isocuantas tienen pendientes positivas en algunos puntos, no tendría sentido económico que una empresa optara por escoger esas combinaciones de factores.

Razones para una *TTS* decreciente

Las isocuantas de la figura 7.1 no sólo están trazadas con una pendiente negativa (como debe ser), sino también como curvas convexas. A lo largo de cualquiera de estas curvas, la *TTS* es *decreciente*. En el caso de proporciones altas de k respecto a l, la *TTS* es una cifra positiva alta, lo cual indica que la empresa puede renunciar a una cantidad alta de capital si dispone de una unidad más de trabajo. Por otra parte, cuando ya se está usando mucho trabajo, la *TTS* es baja, lo cual significa que sólo puede cambiar una pequeña cantidad de capital por una unidad más de trabajo si quiere mantener constante el nivel de producción. Este supuesto parece tener cierta relación con el de una productividad marginal decreciente. Un uso apresurado de la ecuación 7.18 nos podría llevar a la conclusión de que un incremento de l acompañado de una disminución de k daría por resultado un incremento de la PMg_k, una reducción de la PMg_l, por tanto, una reducción de la *TTS*. El problema de esta "demostración" veloz es que la productividad marginal de un factor de producción depende del nivel de *ambos* factores; es decir, los cambios de l afectan la PMg_k y viceversa. Por lo general, no es posible derivar una *TTS* decreciente partiendo tan sólo del supuesto de que la productividad marginal es decreciente.

Para ver matemáticamente el porqué de lo anterior, supongamos que $q = f(k, l)$ y que f_k y f_l son positivas (es decir, las productividades marginales son positivas). Supongamos también que $f_{kk} < 0$ y $f_{ll} < 0$ (que las productividades marginales son decrecientes). Para demostrar que las isocuantas son convexas, tendremos que demostrar que $d(TTS)/dl < 0$. Dado que $TTS = f_l/f_k$, tenemos

$$\frac{dTTS}{dl} = \frac{d(f_l/f_k)}{dl}. \qquad (7.19)$$

Dado que f_l y f_k son funciones tanto de k como de l, debemos tener cuidado al derivar esta expresión:

$$\frac{dTTS}{dl} = \frac{[f_k(f_{ll} + f_{lk} \cdot dk/dl) - f_l(f_{kl} + f_{kk} \cdot dk/dl)]}{(f_k)^2}. \qquad (7.20)$$

Usando el hecho de que $dk/dl = -f_l/f_k$ a lo largo de una isocuanta y el teorema de Young ($f_{kl} = f_{lk}$), tendremos

$$\frac{dTTS}{dl} = \frac{(f_k^2 f_{ll} - 2f_k f_l f_{kl} + f_l^2 f_{kk})}{(f_k)^3}. \tag{7.21}$$

Dado que hemos supuesto que $f_k > 0$, el denominador de esta función es positivo. Por tanto, todo el cociente será negativo si el numerador es negativo. Dado que se supone que tanto f_{ll} como f_{kk} son negativos, el numerador definitivamente será negativo si f_{kl} es positivo. Si se puede suponer lo anterior, habremos demostrado que $dTTS/dl < 0$ (que las isocuantas son convexas).[4]

Importancia de los efectos de la productividad cruzada

Por intuición, diríamos que es razonable que la derivada parcial cruzada $f_{kl} = f_{lk}$ debería ser positiva. Parece posible que si los trabajadores tuvieran más capital, tendrían una productividad marginal superior. Pero, aun cuando es probable que éste sea el caso más frecuente, no tiene por qué serlo necesariamente. Algunas funciones de producción pueden tener $f_{kl} < 0$, al menos para un intervalo de valores de los factores de producción. Cuando suponemos que la *TTS* es decreciente (como haremos durante la mayor parte de nuestro análisis), estaremos planteando, por tanto, un supuesto más fuerte que la simple productividad marginal decreciente de cada factor: en concreto, estaremos suponiendo que las productividades marginales disminuyen "lo suficientemente rápido" como para compensar cualquier posible efecto negativo de las productividades cruzadas.

EJEMPLO 7.2

Una *TTS* decreciente

En el ejemplo 7.1, la función de producción de los matamoscas estaba determinada por

$$q = f(k, l) = 600k^2l^2 - k^3l^3. \tag{7.22}$$

Las funciones generales de la productividad marginal de esta función de producción son

$$\begin{aligned} PMg_l &= f_l = \frac{\partial q}{\partial l} = 1200k^2l - 3k^3l^2 \\ PMg_k &= f_k = \frac{\partial q}{\partial k} = 1200kl^2 - 3k^2l^3. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Nótese que cada una de estas productividades depende de los valores de los dos factores de producción. Al factorizar, veremos que estas productividades marginales serán positivas para los valores de k y l en cuyo caso $kl < 400$.

Porque

$$f_{ll} = 1200k^2 - 6k^3l$$

y

$$f_{kk} = 1200l^2 - 6kl^3, \tag{7.24}$$

es evidente que las productividades marginales de esta función son decrecientes para valores suficientemente grandes de k y l. En efecto, si volvemos a factorizar, entonces será fácil demostrar que $f_{ll}, f_{kk} < 0$ si $kl > 200$. Sin embargo, incluso en el intervalo $200 < kl < 400$ donde las relaciones de la productividad marginal de esta función se comportan "normalmente", esta función de producción no necesariamente debe tener una *TTS*. decreciente. La diferenciación cruzada de alguna de las funciones de productividad marginal (ecuación 7.23) produce

$$f_{kl} = f_{lk} = 2400kl - 9k^2l^2, \tag{7.25}$$

que sólo es positiva para $kl < 266$.

(continúa)

[4]Como señalamos en el capítulo 2, decimos que las funciones, como las que aparecen en la ecuación 7.21, que tienen numerador negativo se llaman *funciones* (estrictamente) *cuasi cóncavas*.

EJEMPLO 7.2 *CONTINUACIÓN*

Por tanto, el numerador de la ecuación 7.21 será negativo, definitivamente, para $200 < kl < 266$, pero para fábricas de matamoscas de mayor escala el caso no está tan claro, porque f_{kl} es negativa. Cuando f_{kl} es negativa, los incrementos del factor trabajo disminuyen la productividad marginal del capital. Por tanto, el argumento intuitivo de que el supuesto de las productividades marginales decrecientes ofrece una predicción contundente sobre lo que ocurrirá con la *TTS* $(= f_l/f_k)$ cuando l aumenta y k disminuye no es correcto. Todo depende de los efectos relativos que las productividades marginales decrecientes tengan en las productividades marginales (que tienden a reducir f_l y a aumentar f_k) y los efectos opuestos que producen las productividades marginales cruzadas (que tienden a aumentar f_l y a reducir f_k). No obstante, para este caso de los matamoscas, es cierto que la *TTS* va decreciendo a lo largo del intervalo de k y l, donde las productividades marginales son positivas. En los casos donde $266 < kl < 400$, las productividades marginales decrecientes que exhibe la función son suficientes para superar la influencia de un valor negativo de f_{kl} sobre la convexidad de las isocuantas.

Pregunta: Para los casos donde $k = l$, ¿qué podemos decir sobre las productividades marginales de esta función de producción? ¿Esto cómo simplificaría el numerador de la ecuación 7.21? ¿Esto cómo le permite evaluar más fácilmente esta expresión para algunos valores más altos de k y de l?

Rendimientos a escala

Ahora vamos a caracterizar las funciones de producción. La primera cuestión importante que podemos plantear al respecto es cómo reacciona la producción a incrementos de todos los factores al mismo tiempo. Por ejemplo, supongamos que todos los factores se duplican; en tal caso, ¿se duplicará la producción o la relación no será tan sencilla? Esta pregunta hace referencia a los *rendimientos a escala* de la función de producción que ha interesado a los economistas desde que Adam Smith analizó con detenimiento la producción de alfileres. Smith identificó dos fuerzas que actuaban cuando se realizaba el experimento conceptual de duplicar todos los factores de producción. Primero, la duplicación de la escala permite una mayor división del trabajo y una especialización de las funciones. Por tanto, cabe suponer que la eficiencia podría aumentar; es decir, la producción podría aumentar más del doble. Segundo, la duplicación de los factores de producción también implica cierta pérdida de eficiencia porque resultará más difícil que los administradores supervisen dado que la escala de la empresa es más grande. Una interrogante empírica importante es saber cuál de las dos tendencias tendrá mayor efecto.

Ofrecer una definición técnica de estos conceptos es tan fácil que puede llevar a error:

DEFINICIÓN

Rendimientos a escala. Si la función de producción está determinada por $q = f(k, l)$ y si multiplicamos todos los factores de producción por la misma constante positiva, t (donde $t > 1$), clasificamos los *rendimientos a escala* de la función de producción de la manera siguiente:

Efecto en la producción	Rendimientos a escala
I. $f(tk, tl) = tf(k, l) = tq$	Constantes
II. $f(tk, tl) < tf(k, l) = tq$	Decrecientes
III. $f(tk, tl) > tf(k, l) = tq$	Crecientes

Por intuición, diríamos que si, un incremento proporcional de los factores de producción incrementa la producción en igual proporción, entonces la función de producción tendrá rendimientos constantes a escala. Si la producción incrementa menos que proporcionalmente, entonces la función tendrá rendimientos decrecientes a escala. Y, si la producción aumenta más que proporcionalmente, entonces los rendimientos a escala serán crecientes. Como se verá, en teoría existe la posibilidad de que una función tenga rendimientos a escala constantes para algunos niveles de uso de los factores de producción y rendimientos crecientes o decrecientes para otros niveles.[5] Sin embargo, los economistas se suelen referir *al* grado de los rendimientos a escala de una función de producción empleando el concepto implícito de que sólo están teniendo en cuenta un intervalo relativamente reducido de variación del uso de los factores de producción y del nivel correspondiente de producción.

Rendimientos a escala constantes

Diversas razones económicas explican por qué la función de producción de una empresa puede mostrar rendimientos a escala constantes. Si la empresa opera varias plantas idénticas, ésta puede aumentar o disminuir la producción con tan sólo variar la cantidad de ellas que mantiene operando. Es decir, la empresa puede duplicar la producción si duplica la cantidad de plantas que opera y, para ello, tendrá que emplear justo el doble de factores de producción. Por otra parte, si nuestro modelo incluyera el comportamiento de una industria completa, compuesta por muchas empresas, el supuesto de los rendimientos a escala constantes tendría sentido porque la industria se expandirá o contraerá con tan sólo sumar o recortar una cantidad arbitraria de empresas idénticas (véase el capítulo 10). Por último, algunos estudios de la economía completa de Estados Unidos han revelado que los rendimientos a escala constantes ofrecen una aproximación razonablemente válida como para poder utilizarlos en forma de una función de producción "agregada". Así pues, por todo lo anterior, consideramos que vale la pena analizar el caso de los rendimientos a escala constantes con cierto detenimiento.

Cuando una función de producción exhibe rendimientos a escala constantes cumple con la definición de "homogeneidad" que estudiamos en el capítulo 2. Es decir, la producción es homogénea de grado uno en sus factores de producción porque

$$f(tk, tl) = t^1 f(k, l) = tq. \tag{7.26}$$

En el capítulo 2 demostramos que si una función es homogénea de grado k, entonces sus derivadas son homogéneas de grado $k - 1$. En este contexto, lo anterior implica que las funciones de la productividad marginal derivadas de una función de producción con rendimientos a escala constantes son homogéneas de grado cero. Es decir,

$$\begin{aligned} PMg_k &= \frac{\partial f(k,l)}{\partial k} = \frac{\partial f(tk,tl)}{\partial k} \\ PMg_l &= \frac{\partial f(k,l)}{\partial l} = \frac{\partial f(tk,tl)}{\partial l} \end{aligned} \tag{7.27}$$

para una $t > 0$. En concreto, podemos hacer que $t = \frac{1}{l}$ en las ecuaciones 7.27 y tendremos

$$\begin{aligned} PMg_k &= \frac{\partial f\left(\frac{k}{l}, 1\right)}{\partial k} \\ PMg_l &= \frac{\partial f\left(\frac{k}{l}, 1\right)}{\partial l}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Es decir, la productividad marginal de un factor de producción depende exclusivamente de la proporción del factor del capital al del trabajo y no de los niveles absolutos de estos factores. Este hecho es especialmente importante, por ejemplo, para explicar las diferencias de la productividad entre industrias o entre países.

[5] Una medida local de los rendimientos a escala sería la elasticidad de la escala, definida como

$$e_{q,t} = \frac{\partial f(tk,tl)}{\partial t} \cdot \frac{t}{f(tk,tl)},$$

donde la expresión se evaluará en $t = 1$. En principio, este parámetro puede tomar distintos valores, dependiendo del nivel de factores de producción usados. Véanse los problemas 7.4 y 7.5 para algunos ejemplos que aplican este concepto.

Funciones homotéticas de producción

Una consecuencia de las ecuaciones 7.28 es que la *TTS* (= PM_l/PM_k) para una función de producción con rendimientos a escala constantes dependerá tan sólo de la proporción de los factores de producción y no de sus niveles absolutos. Es decir, esta función será homotética (véase el capítulo 2), o sea que sus isocuantas serán expansiones radiales de alguna otra. La figura 7.2 muestra esta situación. En una recta que pasa por el origen (donde la proporción *k/l* no cambia), las pendientes de isocuantas sucesivamente más altas son idénticas. Esta propiedad del mapa de isocuantas será de enorme utilidad en distintas ocasiones.

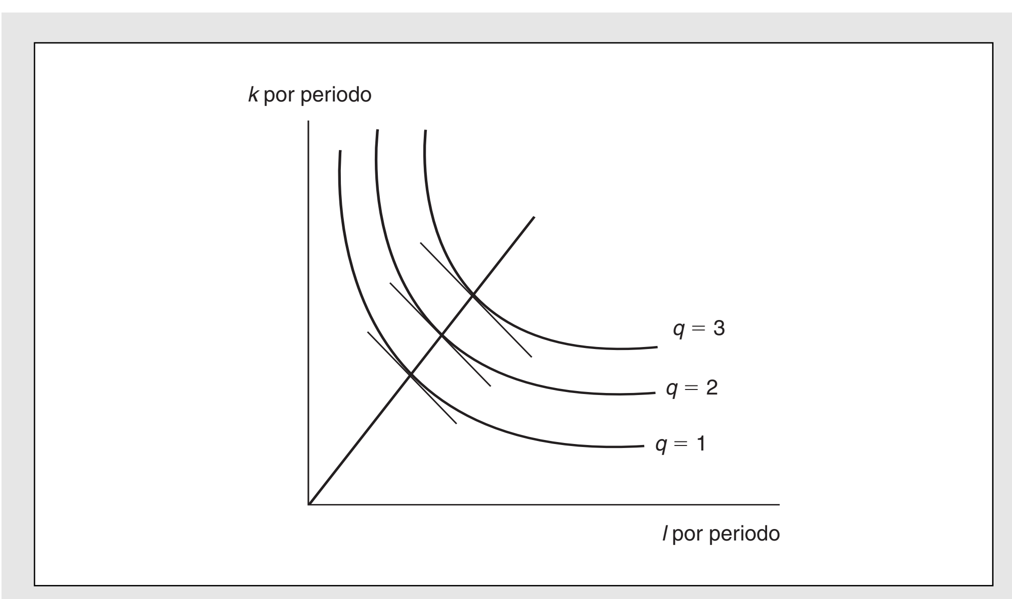
Un ejemplo numérico sencillo permitirá entender intuitivamente este resultado. Supongamos que tres trabajadores, con un martillo cada uno, pueden instalar un techo en un día o lo mismo pueden hacer dos trabajadores con dos martillos cada uno (los trabajadores son ambidiestros). En consecuencia, la *TTS* de martillos por trabajadores es de uno a uno; es decir, un martillo más puede sustituir a un trabajador. Si este proceso de producción exhibe rendimientos a escala constantes, entonces seis trabajadores con seis martillos o cuatro trabajadores con ocho martillos podrán instalar dos techos en un día. En el segundo caso, dos martillos sustituyen a dos trabajadores, por lo cual la *TTS* es de uno a uno. En los casos de rendimientos a escala constantes, si expandimos el nivel de producción no alteramos el intercambio entre factores de producción, de modo que las funciones de producción son homotéticas.

La función de producción puede tener un mapa de curvas homotéticas de indiferencia a pesar de que no exhiba rendimientos a escala constantes. Como vimos en el capítulo 2, toda transformación monótona de una función homogénea conserva esta propiedad de homoteticidad. Así, los rendimientos a escala, crecientes o decrecientes, pueden ser incorporados a una función de rendimientos a escala constantes por medio de una transformación adecuada. La más común de estas transformaciones es la exponencial. Por tanto, si $f(k, l)$ es una función de producción con rendimientos a escala constantes, podemos dejar que

$$F(k, l) = [f(k, l)]^{\gamma}, \tag{7.29}$$

FIGURA 7.2 **Mapa de isocuantas para una función de producción con rendimientos a escala constantes**

Para una función de producción con rendimientos a escala constantes, la *TTS* depende tan sólo de la proporción de *k* a *l*, y no de la escala de producción. Por tanto, cada isocuanta será una ampliación radial de la isocuanta unitaria. A lo largo de cualquier recta que parta del origen (una recta con *k/l* constante), la *TTS* será igual en todas las isocuantas.



donde γ es un exponente positivo. Si $\gamma > 1$ tendremos

$$F(tk, tl) = [f(tk, tl)]^{\gamma} = [tf(k, l)]^{\gamma} = t^{\gamma} [f(k, l)]^{\gamma} = t^{\gamma} F(k, l) > tF(k, l) \qquad (7.30)$$

Para una $t > 1$. Por tanto, esta función de producción transformada exhibe rendimientos a escala crecientes. Una prueba idéntica demuestra que la función F exhibe rendimientos a escala decrecientes cuando $\gamma < 1$. Dado que esta función es homotética a lo largo de todas estas transformaciones, hemos demostrado que existen casos importantes cuando podemos separar la cuestión de los rendimientos a escala de las cuestiones que involucran la forma de una isocuanta. En la sección siguiente se analizará cómo describir las formas de las isocuantas.

El caso con *n* factores

Podemos generalizar fácilmente la definición de los rendimientos a escala a una función de producción con n factores de producción. Si esa función de producción está determinada por

$$q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (7.31)$$

y si multiplicamos todos los factores de producción por $t > 1$, tendremos

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t^k q \qquad (7.32)$$

para una constante k. Si $k = 1$, entonces la función de producción muestra rendimientos constantes a escala. Los rendimientos, decrecientes o crecientes, a escala corresponden a los casos $k < 1$ y $k > 1$, respectivamente.

La parte crucial de esta definición matemática es el requisito de que todos los factores de producción aumenten en la misma proporción, t. Esta condición tendrá poco sentido económico en muchos procesos de producción del mundo real. Por ejemplo, una empresa podría tener un solo "jefe" y no necesariamente duplicaría esta cantidad a pesar de que duplicara todos los demás factores. Asimismo, la producción de una granja podría depender de la fertilidad de la tierra. Tal vez no sea posible, literalmente, duplicar la cantidad de hectáreas cultivadas al tiempo que se mantiene la fertilidad, porque es posible que las nuevas tierras de cultivo no sean tan buenas como las que ya se están cultivando. Por tanto, algunos factores tendrán que ser fijos (o, al menos, imperfectamente variables) para muchos efectos prácticos. En estos casos, parece probable que se presente cierta productividad decreciente (debido a que incrementan los factores variables empleados), si bien no podemos decir que se trate de "rendimientos decrecientes a escala" debido a la presencia de factores que se mantienen fijos.

La elasticidad de sustitución

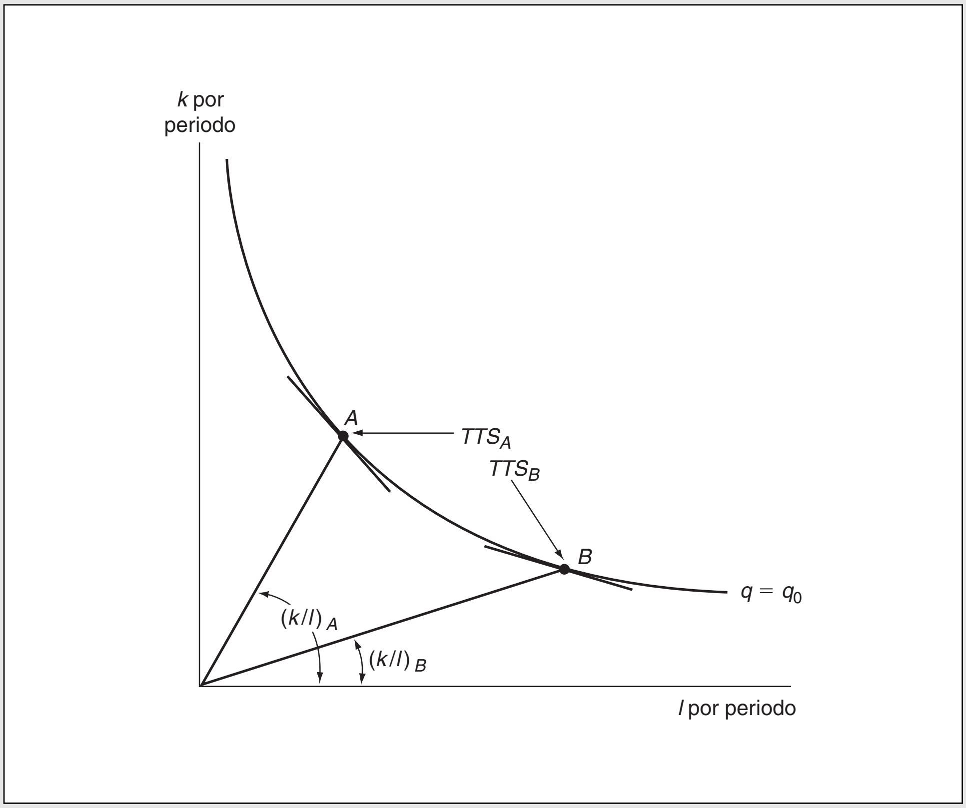
Otra característica importante de la función de producción es la "facilidad" con la cual podemos sustituir un factor por otro. Se trata, fundamentalmente, de una cuestión relativa a la forma de una sola isocuanta y no de una relativa al mapa entero de isocuantas. A lo largo de una isocuanta, la tasa técnica de sustitución disminuirá a medida que la proporción de capital a trabajo disminuye (es decir, a medida que k/l disminuye). Ahora, tendremos que definir algún parámetro que mida el grado de esta respuesta. Si la *TTS* no cambia en absoluto cuando k/l, varía, entonces podríamos decir que la sustitución es fácil, porque la proporción de las productividades marginales de los dos factores no varía cuando cambia la combinación de los factores. Por el contrario, si la *TTS* cambia con rapidez ante pequeñas variaciones de k/l, entonces diríamos que la sustitución es difícil, porque las pequeñas variaciones de la combinación de factores tendrán efectos significativos en las productividades relativas de éstos. La *elasticidad de sustitución,* es una medida, sin escala, de este grado de respuesta y, a continuación, se presenta una definición formal de este concepto:

Elasticidad de sustitución. En el caso de la función de producción $q = f(k, l)$, la *elasticidad de sustitución* (σ) mide la variación proporcional de k/l respecto a la variación proporcional de la *TTS* a lo largo de una isocuanta. Es decir,

$$\sigma = \frac{\text{porcentual } \Delta(k/l)}{\text{porcentual } \Delta TTS} = \frac{d(k/l)}{dTTS} \cdot \frac{TTS}{k/l} = \frac{\partial \ln k/l}{\partial \ln TTS} = \frac{\partial \ln k/l}{\partial \ln f_l/f_k}. \qquad (7.33)$$

FIGURA 7.3 **Descripción gráfica de la elasticidad de sustitución**

Al movernos del punto A al punto B sobre la isocuanta $q = q_0$ tanto la proporción de capital a trabajo (k/l) como la *TTS* cambiarán. Se define la elasticidad de sustitución (σ) como la proporción de estos cambios proporcionales, que mide la curvatura de la isocuanta.



Dado que, k/l y la *TTS* se mueven en la misma dirección a lo largo de una isocuanta, el valor de σ siempre es positivo. La figura 7.3 ilustra este concepto, gráficamente, como un movimiento del punto A al punto B de la isocuanta. En este movimiento, tanto la *TTS* como la proporción de k/l cambiarán; estamos interesados en la magnitud relativa de estos cambios. Si σ tiene un valor alto, la *TTS* no cambiará mucho respecto a k/l, y la isocuanta será relativamente plana. Por otra parte, un valor reducido de σ implica una isocuanta bastante curvada; es decir, la *TTS* cambiará en una cantidad sustancial a medida que varía k/l. Por lo general, es posible que la elasticidad de sustitución varíe a medida que nos movemos a lo largo de una isocuanta y a medida que la escala de producción cambia. Sin embargo, con frecuencia, es conveniente suponer que σ es constante a lo largo de la isocuanta. Si la función de producción también es homotética, entonces, como todas las isocuantas son meras extensiones radiales, σ será igual en todas las isocuantas. Más adelante en este capítulo, y en muchos de sus problemas, encontraremos estas funciones.[6]

[6]Podemos expresar la elasticidad de sustitución directamente en términos de la función de producción y sus derivadas, en el caso de los rendimientos a escala constantes, como

$$\sigma = \frac{f_k \cdot f_l}{f \cdot f_{k,l}}.$$

Sin embargo, esta fórmula es bastante engorrosa. Por tanto, suele ser más fácil aplicar la definición logarítmica de la ecuación 7.33. Encontrará un resumen breve en P. Berck y K. Sydsaeter, ***Economist's Mathematical Manual***, Springer-Verlag, Berlín, 1991, capítulo 5.

El caso de *n* factores de producción

Generalizar la elasticidad de sustitución al caso de muchos factores de producción plantea varias complicaciones. Un posible planteamiento consiste en adoptar una definición análoga a la de la ecuación 7.33; es decir, definir la elasticidad de sustitución entre dos factores como el cambio proporcional del cociente de los dos factores respecto al cambio proporcional de la *TTS* al tiempo que se mantiene constante la producción.[7] Para que esta definición quede completa será necesario cumplir con el requisito de que se mantengan constantes todos los demás factores, aparte de los dos factores en cuestión. Sin embargo, este requisito (que no es relevante cuando sólo hay dos factores de producción) restringe el valor de esta posible definición. En los procesos productivos del mundo real es probable que una variación de la proporción de los dos factores estará acompañada de variaciones en los niveles de los otros factores. Algunos de estos últimos pueden ser complementarios de los que estamos cambiando, mientras que otros pueden ser sustitutos, por lo que, al mantenerlos constantes, creamos una restricción bastante artificial. Por ello, en el caso de *n* bienes, por lo general se suele usar otra definición de la elasticidad de sustitución que permite esta posibilidad de complementos y sustitutos en la función de costos de la empresa. En el siguiente capítulo se describirá brevemente este concepto alternativo.

Cuatro funciones de producción simples

En esta sección se verán cuatro funciones de producción simples, cada una de ellas caracterizada por una elasticidad de sustitución diferente. Mostramos estas funciones tan sólo para el caso de dos factores de producción, pero es fácil generalizarlas a casos de muchos factores (véanse las ampliaciones de este capítulo).

Caso 1: Lineales ($\sigma = \infty$)

Suponga que una función de producción está determinada por

$$q = f(k, l) = ak + bl. \tag{7.34}$$

Resulta fácil demostrar que esta función de producción muestra rendimientos constantes a escala. Para una $t > 1$,

$$f(tk, tl) = atk + btl = t(ak + bl) = tf(k, l). \tag{7.35}$$

Todas las isocuantas de esta función de producción son líneas rectas paralelas con una pendiente igual a $-b/a$. La sección a) de la figura 7.4 presenta este mapa de isocuantas. Dado que la *TTS* es constante a lo largo de una isocuanta con forma de línea recta, en la definición de σ (ecuación 7.33) el denominador es igual a 0 y, por tanto σ es infinito. Si bien esta función de producción lineal es un ejemplo muy útil, rara vez lo encontramos en la práctica, porque pocos procesos de producción se caracterizan por una posibilidad de sustitución tan fácil. De hecho, en este caso, podemos considerar que el capital y el trabajo son sustitutos perfectos el uno del otro. Una industria que se caracteriza por esta función de producción podría utilizar *sólo* capital o *sólo* trabajo, dependiendo de los precios de estos factores. Resulta difícil imaginar un proceso de producción así; puesto que cada máquina al menos necesita de una persona que oprima sus botones y cada trabajador requiera cierto equipo de capital, aun cuando el equipo sea mínimo.

Caso 2: Proporciones fijas ($\sigma = 0$)

La función de producción que se caracteriza por $\sigma = 0$ es un caso importante de la *función de producción de proporciones fijas.* El capital y el trabajo siempre se deben utilizar en una proporción fija. Las isocuantas de esta función de producción tienen forma de "L", como se muestra

---

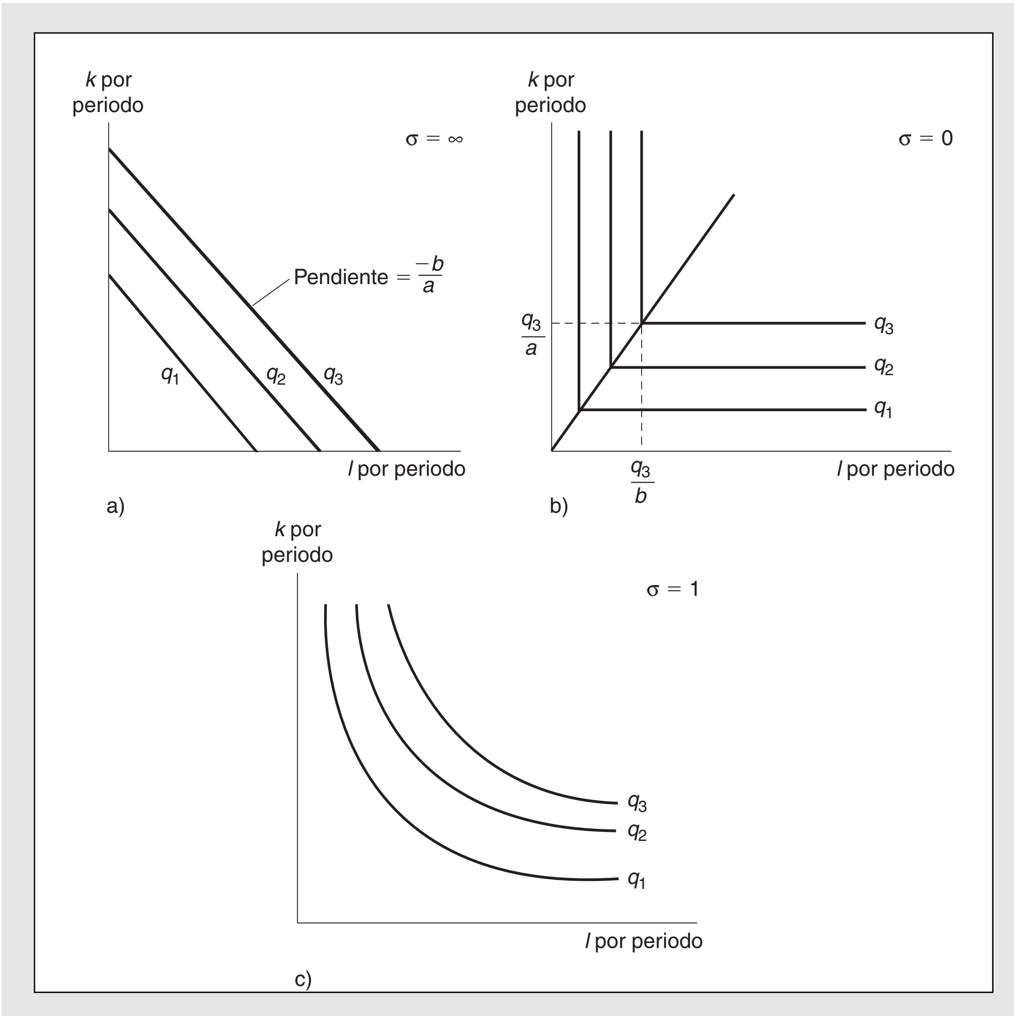
[7]Es decir, podríamos definir la elasticidad de sustitución entre el factor de producción *i* y el *j* como

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \ln\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{\partial \ln\left(\frac{f_j}{f_i}\right)}$$

para movimientos a lo largo de $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = c$. Nótese que, de hecho, el uso de derivadas parciales en esta definición requiere que, cuando consideramos movimientos a lo largo de la isocuanta c mantengamos constantes todos los factores de producción que no sean *i* ni *j*.

FIGURA 7.4 **Mapas de isocuantas para las funciones de producción simples con diversos valores para σ**

Estas figuras ilustran tres valores posibles para la elasticidad de sustitución. En a), el capital y el trabajo son sustitutos perfectos. En este caso, la *TSR* no variará cuando cambie la proporción de capital a trabajo. En b), el caso de las proporciones fijas, la sustitución no es posible. La proporción de capital a trabajo es fija en b/a. El inciso c) ilustra el caso de una posibilidad limitada de sustitución.



en la sección b) de la figura 7.4. Una empresa que se caracteriza por esta función de producción siempre operará a lo largo de la recta en la cual la proporción de k/l es constante. No sería eficiente operar en otro punto que no sea el vértice de las isocuantas porque, avanzando por la isocuanta hacia el vértice, se podría elaborar la misma producción con menos factores. Dado que k/l es constante, la definición de la elasticidad de sustitución permite ver con facilidad que σ debe ser igual a 0.

La fórmula matemática de la función de producción de proporciones fijas está determinada por

$$q = \text{mín}\ (ak, bl) \quad a, b > 0, \tag{7.36}$$

donde el operador "mín" significa que q está determinado por el menor de los dos valores entre corchetes. Por ejemplo, supongamos que $ak < bl$; entonces $q = ak$, y diremos que el capital es la restricción efectiva en este proceso de producción. El empleo de más trabajo no permitiría incrementar la producción y, por tanto, el producto marginal del trabajo es cero; es decir, en este caso, es inútil añadir más trabajo. Asimismo, si $ak > bl$, el trabajo es la restricción efectiva de la producción y es inútil añadir capital. Cuando $ak = bl$, los dos factores son utilizados plenamente. Cuando esto ocurre, $k/l = b/a$, y la producción tiene lugar en un vértice del mapa de isocuantas. Si ambos factores son caros, éste es el único punto para operar que minimiza los costos. El punto geométrico de todos estos vértices es una línea recta que pasa por el origen con una pendiente determinada por b/a.

La función de producción de proporciones fijas tiene una amplia gama de aplicaciones.[8] Por ejemplo, muchas máquinas exigen la presencia de una cantidad determinada de personas para operarlas, pero el exceso de trabajadores sería inútil. Considere la posibilidad de combinar capital (una segadora) y trabajo para labrar un campo. Siempre hará falta que una persona controle la segadora y uno de los factores sin el otro no produciría nada. Es posible que muchas máquinas sean de este tipo y que requieran un complemento fijo de trabajadores por máquina.[9]

Caso 3: Cobb-Douglas ($\sigma = 1$)

La función de producción en la cual $\sigma = 1$, denominada *función de producción Cobb-Douglas*[10] ofrece un caso intermedio entre los dos casos extremos analizados anteriormente. Las isocuantas del caso Cobb-Douglas tienen una forma convexa "normal", como se muestra en la sección c) de la figura 7.4. La fórmula matemática de la función de producción Cobb-Douglas está determinada por

$$q = f(k, l) = ak^a l^b, \tag{7.37}$$

donde A, a y b son constantes positivas.

La función Cobb-Douglas puede exhibir un tipo de rendimientos a escala, dependiendo de los valores de a y b. Supongamos que todos los factores de producción se multiplican por un factor de t. En este caso,

$$\begin{aligned} f(tk, tl) &= A(tk)^a(tl)^b = at^{a+b}k^a l^b \\ &= t^{a+b}f(k, l). \end{aligned} \tag{7.38}$$

De ahí que, si $a + b = 1$, entonces la función Cobb-Douglas tiene rendimientos constantes a escala, porque la producción también se multiplica por un factor de t. Si $a + b > 1$, la función tendrá rendimientos crecientes a escala, mientras que $a + b < 1$ corresponderá al caso de rendimientos decrecientes a escala. Resulta fácil demostrar que la elasticidad de sustitución es igual a 1 en el caso de la función de producción Cobb-Douglas.[11] Este hecho ha llevado a los investigadores a utilizar la versión de esta función con rendimientos constantes a escala que puede ofrecer una descripción genérica de las relaciones de producción agregada de muchos países.

---

[8]Con la fórmula que presenta la ecuación 7.35, la función de producción de proporciones fijas muestra rendimientos a escala constantes porque

$$f(tk, tl) = \text{mín}\,(atk, btl) = t \cdot \text{mín}\,(ak, bl) = tf(k, l)$$

para una $t > 1$ cualquiera. Como antes, es muy fácil incorporar rendimientos crecientes o decrecientes a la función si usamos una transformación no lineal de esta fórmula de las funciones, como $[f(k, l)]^\gamma$ donde γ puede ser mayor o menor que uno.

[9]No obstante, el ejemplo de la segadora indica otra posibilidad. Cabe suponer que existe cierto margen para elegir el tamaño de la segadora que compraremos. Por tanto, antes de realizar la compra, podemos considerar que la proporción de capital a trabajo para segar campos es variable; es decir, podemos elegir un aparato cualquiera, desde unas tijeras hasta una segadora industrial. Sin embargo, una vez realizada la compra, la proporción de capital a trabajo será fija.

[10]Debe su nombre a C. W. Cobb y P. H. Douglas. Véase P. H. Douglas, *The Theory of Wages*, Macmillan Co., Nueva York, 1934, pp. 132-135.

[11]Para la función Cobb-Douglas,

$$TTS = \frac{f_l}{f_k} = \frac{bAk^a l^{b-1}}{aAk^{a-1}l^b} = \frac{b}{a}\frac{k}{l}$$

o

$$\ln TTS = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{k}{l}\right).$$

Por tanto:

$$\sigma = \frac{\partial \ln k/l}{\partial \ln TTS} = 1.$$

La función Cobb-Douglas también ha demostrado que es muy útil para muchas aplicaciones prácticas porque es una función lineal cuando se aplican logaritmos:

$$\ln q = \ln A + a \ln k + b \ln l. \tag{7.39}$$

Por tanto, la constante a será la elasticidad de la producción respecto al factor capital y b será la elasticidad de la producción respecto al factor trabajo.[12] A veces, podemos estimar estas constantes a partir de datos reales y emplear las estimaciones para calcular los rendimientos a escala (analizando la suma de $a + b$) y para otros fines prácticos.

Caso 4: Función de producción CES

La fórmula de una función que incluye los tres casos anteriores y que también permite que σ tenga otros valores es la función de producción con elasticidad de sustitución constante (CES), que introdujeran Arrow y sus compañeros por primera vez en 1961.[13] Esta función está determinada por

$$q = f(k, l) = [k^\rho + l^\rho]^{\gamma/\rho} \tag{7.40}$$

para $\rho \le 1$, $\rho \ne 0$ y $\gamma > 0$. Esta función es muy similar a la función de utilidad CES que analizamos en el capítulo 3, pero ahora hemos añadido el exponente γ/ρ que permite introducir explícitamente los factores de los rendimientos a escala. En el caso de $\gamma > 1$ la función exhibe rendimientos crecientes a escala, mientras que en el de $\gamma < 1$ exhibe rendimientos decrecientes.

La aplicación directa de la definición de σ a esta función[14] permite obtener el importante resultado de que

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}. \tag{7.41}$$

Por tanto, el caso lineal, el de proporciones fijas y el Cobb-Douglas corresponden a $\rho = 1$, $\rho = -\infty$ y $\rho = 0$, respectivamente. En el caso de proporciones fijas y el Cobb-Douglas la comprobación de este resultado exige utilizar límites.

Con frecuencia, utilizamos la función CES con una ponderación distributiva, β $(0 \le \beta \le 1)$, para indicar la importancia relativa de los factores:

$$q = f(k, l) = [\beta k^\rho + (1-\beta) l^\rho]^{\gamma/\rho}. \tag{7.42}$$

Esta función, con rendimientos constantes a escala y $\rho = 0$, converge con la fórmula Cobb-Douglas

$$q = f(k, l) = k^\beta l^{1-\beta}. \tag{7.43}$$

---

[12] Véase el problema 7.5.

[13] K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas y R. M. Solow, "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency", *Review of Economics and Statistics*, agosto de 1961, pp. 225-250.

[14] Para la función CES tenemos

$$TTS = \frac{f_l}{f_k} = \frac{\frac{\gamma}{\rho} \cdot q^{(\gamma-\rho)/\gamma} \cdot \rho l^{\rho-1}}{\frac{\gamma}{\rho} \cdot q^{(\gamma-\rho)/\gamma} \cdot \rho k^{\rho-1}} = \left(\frac{l}{k}\right)^{\rho-1} = \left(\frac{k}{l}\right)^{1-\rho}.$$

De modo que, si aplicamos la definición a la elasticidad de sustitución tendremos

$$\sigma = \frac{\partial \ln(k/l)}{\partial \ln TTS} = \frac{1}{1-\rho}.$$

En este cálculo, nótese que el parámetro ρ cancela las funciones de productividad marginal, garantizando con ello que estas productividades marginales sean positivas incluso cuando ρ es negativa (como ocurre en muchos casos). Esto explica por qué ρ aparece en dos lugares diferentes en la definición de la función CES.

EJEMPLO 7.3

Generalización de una función de producción de Leontief

Supongamos que la función de producción de un bien está determinada por

$$q = f(k, l) = k + l + 2\sqrt{k \cdot l}. \qquad (7.44)$$

Esta función es un caso especial de las funciones que llevan el nombre del economista ruso-estadounidense Wassily Leontief.[15] La función claramente exhibe rendimientos constantes a escala porque

$$f(tk, tl) = tk + tl + 2t\sqrt{kl} = tf(k,l). \qquad (7.45)$$

Las productividades marginales de la función de Leontief son

$$\begin{aligned} f_k &= 1 + (k/l)^{-0.5} \\ f_l &= 1 + (k/l)^{0.5}. \end{aligned} \qquad (7.46)$$

Por tanto, las productividades marginales son positivas y decrecientes. Como cabe esperar (porque esta función exhibe rendimientos constantes a escala), en este caso la *TTS* depende tan sólo de la proporción de los dos insumos

$$TTS = \frac{f_l}{f_k} = \frac{1 + (k/l)^{0.5}}{1 + (k/l)^{-0.5}}. \qquad (7.47)$$

Esta *TTS* disminuye a medida que k/l disminuye, de modo que las isocuantas tienen la forma convexa habitual.

Podemos calcular la elasticidad de sustitución de esta función de producción de dos maneras. En el primer caso, usted notará que, en este caso especial, podemos expresar los factores de la función como

$$q = k + l + \sqrt{kl} = (\sqrt{k} + \sqrt{l})^2 = (k^{0.5} + l^{0.5})^2, \qquad (7.48)$$

lo cual deja en claro que esta función es un caso particular de CES, donde $\rho = 0.5$, $\gamma = 1$. De ahí que la elasticidad de sustitución en este caso sea $\sigma = 1/(1 - \rho) = 2$.

Por supuesto que, en la mayor parte de los casos no es posible llegar a los factores de esta forma tan simple. Un planteamiento más exhaustivo consiste en aplicar la definición de la elasticidad de sustitución presentada en este capítulo, en la nota 6 al pie de página:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{f_k f_l}{f \cdot f_{kl}} = \frac{[1 + (k/l)^{0.5}][1 + (k/l)^{-0.5}]}{q \cdot (0.5/\sqrt{kl})} \\ &= \frac{2 + (k/l)^{0.5} + (k/l)^{-0.5}}{1 + 0.5(k/l)^{0.5} + 0.5(k/l)^{-0.5}} = 2. \end{aligned} \qquad (7.49)$$

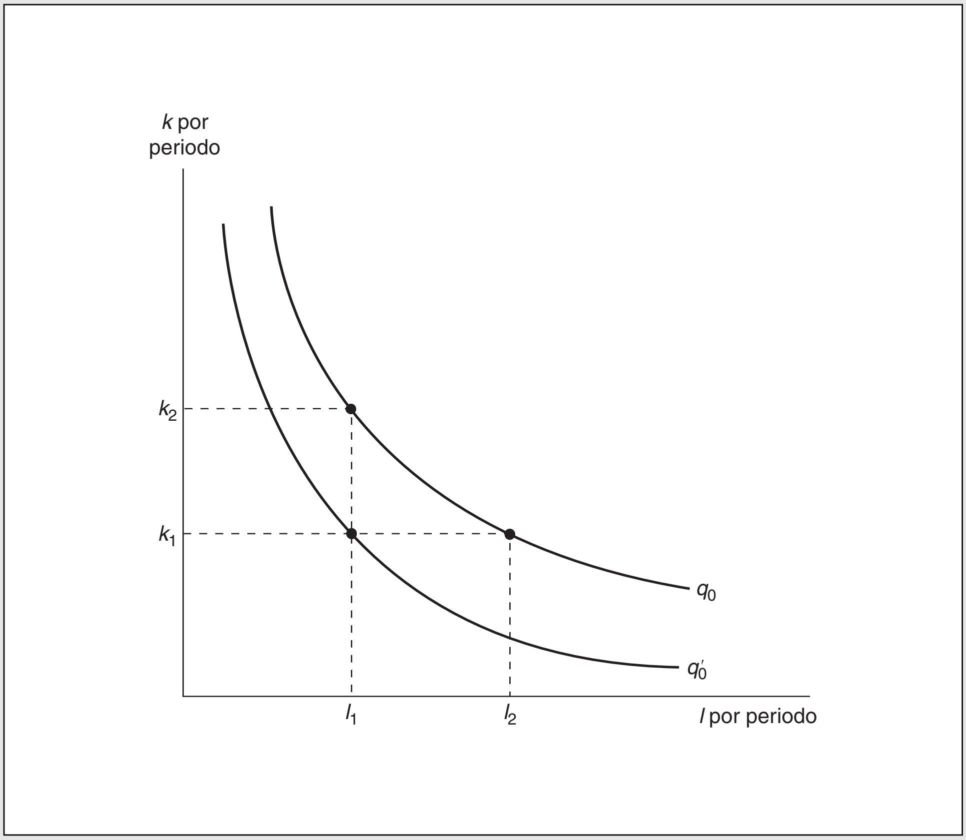
Nótese que en este cálculo, la proporción de los factores (k/l) se elimina, dando lugar a un resultado muy simple. En otras aplicaciones, sería dudoso que ocurra un resultado tan fortuito y, por tanto, que la elasticidad de sustitución podría no ser constante a lo largo de la isocuanta (véase el problema 7.7). Sin embargo, en este caso, la intuición nos dice que el resultado de $\sigma = 2$ es razonable porque el valor representa un punto de compromiso entre la elasticidad de sustitución para esta parte lineal de la función de producción ($q = k + l$, $\sigma = \infty$) y la parte Cobb-Douglas $q = 2k^{0.5}l^{0.5}$, $\sigma = 1$.

Pregunta: ¿Qué información obtiene usted de esta función de producción si hace una gráfica de la isocuanta $q = 4$? ¿Esta función por qué generaliza el caso de las proporciones fijas?

[15]Leontief fue uno de los primeros economistas en analizar a los factores de producción y a la producción. En este análisis, se supone que la producción ocurre con una proporción fija de tecnología. La función de producción de Leontief generaliza el caso de las proporciones fijas. Encontrará una explicación más detallada de las funciones de producción de Leontief en las ampliaciones de este capítulo

FIGURA 7.5 **Avances tecnológicos**

Los avances tecnológicos desplazan la isocuanta q_0 hacia el origen. La nueva isocuanta de q_0 o sea q'_0, muestra que ahora es posible producir un determinado nivel de producción con menos factores de producción. Por ejemplo, con k_1 unidades de capital, ahora sólo hacen falta l_1 unidades de trabajo para producir q_0, mientras que antes del avance tecnológico hacían falta l_2 unidades de trabajo.



Avances tecnológicos

Los métodos de producción mejoran a lo largo del tiempo y es importante que el concepto de la función de producción pueda captar estas mejoras. La figura 7.5 presenta una visión simplificada de estos avances. Inicialmente, la isocuanta q_0 registra las combinaciones de capital y trabajo que la empresa puede utilizar para obtener un nivel de producción igual a q_0. Tras el desarrollo de mejores técnicas de producción, esta isocuanta se desplaza a q'_0. Ahora la empresa puede obtener el mismo nivel de producción con menos factores. Una forma de medir esta mejora es observando que antes, con una cantidad de capital, por decir, de k_1, se requerían l_2 unidades de trabajo para producir q_0, mientras que ahora sólo hacen falta l_1. La producción por trabajador ha aumentado de q_0/l_2 a q_0/l_1. No obstante, debemos tener cuidado con este tipo de cálculos. Un incremento del factor capital hasta k_2 también habría permitido reducir el factor trabajo hasta l_1 a lo largo de la isocuanta original q_0. En este caso, la producción por trabajador también aumentaría, a pesar de que no se produjera un auténtico avance tecnológico. El uso del concepto de la función de producción ayuda a los economistas a diferenciar estos dos conceptos y, por tanto, les permite estimar con precisión la tasa de cambio tecnológico.

Medición de los avances tecnológicos

Lo primero que debemos observar respecto a los avances tecnológicos es que, históricamente, la tasa de crecimiento de la producción, a lo largo del tiempo, ha sido superior a la tasa de crecimiento que podemos atribuir al crecimiento de los factores de producción definidos de forma convencional. Suponga que partimos de una función de producción

$$q = A(t)f(k, l) \tag{7.50}$$

para un bien (o tal vez para mostrar la producción del conjunto de la sociedad). El término $A(t)$ de la función representa todas las influencias, aparte de k (horas máquina) y l (horas hombre), que intervienen para determinar q. Los cambios de A a lo largo del tiempo representan los avances tecnológicos. Por tanto, A aparece como una función del tiempo. Supuestamente $dA/dt > 0$; es decir, niveles determinados de los factores trabajo y capital serán cada vez más productivos a lo largo del tiempo.

Si diferenciamos la ecuación 7.50 respecto al tiempo se obtendrá

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{dA}{dt} \cdot f(k,l) + A \cdot \frac{df(k,l)}{dt} \\ &= \frac{dA}{dt} \cdot \frac{q}{A} + \frac{q}{f(k,l)}\left[\frac{\partial f}{\partial k} \cdot \frac{dk}{dt} + \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \frac{dl}{dt}\right]. \end{aligned} \tag{7.51}$$

Si se divide entre q se obtendrá

$$\frac{dq/dt}{q} = \frac{dA/dt}{A} + \frac{\partial f/\partial k}{f(k,l)} \cdot \frac{dk}{dt} + \frac{\partial f/\partial l}{f(k,l)} \cdot \frac{dl}{dt} \tag{7.52}$$

o

$$\frac{dq/dt}{q} = \frac{dA/dt}{A} + \frac{\partial f}{\partial k} \cdot \frac{k}{f(k,l)} \cdot \frac{dk/dt}{k} + \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \frac{l}{f(k,l)} \cdot \frac{dl/dt}{l}. \tag{7.53}$$

Ahora, para una variable x, cualquiera $(dx/dt)/x$ será la tasa de crecimiento proporcional de x por unidad de tiempo. Aquí, lo llamaremos G_x.[16] Por tanto, podemos escribir la ecuación 7.53 en términos de tasas de crecimiento de la manera siguiente

$$G_q = G_A + \frac{\partial f}{\partial k} \cdot \frac{k}{f(k,l)} \cdot G_k + \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \frac{l}{f(k,l)} \cdot G_l, \tag{7.54}$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial k} \cdot \frac{k}{f(k,l)} &= \frac{\partial q}{\partial k} \cdot \frac{k}{q} = \textbf{elasticidad de la producción respecto al factor capital} \\ &= e_{q,k} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \frac{l}{f(k,l)} &= \frac{\partial q}{\partial l} \cdot \frac{l}{q} = \textbf{elasticidad de la producción respecto al factor capital} \\ &= e_{q,l}. \end{aligned}$$

[16]Dos características útiles de esta definición son: 1) $G_{x \cdot y} = G_x + G_y$; es decir, la tasa de crecimiento del producto de dos variables es la suma de la tasa de crecimiento de cada una de ellas; y 2) $G_{x/y} = G_x - G_y$.

Contabilidad del crecimiento

Por tanto, la ecuación del crecimiento a final de cuentas será

$$G_q = G_A + e_{q,k}G_x + e_{q,l}G_l. \tag{7.55}$$

Esto demuestra que podemos desagregar la tasa de crecimiento de la producción como la suma de dos componentes: el crecimiento atribuible a las variaciones de los factores de producción (k y l) y otro crecimiento "residual" (es decir, las variaciones de A) que representan los avances tecnológicos.

La ecuación 7.55 ofrece una forma de estimar la importancia relativa de los avances tecnológicos (G_A) para determinar el crecimiento de la producción. Por ejemplo, R. M. Solow, en un estudio pionero de toda la economía de Estados Unidos entre los años 1909 y 1949, registró los valores siguientes para los términos de la ecuación:[17]

$$\begin{aligned} G_q &= 2.75 \text{ por ciento por año} \\ G_l &= 1.00 \text{ por ciento por año} \\ G_k &= 1.75 \text{ por ciento por año} \\ e_{q,l} &= 0.65 \\ e_{q,k} &= 0.35. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} G_A &= G_q - e_{q,l}G_l - e_{q,k}G_k \\ &= 2.75 - 0.65(1.00) - 0.35(1.75) \\ &= 2.75 - 0.65 - 0.60 \\ &= 1.50. \end{aligned} \tag{7.56}$$

Así, Solow llegó a la conclusión de que la tecnología avanzó a una tasa del 1.5% anual de 1909 a 1949. Por tanto, más de la mitad del crecimiento de la producción real era atribuible al cambio tecnológico y no al crecimiento de las cantidades materiales de los factores de producción. Evidencia más reciente tiende a confirmar las conclusiones de Solow respecto a la importancia relativa del cambio tecnológico. Sin embargo, sigue existiendo bastante incertidumbre respecto a las causas exactas de este cambio.

Avances tecnológicos en la función Cobb-Douglas

La función de producción Cobb-Douglas ofrece un camino verdaderamente sencillo para ilustrar los avances tecnológicos. Partiendo del supuesto de los rendimientos constantes a escala, podemos representar esta función de producción con avances tecnológicos mediante

$$q = A(t)f(k,l) = A(t)k^{\alpha}l^{1-\alpha}. \tag{7.57}$$

Si también suponemos que los avances tecnológicos ocurren a un exponencial constante (θ) podremos escribir $A(t) = Ae^{\theta t}$ y la función de producción será

$$q = Ae^{\theta t}k^{\alpha}l^{1-\alpha}. \tag{7.58}$$

Un camino especialmente fácil para estudiar las propiedades de este tipo de función a lo largo del tiempo consiste en utilizar la "diferenciación logarítmica":

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln q}{\partial t} &= \frac{\partial \ln q}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q/\partial t}{q} = G_q = \frac{\partial(\ln A + \theta t + \alpha \ln k + (1-\alpha)\ln l)}{\partial t} \\ &= \theta + \alpha \cdot \frac{\partial \ln k}{\partial t} + (1-\alpha) \cdot \frac{\partial \ln l}{\partial t} = \theta + \alpha G_k + (1-\alpha)G_l. \end{aligned} \tag{7.59}$$

[17] R. M. Solow, "Technical Progress and the Aggregate Production Function", *Review of Economics and Statistics 39*, agosto de 1957, pp. 312-320.

De modo que esta derivación simplemente repite la ecuación 7.55 para el caso Cobb-Douglas. Aquí, el factor de cambio tecnológico tiene un modelo explícito y las elasticidades de la producción están determinadas por los valores de los exponentes del caso Cobb-Douglas.

Podemos ilustrar la importancia de los avances tecnológicos numéricamente con esta función. Supongamos que $A = 10$, $\theta = 0.03$, $\alpha = 0.5$ y que una empresa utiliza una mezcla de factores de $k = l = 4$. Entonces, en $t = 0$, la producción será 40 ($= 10 \cdot 4^{0.5} \cdot 4^{0.5}$). Pasados 20 años ($t = 20$), la función de producción será

$$q = 10e^{0.03 \cdot 20}k^{0.5}l^{0.5} = 10 \cdot (1.82)k^{0.5}l^{0.5} = 18.2k^{0.5}l^{0.5}. \qquad (7.60)$$

En el año 20, la mezcla original de factores de producción ahora produce $q = 72.8$. Por supuesto, que también podríamos haber producido $q = 72.8$ en el año 0, pero habría requerido muchos más factores. Por ejemplo, con $k = 13.25$, $l = 4$, la producción en efecto es 72.8, pero hemos empleado más capital. La producción por unidad del factor trabajo aumentaría de 10 ($q/l = 40/4$) a 18.2 ($= 72.8/4$) en las dos circunstancias, pero el verdadero avance tecnológico sólo se habría registrado en el primer caso.

Avances tecnológicos con aumentos de los factores de producción. En este ejemplo, es muy tentador atribuir el incremento de la productividad media del trabajo, por decir, a mayores habilidades de los trabajadores, pero eso llevaría a errores en el caso Cobb-Douglas. Bien podríamos haber dicho que la producción por unidad de capital pasó de 10 a 18.2 en el transcurso de los 20 años y atribuir el aumento a una mejor maquinaria. Un planteamiento plausible para modelar las mejoras de trabajo y de capital por separado es suponer que la función de producción es

$$q = A(e^{\phi t}k)^{\alpha}\,(e^{\varepsilon t}l)^{1-\alpha}, \qquad (7.61)$$

donde ϕ representa la tasa anual de mejora del factor capital y ε representa la tasa anual de mejora del factor trabajo. Sin embargo, dada la naturaleza exponencial de la función Cobb-Douglas, no habría diferencia alguna con nuestro ejemplo original:

$$q = Ae^{[\alpha\phi+(1-\alpha)\varepsilon]t}k^{\alpha}l^{1-\alpha} = Ae^{\theta t}k^{\alpha}l^{1-\alpha}, \qquad (7.62)$$

donde $\theta = \alpha\,\phi + (1 - \alpha)\varepsilon$. Por tanto, para estudiar el avance tecnológico de factores individuales es necesario adoptar una forma más compleja para medir los factores, es decir, una que dé cabida a las mejoras de calidad o (lo que viene a ser lo mismo) que permita utilizar una función de producción con múltiples factores.

Pregunta: Los estudios actuales de la producción que usan la función Cobb-Douglas tienden a revelar que $\alpha \approx 0.3$. Utilice este resultado y la ecuación 7.62 para explicar la importancia relativa que las mejoras del capital y la calidad del trabajo tienen ante la tasa global de los avances tecnológicos.

RESUMEN

En este capítulo hemos ilustrado la forma en que los economistas conciben el proceso de producción que convierte los factores de producción en productos. El instrumento fundamental es la función de producción que, en su forma más sencilla, supone que la producción por periodo (q) es una simple función de los factores capital y trabajo durante ese periodo, $q = f(k, l)$. Con este punto de partida, desarrollamos varios resultados básicos para la teoría de la producción:

- Si mantenemos constantes todos los factores menos uno podremos derivar una relación entre ese único factor variable y la producción. A partir de esta relación, podemos derivar la productividad marginal (*PM*) del factor como el cambio de la producción debido a un incremento de una unidad en la utilización de ese factor. Se supone que la productividad marginal de un factor disminuye a medida que aumenta la utilización del mismo.

- Podemos representar toda la función de producción mediante su mapa de isocuantas. La pendiente (con signo negativo) de una isocuanta se conoce como la *tasa técnica de sustitución* (*TTS*), porque muestra cómo podemos sustituir un factor por otro, mientras mantenemos constante la producción. La *TTS* es la proporción de las productividades materiales marginales de los dos factores.
- Generalmente suponemos que las isocuantas son convexas; es decir, obedecen al supuesto de una *TTS.* decreciente. No podemos derivar esta idea exclusivamente del supuesto de que las productividades marginales son decrecientes. También debemos ocuparnos del efecto que las variaciones de un factor tienen en la productividad marginal de los demás factores.
- Los rendimientos a escala que exhibe una función de producción registran la forma en que la producción reacciona ante incrementos proporcionales de todos los factores. Si la producción aumenta en proporción con la variación de la utilización de los factores, entonces tendremos rendimientos constantes a escala. Si la producción aumenta más que proporcionalmente, entonces habrá rendimientos crecientes a escala, mientras que si la producción aumenta menos que proporcionalmente, tendremos rendimientos decrecientes a escala.
- La elasticidad de sustitución (σ) proporciona una medida de la facilidad con la que se puede sustituir un factor por otro para la producción. Un σ alto implica que las isocuantas son prácticamente líneas rectas, mientras que un σ bajo implica que las isocuantas tienen prácticamente forma de "L".
- Los avances tecnológicos desplazan toda la función de producción y su correspondiente mapa de isocuantas. Las mejoras tecnológicas pueden surgir de la utilización de mejores factores, de factores más productivos o de mejores métodos de organización económica.

PROBLEMAS

7.1

Power Goat Lawn Company utiliza dos tipos de segadoras para el campo. Las segadoras más pequeñas tienen una cuchilla de 24 pulgadas y se utilizan en campos que tienen muchos árboles y obstáculos. Las segadoras más grandes tienen cuchillas dos veces más grandes que las pequeñas y se utilizan en campos abiertos, donde no es tan difícil operarlas. Las dos funciones de producción que tiene Power Goat son:

	Producción por hora (metros cuadrados)	**Factor capital (Núm. de segadoras de 24″)**	**Factor trabajo**
Segadoras grandes	8000	2	1
Segadoras pequeñas	5000	1	1

a. Dibuje la isocuanta de $q = 40\,000$ metros cuadrados para la primera función de producción. ¿Qué cantidad de k y de l se utilizaría si se combinaran estos factores sin desperdiciarlos?

b. Conteste la sección a para la segunda función.

c. ¿Qué cantidad de k y de l se utilizaría sin desperdicio si se segara la mitad del campo de 40 000 metros cuadrados con el método de la primera función de producción y la otra mitad con el método de la segunda? ¿Qué cantidad de k y de l se utilizarían si se segaran las tres cuartas partes del campo con el primer método y la otra cuarta parte con el segundo? ¿Qué significa hablar de fracciones de k y de l?

d. A partir de sus observaciones en el sección c, dibuje la isocuanta $q = 40\,000$ para las funciones de producción combinadas.

7.2

Suponga que la función de producción de ciertos artefactos está determinada por

$$q = kl - 0.8k^2 - 0.2l^2,$$

donde q representa la cantidad anual de artefactos producidos, k representa la cantidad anual del factor capital y l representa la cantidad anual del factor trabajo.

a. Suponga que $k = 10$; dibuje una gráfica con la productividad media y la total del trabajo. ¿Cuál es el nivel del factor trabajo con el cual la productividad media alcanza el máximo? ¿Cuántos artefactos son producidos en ese punto?

b. Suponiendo de nuevo que $k = 10$, trace la curva de la PMg_l. ¿En qué nivel tenemos que el factor trabajo es $PMg_l = 0$?

c. Suponga que el factor capital aumentara hasta $k = 20$. ¿Cómo cambiarían sus respuestas a las dos secciones anteriores?

d. ¿Esta función de producción de artefactos exhibe rendimientos a escala constantes, crecientes o decrecientes?

7.3

Sam Malone está considerando la posibilidad de renovar los banquillos del bar Cheers. La función de producción de los banquillos nuevos está determinada por

$$q = 0.1k^{0.2}l^{0.8},$$

donde q es la cantidad de banquillos producidos durante la semana de la renovación, k representa la cantidad de horas de tornos empleadas durante la semana para hacer los banquillos y l representa la cantidad de horas hombre empleadas durante el periodo. Sam querría entregar 10 banquillos nuevos y ha asignado 10 000 dólares al proyecto.

a. Sam piensa que, dado que los tornos necesarios para fabricar los banquillos y los trabajadores calificados para hacer este trabajo cuestan lo mismo (50 dólares por hora), bien podría contratar estos dos factores en cantidades iguales. Si Sam actúa de esta manera, ¿qué cantidad de cada factor contratará y cuánto le costará el proyecto de renovación?

b. Norm (que sabe algo de banquillos para bares) argumenta que Sam ha vuelto a olvidar lo que sabe de microeconomía. Afirma que Sam debería elegir cantidades de factores de modo que sus productividades marginales (no las medias) sean iguales. Si Sam optara por este plan en cambio, ¿qué cantidad de cada factor contrataría y cuánto costaría el proyecto de renovación?

c. Cliff escucha que el plan de Norm ahorrará dinero, pero argumenta que Sam debería invertir el ahorro en una cantidad mayor de banquillos a efecto de tener más asientos para sus compañeros de la oficina. ¿Cuántos banquillos más podrá sacar Sam de su presupuesto si sigue el plan de Norm?

d. Carla está preocupada porque la sugerencia de Cliff simplemente podría significar más trabajo para ella porque tendrá que atender a más clientes del bar. ¿Cómo podría convencer a Sam de que se ciña a su plan original de los 10 banquillos?

7.4

Una medida local de los rendimientos a escala incorporada a una función de producción está determinada por la elasticidad a la escala de $e_{q,t} = \dfrac{\partial f(tk, tl)}{\partial t} \cdot \dfrac{t}{q}$ con valor de $t = 1$.

a. Demuestre que si la función de producción exhibe rendimientos a escala constantes, entonces, $e_{q,t} = 1$.

b. De ahí podremos definir las elasticidades de producción de los factores k y l como

$$e_{q,k} = \frac{\partial f(k,l)}{\partial k} \cdot \frac{k}{q}$$
$$e_{q,l} = \frac{\partial f(k,l)}{\partial l} \cdot \frac{l}{q}.$$

Demuestre que $e_{q,t} = e_{q,k} + e_{q,l}$.

c. Una función que exhibe elasticidad a escala variable es

$$q = (1 + k^{-1}l^{-1})^{-1}.$$

Demuestre que para esta función $e_{q,t} > 1$ para $q < 0.5$ y que $e_{q,t} < 1$ para $q > 0.5$.

d. Explique los resultados del inciso c basándose en la intuición. (*Pista:* ¿Existe un límite superior de q para esta función de producción?)

7.5

Como se ha visto en muchos puntos del libro, la función general de producción Cobb-Douglas para dos insumos está determinada por

$$q = f(k,l) = Ak^{\alpha}l^{\beta},$$

donde $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. En el caso de esta función de producción:

a. Demuestre que $f_k > 0, f_l > 0, f_{kk} < 0, f_{ll} < 0, f_{kl} = f_{lk} > 0$.

b. Demuestre que $e_{q,k} = \alpha$, $e_{q,l} = \beta$.

c. Los resultados del inciso b sugieren que para esta función, $e_{q,t} = \alpha + \beta$. Demuestre que lo anterior es correcto utilizando una aplicación directa de la definición de la elasticidad a la escala (véase el problema 7.4).

d. Demuestre que esta función es cuasi cóncava.

e. Demuestre que la función es cóncava para $\alpha + \beta \leq 1$, pero no es cóncava para $\alpha + \beta > 1$.

7.6

Demuestre que, para la función de producción con CES y rendimientos a escala constantes

$$q = [k^{\rho} + l^{\rho}]^{1/\rho},$$

a. $PM_k = \left(\frac{q}{k}\right)^{1-\rho}$ y $PM_l = \left(\frac{q}{l}\right)^{1-\rho}$

b. $TTS = \left(\frac{l}{k}\right)^{1-\rho}$. Utilice lo anterior para demostrar que $\sigma = 1/(1 - \rho)$.

c. Calcule las elasticidades de producción de k y l. Demuestre que suman 1.

d. Demuestre que

$$\frac{q}{l} = \left(\frac{\partial q}{\partial l}\right)^{\sigma}.$$

Por tanto, demuestre que

$$\ln\left(\frac{q}{l}\right) = \sigma \ln\left(\frac{\partial q}{\partial l}\right).$$

Nota: la última igualdad resulta muy útil para los trabajos empíricos porque en algunos casos podemos aproximar $\partial q/\partial l$ utilizando el salario competitivo. Por tanto, podemos estimar σ a partir de una regresión de $\ln(q/l)$ sobre $\ln w$.

7.7

Considere una generalización de la función de producción del ejemplo 7.3:

$$q = \beta_0 + \beta_1\sqrt{kl} + \beta_2 k + \beta_3 l,$$

donde

$$0 \leq \beta_i \leq 1 \qquad i = 0 \ . \ . \ . \ 3.$$

a. Si esta función exhibiera rendimientos a escala constantes, ¿qué restricciones deberíamos imponer a los parámetros $\beta_0 \ . \ . \ . \ \beta_3$?

b. Demuestre que, en el caso de los rendimientos a escala constantes, esta función tiene productividades marginales decrecientes y que las funciones de la productividad marginal son homogéneas de grado cero.

c. Calcule σ en este caso. Si bien σ no es constante en general, ¿en cuáles valores de las β, $\sigma = 0, 1$, o ∞?

7.8

Demuestre que el teorema de Euler implica que, para una función de producción con rendimientos a escala constantes $[q = f(k, l)]$,

$$q = f_k \cdot k + f_l \cdot l.$$

Utilice este resultado para demostrar que para esta función de producción, $PMg_l > PP_l$, PMg_k debe ser negativa. ¿Esto qué implica respecto al punto donde se debe dar la producción? ¿Es posible que una empresa produzca en un punto en el cual la PP_l es creciente?

7.9

Como en el problema 7.8, vuelva a utilizar el teorema de Euler para demostrar que en el caso de una función de producción con rendimientos a escala constantes, con sólo dos factores (k y l), f_{kl} debe ser positiva. Interprete este resultado. ¿Existe una restricción similar para una función de producción con muchos factores?

7.10

Si bien gran parte de nuestra explicación sobre cómo medir la elasticidad de sustitución para diversas funciones de producción ha supuesto que existen rendimientos a escala constantes, en muchas ocasiones este supuesto no es necesario. Este problema ilustra algunos de estos casos.

a. En la nota 6 al pie de página demostramos que, en el caso de los rendimientos a escala constantes, la elasticidad de sustitución para una función de producción con dos factores está determinada por

$$\sigma = \frac{f_k f_l}{f \cdot f_{kl}}.$$

Suponga ahora que definimos una función de producción homotética, F, como

$$F(k,l) = [f(k,l)]^\gamma,$$

donde $f(k, l)$ es una función de producción con rendimientos a escala constantes y γ es un exponente positivo. Demuestre que la elasticidad de sustitución para esta función de producción es la misma que la elasticidad de sustitución para la función f.

b. Demuestre cómo se puede aplicar este resultado a la función Cobb-Douglas y a la función de producción con CES.

LECTURAS RECOMENDADAS

Clark, J. M. "Diminishing Returns", en *Encyclopaedia of the Social Sciences,* vol. 5, Crowell-Collier and Macmillan, Nueva York, 1931, pp. 144-146.

Lúcida explicación de la historia del desarrollo del concepto de los rendimientos decrecientes.

Douglas, P. H. "Are There Laws of Production?", *American Economic Review 38*, marzo de 1948, pp. 1-41.

Un análisis metodológico ameno de los usos y no usos de las funciones de producción.

Ferguson, C. E. *The Neoclassical Theory of Production and Distribution*, Cambridge University Press, Nueva York, 1969.

Explicación detallada de la teoría de la función de producción (a partir de 1970). Buen uso de gráficas tridimensionales.

Fuss, M. y D. McFadden. *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Application*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

Un planteamiento que hace marcado énfasis en el uso de la dualidad.

Mas-Collell, A., M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Nueva York, 1995.

El capítulo 5 presenta una reseña sofisticada, si bien algo escueta, de la teoría de la producción. El uso de la función de ganancias (véanse las extensiones del capítulo 9) es bastante sofisticada e ilustrativa.

Shephard, R. W. *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1978.

Amplio análisis de la relación dual entre la producción y las funciones de costos.

Silberberg, E. y W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis,* 3a. ed., Irwin, McGraw-Hill, Boston, 2001.

Análisis profundo de la dualidad entre las funciones de producción y las curvas de costos. Presenta evidencia de que podemos derivar la elasticidad de sustitución como se plantea en este capítulo, en la nota 6 al pie de página.

Stigler, G. J. "The Division of Labor Is Limited by the Extent of the Market", *Journal of Political Economy 59*, junio de 1951, pp. 185-193.

Cuidadoso planteamiento de la evolución de las ideas de Smith sobre las economías de escala.

AMPLIACIONES

Funciones de producción con muchos factores de producción

La mayor parte de las funciones de producción que hemos presentado en el capítulo 7 se pueden generalizar con facilidad a casos que tienen muchos factores de producción. Aquí lo demostramos para las funciones Cobb-Douglas y con CES y después analizamos dos formas bastante flexibles que pueden adoptar estas funciones de producción. En todos estos ejemplos, las β son parámetros que no son negativos y los n factores están representados por $x_1 \ldots x_n$.

A7.1 Cobb-Douglas

La función de producción Cobb-Douglas con muchos factores está determinada por

$$q = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i}. \tag{i}$$

a. Esta función exhibe rendimientos a escala constantes si

$$\sum_{i=1}^{n} \beta i = 1. \tag{ii}$$

b. En la función Cobb-Douglas con rendimientos a escala constantes, β_i es la elasticidad de q respecto al factor x_i. Dado que $0 \leq \beta_i < 1$, cada factor tiene una productividad marginal decreciente.

c. Podemos incorporar un grado de rendimientos a escala crecientes a esta función, dependiendo de

$$\in = \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

A7.2 El modelo de crecimiento de Solow

La función de producción Cobb-Douglas con muchos factores de producción es una característica esencial de muchos modelos del crecimiento económico. Por ejemplo, es fácil derivar el modelo pionero de Solow (1956) del crecimiento de equilibrio utilizando una función de producción Cobb-Douglas con rendimientos a escala constantes de dos factores de producción con la fórmula

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{iii}$$

donde A es el factor que refleja el cambio tecnológico que podemos representar como un crecimiento exponencial con la fórmula

$$A = e^{at}. \tag{iv}$$

Si dividimos los dos lados de la ecuación iii entre L obtendremos

$$y = e^{at}k^{\alpha}, \tag{v}$$

donde

$$y = Y/L, \ k = K/L.$$

Solow demuestra que las economías evolucionarán hacia un valor de equilibrio de k (la proporción de capital a trabajo). Por tanto, las diferencias de tasas de crecimiento entre países sólo se deben a diferencias del factor de cambio tecnológico, a.

Dos aspectos de la ecuación v favorecen la inclusión de más factores en el modelo de Solow. Primero, la ecuación, tal y como está definida, no puede explicar las importantes diferencias de la producción per cápita (y) que se observan en el mundo. Suponiendo que $\alpha = 0.3$, por ejemplo (una cifra coherente con muchos análisis empíricos), sería necesario que las diferencias de la relación K/L entre países fueran hasta de 4 000 000 a 1 para explicar las diferencias de 100 a 1 en el ingreso per cápita observadas; es decir, una cantidad que, evidentemente, no es razonable. Al introducir más factores, como el capital humano, es más fácil explicar estas diferencias.

Una segunda desventaja de la sencilla formulación Cobb-Douglas del modelo de Solow es que no ofrece explicación alguna del parámetro del cambio tecnológico a; es decir, su valor está determinado "exógenamente". Al añadir más factores resulta más fácil entender cómo el parámetro a puede reaccionar a incentivos económicos. Esta inclusión constituye una idea clave de la literatura reciente sobre la teoría del crecimiento "endógeno" (encontrará un resumen en, Romer, 1996).

A7.3 CES

La función de producción con muchos factores con elasticidad de sustitución constante (CES) está determinada por

$$q = [\sum \beta_i \, x_i^{\rho}]^{\epsilon/\rho}, \ \rho \leq 1. \tag{vi}$$

a. Al sustituir mx_i para cada nivel de producción, resulta fácil demostrar que esta función tiene rendimientos a escala constantes para

$\epsilon = 1$. Para $\epsilon > 1$, la función exhibe rendimientos a escala crecientes.

b. La función de producción tiene productividades marginales decrecientes para cada factor porque $\rho \leq 1$.

c. Como en el caso de dos factores, la elasticidad de sustitución está determinada por

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}, \qquad \text{(vii)}$$

y esta elasticidad es válida para la sustitución entre alguno de los dos factores.

Comprobación de la función Cobb-Douglas para el caso de la Unión Soviética

Una de las formas en las que se utiliza la función de múltiples factores con CES es para determinar si el parámetro de sustitución estimado (ρ) es coherente con el valor que implica la función Cobb-Douglas ($\rho = 0$, $\sigma = 1$). Por ejemplo, en un análisis de las cinco industrias más importantes de la antigua Unión Soviética, E. Bairam (1991) concluye que la función Cobb-Douglas ofrece una explicación relativamente buena de las variaciones de la producción para la mayor parte de los principales factores manufactureros. Un valor más bajo de σ sólo parece adecuado en el caso del procesamiento de alimentos.

Los dos ejemplos siguientes ilustran funciones de producción con formas flexibles que pueden aproximar una función general cualquiera de n factores. En las ampliaciones del capítulo 8 analizaremos funciones de costos análogas a algunas de estas funciones, las cuales se utilizan incluso más que las propias funciones de producción.

A7.4 Generalización de Leontief

$$q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\sqrt{x_i x_j},$$

donde $\beta_{ij} = \beta_{ji}$

a. La función analizada en el problema 7.7 es un sencillo caso particular de esta función para el caso en que $n = 2$. Para $n = 3$, la función tendría términos lineales de tres factores junto con tres términos de raíces que representan todos los productos cruzados de los factores.

b. La función tiene rendimientos a escala constantes, como lo podemos demostrar usando mx_i. Podemos incorporar los rendimientos a escala crecientes a la función utilizando la transformación

$$q' = q^{\epsilon},\ \epsilon > 1.$$

c. Dado que cada factor aparece tanto de forma lineal como dentro de una raíz, la función tiene productividades marginales decrecientes para todos los factores.

d. Utilizamos la restricción $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ para garantizar la simetría de las derivadas parciales de segundo orden.

A7.5 Translog

$$\ln q = \beta_0 + \sum_{i-1}^{n}\beta_i \ln x_i$$
$$+ 0.5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\ln x_i \ln x_j,$$
$$\beta_{ij} = \beta_{ji}$$

a. Nótese que la función Cobb-Douglas es un caso especial de esta función donde $\beta_0 = \beta_{ij} = 0$ para todo i, j.

b. Como en el caso Cobb-Douglas, esta función puede asumir un grado cualquiera de rendimientos a escala. Si

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1$$

y

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij} = 0$$

para todo i, esta función tiene rendimientos a escala constantes. La demostración exige tener cierto cuidado con las sumas de signos dobles.

c. De nuevo, la condición $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ es necesaria para garantizar la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

Inmigración

Dado que la función de producción translog incorpora un gran número de posibilidades de sustitución entre varios factores, se ha utilizado mucho para analizar la forma en que los trabajadores recién incorporados pueden sustituir a los trabajadores existentes. Resulta particularmente interesante la forma en que el nivel de habilidades de los inmigrantes puede provocar distintas reacciones en la demanda de trabajadores calificados y no calificados en la economía nacional. Los estudios realizados en Estados Unidos y en otros muchos países (Canadá, Alemania, Francia, etc.) sugieren que la magnitud global de estos efectos es modesta, sobre todo dados flujos de inmigración relativamente pequeños. Sin embargo, existe evidencia de que los trabajadores inmigrantes no calificados pueden servir de sustitutos de los trabajadores nacionales no calificados y que sirven de complementos de los trabajadores nacionales calificados. Por tanto, un mayor flujo de inmigración puede exacerbar la tendencia hacia diferenciales salariales crecientes. Encontrará un resumen en Borjas (1994).

Referencias

Bairam, Erkin. "Elasticity of Substitution, Technical Progress and Returns to Scale in Branches of Soviet Industry: A New CES Production Function Approach", *Journal of Applied Economics*, enero-marzo de 1991, pp. 91-96.

Borjas, G. J. "The Economics of Immigration", *Journal of Economic Literature*, diciembre de 1994, pp. 1667-1717.

Christenson, L. R., D. W. Jorgenson y L. J. Lau. "Transcendental Logarithmic Production Frontiers", *Review of Economics and Statistics*, febrero de 1973, pp. 28-45.

Fuss, M. y D. McFadden, eds. *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications,* Amsterdam: North-Holland, 1978. Véase, especialmente el Cap. I.1, "Cost Revenue and Profit Functions", y el Cap. II.1, "A Survey of Functional Forms in the Economic Analysis of Production".

Romer, David. *Advanced Macroeconomics,* McGraw-Hill, Nueva York, 1996.

Solow, R. M. "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 1956, pp. 65-94.

Capítulo 8

FUNCIONES DE COSTOS

En este capítulo se analizan los costos que contrae una empresa cuando realiza sus actividades productivas. En el capítulo 9 se ampliará el tema y se explicarán las decisiones que las empresas toman con el objeto de maximizar las ganancias derivadas de los factores de producción y de la producción.

Definición de costos

Antes de pasar a analizar la teoría de los costos es preciso aclarar algunos problemas que presenta la definición correcta de "costos". En concreto, se tiene que diferenciar entre 1) costo contable y 2) costo económico. La perspectiva contable de los costos hace hincapié en los gastos erogados, los costos históricos, la depreciación y otros asientos contables. La definición de costos que plantea el economista (quien, de forma evidente, parte del concepto fundamental del costo de oportunidad) es que el costo de un factor de producción está determinado por la magnitud del pago necesario para mantener el recurso dentro de su uso actual. Por otra parte, el costo económico de utilizar un factor es lo que se pagaría por ese factor en su siguiente mejor uso. Una forma de diferenciar entre estos dos planteamientos consiste en analizar cómo se definen los costos de diversos factores (trabajo, capital o servicios empresariales) en cada sistema.

Costos laborales

Los economistas y los contadores toman los costos laborales de forma muy similar. Para los contadores, los gastos destinados al trabajo son gastos corrientes y, por tanto, son costos de producción. Para los economistas, el trabajo es un costo *explícito*. Los servicios de los trabajadores (horas-hombre) son contratados a un salario determinado por (w), y normalmente suponemos que esta cantidad también es la que los trabajadores ganarían en su mejor empleo alternativo. Por supuesto que el salario por hora incluye los costos de las prestaciones que reciben los empleados.

Costos de capital

En el caso de los servicios de capital (horas-máquina), los dos conceptos de costos difieren mucho. Los contadores utilizan el precio histórico de la máquina en cuestión para calcular los costos del capital y aplican una regla de depreciación, más o menos arbitraria, para determinar la parte del precio inicial de la máquina que cargarán a los costos corrientes. Los economistas consideran que el precio histórico de una máquina es un "costo hundido" y, por tanto, que no es relevante para tomar decisiones sobre la producción. En cambio, consideran que el costo *implícito* de la máquina es lo que otra persona estaría dispuesta a pagar por utilizarla. Así, el costo por hora de una máquina es el *valor de alquiler* de esa máquina en su mejor uso alternativo. La empresa, al no dejar de utilizar la máquina, está renunciando implícitamente a lo que otra persona estaría dispuesta a pagar por utilizarla. Denotaremos este valor de alquiler de una hora-máquina como v.[1]

Costos de los servicios empresariales

El propietario de una empresa es la persona que tiene derecho a percibir todos los ingresos o las pérdidas que restan después de pagar los costos de los otros factores de producción. Para un contador, éstas serían las *ganancias* o *utilidades* (que pueden ser positivas o negativas). Sin embargo, los economistas se preguntan si los propietarios (o empresarios) también tienen que asumir costos de oportunidad al trabajar para una empresa determinada o al dedicar parte de sus fondos a las operaciones de la empresa. En tal caso, debemos considerar que estos servicios son un factor de producción y tendremos que asignarles cierto costo. Por ejemplo, supongamos que un programador informático muy calificado emprende un negocio de software con la idea de quedarse con las ganancias (contables) que la empresa pudiera generar. El tiempo del programador es, evidentemente, un factor de producción de la empresa, por lo cual es preciso asignarle un costo. Tal vez, el salario que el programador ganaría si trabajara para otra empresa podría servir para tal efecto. Por tanto, los economistas considerarían que una parte de las ganancias contables generadas por la empresa son costos empresariales. Las ganancias económicas serían inferiores a las ganancias contables y podrían ser negativas si los costos de oportunidad del programador fueran superiores a las ganancias contables que obtiene la empresa.

Costos económicos

No es nada extraño que en este libro utilicemos la definición de costos de los economistas:

Definición

Costo económico. El *costo económico* de un factor de producción es el pago necesario para mantenerlo en su uso actual. Asimismo, el costo económico de un factor es la remuneración que ese factor recibiría en su mejor empleo alternativo.

Cuando se utiliza esta definición no queremos implicar que los conceptos de los contadores no sean relevantes para el comportamiento económico. De hecho, los procedimientos contables forman una parte integral muy importante del proceso de toma de decisiones de un administrador, porque pueden afectar enormemente la tasa impositiva que se aplicará a las ganancias. Además, los datos contables son fáciles de obtener, mientras que los datos económicos con frecuencia deben ser generados de forma independiente. Sin embargo, las definiciones que utilizan los economistas tienen la atractiva característica de que se pueden aplicar, de forma general, a todas las empresas y de que constituyen un sistema conceptualmente coherente. Por tanto, son más adecuadas para un análisis teórico general.

Dos supuestos que simplifican

De entrada simplificaremos dos cosas de los factores de producción que utiliza la empresa. En primer término, supondremos que sólo hay dos factores de producción: un trabajo homogéneo (l, medido en horas-hombre) y un capital homogéneo (k, medido en horas-máquina). Los costos empresariales están incluidos en los costos del capital. Es decir, suponemos que los principales costos de oportunidad del propietario de la empresa son los relacionados con el capital que aporta ese propietario.

En segundo, suponemos que los factores de producción son contratados en mercados perfectamente competitivos. Las empresas pueden comprar (o vender) todos los servicios de trabajo o capital que quieran a las tasas de alquiler que prevalecen (w y v). En términos gráficos, la curva de oferta de estos recursos es una línea horizontal al nivel de los precios actuales de los factores. En las decisiones de la empresa, tanto w como v serán "parámetros"; es decir, la empresa no puede hacer nada para afectarlos. En capítulos posteriores (sobre todo en el capítulo 16) relajaremos estas condiciones pero, por ahora, el supuesto de la competencia perfecta resultará útil y cómodo.

---

[1] A veces se opta por usar el símbolo r para representar la tasa de alquiler del capital. Dado que esta variable muchas veces se confunde con el concepto de la tasa de interés del mercado, concepto relacionado pero distinto, aquí hemos optado por usar otro símbolo. En el capítulo 17 analizamos la relación exacta entre v y la tasa de interés.

Ganancias económicas y minimización de costos

Por tanto, el total del costo de la empresa durante un periodo está dado por

$$\textbf{costo total} = C = wl + vk, \tag{8.1}$$

donde, como antes, l y k representan la utilización de los factores durante el periodo. Si suponemos que la empresa sólo fabrica un producto, el total de sus ingresos estará determinado por el precio de su producto (p) multiplicado por su producción total [$q = f(k, l)$ donde $f(k, l)$ es la función de producción de la empresa]. Por tanto, el beneficio económico (π) es la diferencia entre el ingreso total y el costo económico total:

DEFINICIÓN

Beneficio económico. El *beneficio económico* (π) es la diferencia entre el ingreso total y el costo total de la empresa:

$$\begin{aligned}\pi &= \textbf{ingreso total} - \textbf{costo total} = pq - wl - vk \\ &= pf(k, l) - wl - vk\end{aligned} \tag{8.2}$$

La ecuación 8.2 muestra que el beneficio económico que obtiene una empresa está en función de la cantidad de capital y trabajo empleados. Si, como supondremos en muchos puntos de este libro, la empresa busca maximizar sus ganancias, podremos estudiar su comportamiento analizando cómo elige k y l para maximizar la ecuación 8.2. A su vez, esto nos llevará a una teoría de la oferta y a una teoría de la “demanda factorial” del trabajo y capital. En el capítulo siguiente se abordarán estos temas con más detalle. Sin embargo, aquí queremos desarrollar una teoría de los costos que es bastante más general y que se podría aplicar a empresas que no necesariamente maximizan sus ganancias. Por tanto, iniciamos el estudio de los costos afinando, por ahora, una explicación de la elección de la cantidad que se va a producir. Es decir, suponemos que, por alguna razón, la empresa ha decidido generar un nivel determinado de producción (por decir, q_0). Por tanto, los ingresos de la empresa están fijos en pq_0. Ahora, pasaremos a analizar cómo la empresa puede producir q_0 al costo mínimo.

Elecciones de factores que minimizan los costos

Matemáticamente, se trata de un problema de minimización con restricciones. Sin embargo, antes de pasar a una resolución rigurosa, es conveniente enunciar el resultado que vamos a obtener empleando una argumentación intuitiva. Para minimizar el costo de generar un nivel determinado de producción, la empresa debe elegir el punto sobre la isocuanta q_0 en el cual la tasa técnica de sustitución de l por k sea igual al cociente w/v; es decir, la tasa a la cual la empresa puede sustituir k por l en el proceso productivo debe ser igual a la tasa a la cual estos dos factores se intercambian en el mercado. Supongamos que no fuera así. En concreto, supongamos que la empresa estuviera produciendo el nivel q_0 utilizando $k = 10$, $l = 10$, y supongamos que, en este punto, la *TTS* es igual a 2 en este punto. Supongamos también que $w = \$1$, $v = \$1$, y, por tanto, que $w/v = 1$ (que no es igual a 2). Con esta combinación de factores, el costo de producir q_0 es de \$20. Resulta fácil demostrar que éste no es el costo mínimo de los factores. También es posible producir q_0 utilizando $k = 8$ y $l = 11$; es decir, podemos renunciar a dos unidades de k y mantener la producción constante en q_0 si se suma una unidad adicional de l. Sin embargo, con esta combinación de factores, producir q_0 tiene un costo de \$19 y, por tanto, la combinación inicial de factores no era la óptima. Podemos utilizar una demostración parecida a la anterior siempre que la *TTS* y el cociente de los costos de los factores no sean iguales.

Análisis matemático

Matemáticamente, buscamos minimizar el total de costos dado $q = f(k, l) = q_0$. Si definimos la expresión lagrangiana

$$\mathscr{L} = wl + vk + \lambda[q_0 - f(k, l)], \tag{8.3}$$

las condiciones de primer orden de un mínimo con restricciones son

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial l} = w - \lambda \frac{\partial f}{\partial l} = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k} = v - \lambda \frac{\partial f}{\partial k} = 0 \tag{8.4}$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = q_0 - f(k, l) = 0$$

o, al dividir las dos primeras ecuaciones,

$$\frac{w}{v} = \frac{\partial f/\partial l}{\partial f/\partial k} = TTS(l \text{ para } k). \tag{8.5}$$

Esta ecuación afirma que la empresa que minimiza los costos debe igualar la *TTS* de los dos factores con el cociente de sus precios.

Otras interpretaciones

Distintas manipulaciones de estas condiciones de primer orden para los costos mínimos pueden generar resultados sumamente interesantes. Por ejemplo, de la multiplicación cruzada de la ecuación 8.5 resultará

$$\frac{f_k}{v} = \frac{f_l}{w}. \tag{8.6}$$

Es decir, para poder minimizar los costos, la productividad marginal por unidad monetaria gastada debe ser igual para todos los factores. Si el incremento de un factor prometiera a la empresa un aumento de la producción mayor por unidad monetaria gastada que el de otro factor cualquiera, entonces los costos no serían mínimos; es decir, la empresa debería contratar más del factor que promete un "mayor impacto por unidad monetaria gastada" y menos del factor más costoso (en términos de productividad). La empresa no debe alquilar un factor que no cumpla con la proporción común de costo-beneficio que define la ecuación 8.6.

Por supuesto que también podemos derivar la ecuación 8.6 a partir de la ecuación 8.4, pero es más instructivo derivar su inversa:

$$\frac{w}{f_l} = \frac{v}{f_k} = \lambda. \tag{8.7}$$

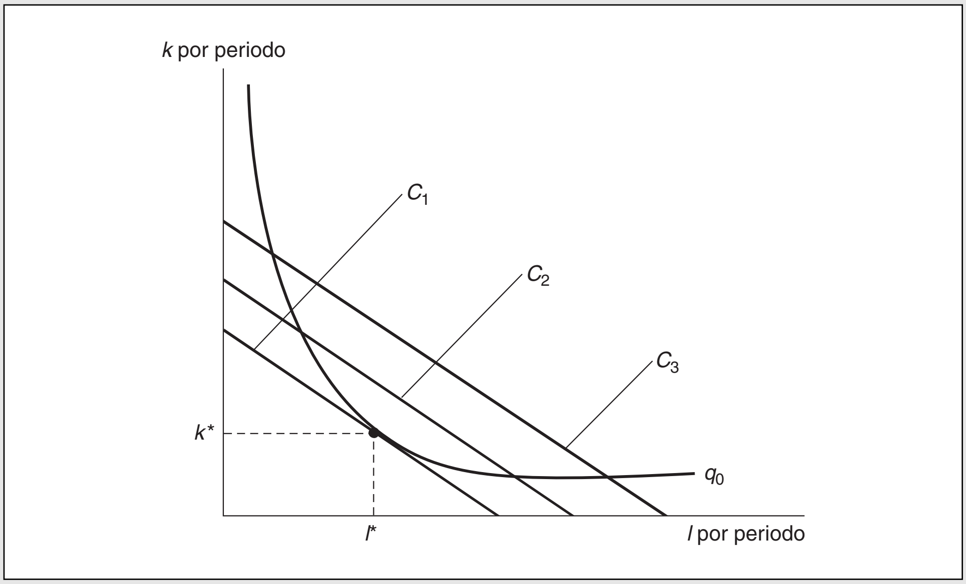
Esta ecuación presenta el costo adicional de obtener una unidad más de producto contratando más trabajo o más capital. Dada la minimización de costos, este costo marginal es el mismo sin importar cuál factor es alquilado. Este costo marginal común también es medido con el multiplicador lagrangiano del problema de la minimización de costos. Como ocurre con todos los problemas de optimización con restricciones, en este caso el multiplicador lagrangiano muestra la cantidad de los costos adicionales que contraería la empresa si aumentara ligeramente la restricción de la producción. Dado que el costo marginal tiene un papel muy importante en las decisiones de oferta de la empresa, con frecuencia volveremos a esta característica de la minimización de costos.

Análisis gráfico

La figura 8.1 muestra gráficamente la minimización de costos. Dada la isocuanta de producción q_0, queremos determinar el punto del costo mínimo en la isocuanta. Las líneas que representan el mismo costo son rectas paralelas con una pendiente igual a w/v. La figura 8.1 muestra tres rectas de costo total. $C_1 < C_2 < C_3$. La gráfica deja en claro que el total mínimo de costos de producir q_0 está determinado por la recta C_1, en la cual la curva del costo total es tangente a la isocuanta. La combinación de factores que minimiza los costos es l^*, k^*. Esta combinación será

FIGURA 8.1 **Minimización de costos dada $q = q_0$**

Suponemos que la empresa elige la cantidad de k y l para minimizar su costo total. La condición de esta minimización es que la tasa a la cual técnicamente se sustituye k por l debe ser igual, manteniendo $q = q_0$, a la tasa a la cual se intercambian estos factores en el mercado. En otras palabras, la *TTS* (de l por k) debe ser igual al cociente de los precios de los factores w/v. La figura muestra esta tangencia; es decir, si elegimos los factores k^* y l^*, los costos son mínimos en C_1.



un auténtico mínimo si la isocuanta es convexa (si la *TTS* disminuye en el caso de decrementos de k/l). El análisis gráfico y el matemático llegan a la misma conclusión:

PRINCIPIO DE LA OPTIMIZACIÓN

Minimización del costo. Para poder minimizar el costo de un nivel de factores de producción (q_0), la empresa debe producir en el punto sobre la isocuanta q_0 en el cual la *TTS* (de l por k) sea igual al cociente de los precios de alquiler de los factores (w/v).

Demanda factorial

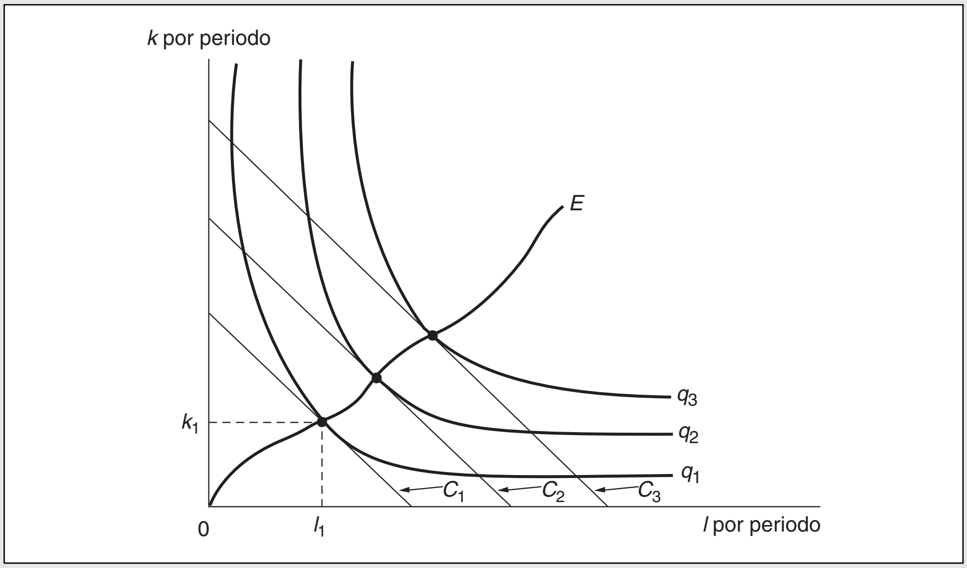
La figura 8.1 muestra la analogía formal entre el problema de minimización de costos de la empresa y el problema de la minimización del gasto del individuo que estudiamos en el capítulo 4 (véase la figura 4.6). En ambos casos, el agente económico busca alcanzar su meta (producción o utilidad) al mínimo costo posible. En el capítulo 5 se demostró cómo utilizar este proceso para construir una teoría de la demanda compensada de un bien. En el caso presente, la minimización del costo lleva a una demanda del factor de capital y de trabajo que depende del nivel de producción que se realice. Por tanto, no es la historia completa de la demanda factorial que utiliza la empresa porque no aborda la cuestión de la elección de la producción. No obstante, si estudiamos la demanda condicionada del factor tendremos una base importante para analizar la demanda factorial de la empresa y se abordará el tema con más detalle más adelante en este mismo capítulo.

La senda de expansión de la empresa

Una empresa puede seguir el proceso de minimización del costo en cada nivel de producción. Para cada q la empresa debe determinar la elección de factores que minimizará el costo de producir q. Si los costos de los factores (w y v) permanecen constantes para todas las cantidades que pueda demandar la empresa, entonces no tendremos dificultad para seguir el rastro del punto

FIGURA 8.2 **La senda de expansión de la empresa**

La senda de expansión de la empresa es la recta donde se ubica el conjunto de puntos de tangencia que minimizan los costos. Suponiendo que los precios de los factores son fijos, la curva muestra cómo aumenta la utilización de factores a medida que aumenta la producción.



donde se ubican las elecciones que minimizan los costos. La figura 8.2 muestra este procedimiento. La recta $0E$ registra los puntos de tangencia que minimizan los costos para niveles de producción sucesivamente más altos. Por ejemplo, el costo mínimo del nivel de producción q_1 está dado por C_1, utilizando las cantidades k_1 y l_1. Podemos interpretar otros puntos de tangencia de la figura de forma análoga. La recta donde se ubican estos puntos de tangencia se llama la *senda de expansión,* de la empresa, porque muestra cómo aumenta la utilización de los factores a medida que se expande la producción, al tiempo que los precios de los factores se mantienen constantes.

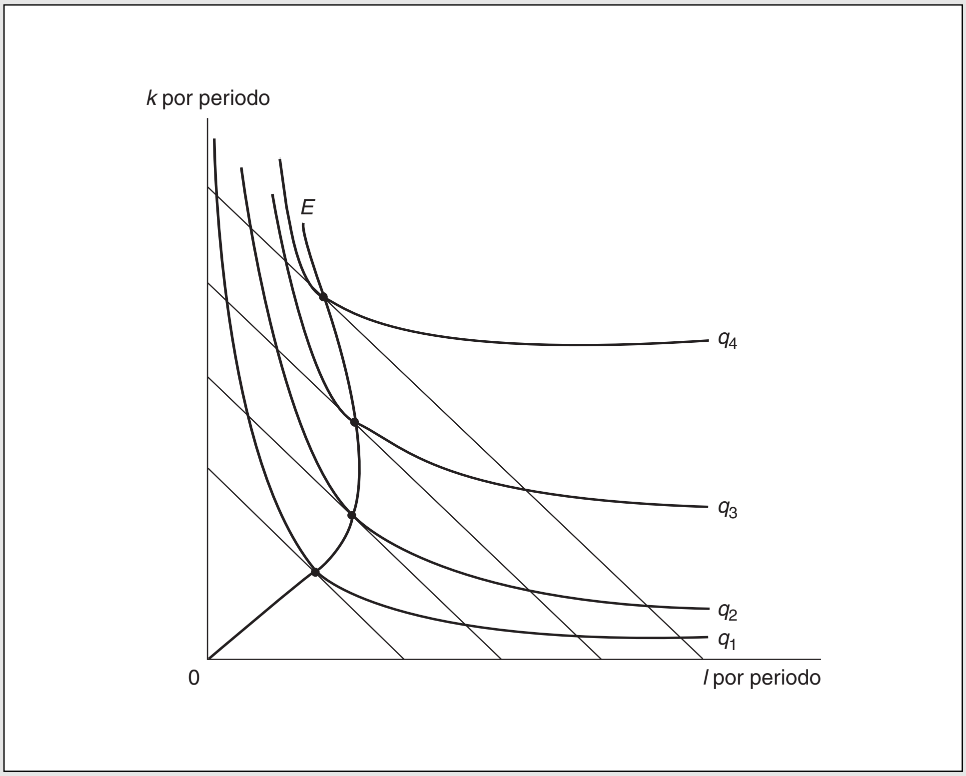
Como muestra la figura 8.2, la senda de expansión no necesariamente es una línea recta. La utilización de algunos factores de producción puede aumentar a más velocidad que la de otros a medida que aumenta la producción. Cuáles serán los factores que aumenten con mayor rapidez dependerá de la forma de las isocuantas de producción. Dado que la minimización de costos exige que la *TTS* siempre sea igual al cociente w/v y dado que suponemos que este cociente es constante, la forma de la senda de expansión estará determinada por el punto en el cual ocurre la igualdad con la *TTS* sobre isocuantas sucesivamente más altas. Si la función de producción presenta rendimientos constantes a escala (o, en términos más generales, si es homotética), la senda de expansión será una línea recta, porque, en tal caso, la *TTS* depende únicamente de la proporción de k a l. Esta proporción sería constante a lo largo de esta senda lineal de expansión.

Parece razonable suponer que la senda de expansión tendrá una pendiente positiva; es decir, niveles de producción sucesivamente más altos requerirán mayor cantidad de los dos factores de producción. Sin embargo, como demuestra la figura 8.3 no siempre tiene que ser así. Los incrementos de la producción más allá de q_2 de hecho provocan que disminuya la cantidad de trabajo utilizado. Diríamos que el trabajo, en este intervalo, es un *factor inferior*. Por tanto, la existencia de factores inferiores es una posibilidad teórica que puede ocurrir, incluso cuando las isocuantas tienen su forma convexa habitual.

Gran parte de la discusión teórica se ha centrado en el análisis de la inferioridad de un factor. Una interrogante empírica difícil de responder se refiere a si es probable o no que la inferioridad

FIGURA 8.3 **Inferioridad de un factor**

Con este conjunto de isocuantas, el trabajo es un factor inferior, porque elegimos menos l cuando la producción aumenta por encima de q_2.



se produzca en las funciones de producción del mundo real. Al parecer, es poco probable que magnitudes tan genéricas como el "capital" y el "trabajo" puedan ser inferiores, pero una clasificación más precisa de los factores de producción podría sacar la inferioridad a la luz. Por ejemplo, la utilización de palas puede disminuir a medida que incrementa la producción de cimientos de un edificio (así como la utilización de máquinas excavadoras). En este libro no nos ocuparemos en especial de las cuestiones analíticas que plantea esta posibilidad, pero en unos cuantos puntos sí mencionarán las complejidades que plantean los factores inferiores.

Minimización de costos

Es fácil ilustrar el proceso de minimización de costos con dos de las funciones de producción que vimos en el capítulo anterior.

a. Cobb-Douglas: $q = f(k, l) = k^{\alpha}l^{\beta}$

En este caso, la expresión lagrangiana relevante para minimizar el costo de producir, por decir, q_0 es

$$\mathscr{L} = vk + wl + \lambda(q_0 - k^{\alpha}l^{\beta}), \tag{8.8}$$

y las condiciones de primer orden para el mínimo son

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k} &= v - \lambda\alpha k^{\alpha-1}l^{\beta} = 0\\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial l} &= w - \lambda\beta k^{\alpha}l^{\beta-1} = 0\\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= q_0 - k^{\alpha}l^{\beta} = 0.\end{aligned} \tag{8.9}$$

Si se divide la segunda de estas condiciones entre la primera se obtendrá

$$\frac{w}{v} = \frac{\beta k^{\alpha}l^{\beta-1}}{\alpha k^{\alpha-1}l^{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{k}{l}, \tag{8.10}$$

que de nueva cuenta muestra que los costos se minimizan cuando el cociente de los precios de los factores es igual a la *TTS*. Dado que la función Cobb-Douglas es homotética, la *TTS* depende tan sólo de la proporción de los dos factores. Si la proporción de los costos de los factores no cambia, entonces las empresas utilizarán la misma proporción de factores independientemente de la cantidad que produzcan; es decir, la senda de expansión será una línea recta que pasa por el origen.

Como simple ejemplo numérico, supongamos que $\alpha = \beta = 0.5$, $w = 12$, $v = 3$ y que la empresa quiere producir $q_0 = 40$. La condición de primer orden para un mínimo requiere que $k = 4l$. Si insertamos lo anterior en la función de producción (el requisito final de la ecuación 8.9), tendremos que $q_0 = 40 = k^{0.5}l^{0.5} = 2l$. De modo que la combinación de factores que minimiza los costos es $l = 20$, $k = 80$ y el costo total estará dado por $vk + wl = 3(80) + 12(20) = 480$. Sabremos que éste es el verdadero costo mínimo si vemos algunas otras combinaciones de factores que también pueden producir 40 unidades del producto:

$$\begin{aligned}&k = 40,\ l = 40,\ C = 600\\ &k = 10,\ l = 160,\ C = 2220\\ &k = 160,\ l = 10,\ C = 600.\end{aligned} \tag{8.11}$$

Otra combinación cualquiera de factores que produzca 40 unidades del bien, también costará más de 480. Asimismo, si analizamos las productividades marginales veremos la minimización de costos. En el punto óptimo

$$\begin{aligned}PM_k &= f_k = 0.5k^{-0.5}l^{0.5} = 0.5(20/80)^{0.5} = 0.25\\ PM_l &= f_l = 0.5k^{0.5}l^{-0.5} = 0.5(80/20)^{0.5} = 1.0,\end{aligned} \tag{8.12}$$

de modo que, en el margen, el trabajo es cuatro veces más productivo que el capital y esta productividad extra compensa justo el precio por unidad más alto del factor trabajo.

b. CES: $q = f(k, l) = (k^{\rho} + l^{\rho})^{\gamma/\rho}$

De nueva cuenta escribimos la expresión lagrangiana

$$\mathscr{L} = vk + wl + \lambda[q_0 - (k^{\rho} + l^{\rho})^{\gamma/\rho}], \tag{8.13}$$

y las condiciones de primer orden para el mínimo son

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k} &= v - \lambda(\gamma/\rho)(k^{\rho} + l^{\rho})^{(\gamma-\rho)/\rho}(\rho)k^{\rho-1} = 0\\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial l} &= w - \lambda(\gamma/\rho)(k^{\rho} + l^{\rho})^{(\gamma-\rho)/\rho}(\rho)l^{\rho-1} = 0\\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= q_0 - (k^{\rho} + l^{\rho})^{\gamma/\rho} = 0.\end{aligned} \tag{8.14}$$

(continúa)

EJEMPLO 8.1 *CONTINUACIÓN*

Al dividir las dos primeras ecuaciones quedará descartada una gran cantidad de símbolos y se obtendrá

$$\frac{w}{v} = \left(\frac{l}{k}\right)^{\rho-1} = \left(\frac{k}{l}\right)^{1-\rho} = \left(\frac{k}{l}\right)^{1/\sigma}, \text{o}, \ \frac{k}{l} = \left(\frac{w}{v}\right)^{\sigma}. \qquad \textbf{(8.15)}$$

Porque la función CES también es homotética, la proporción de factores que minimiza los costos es independiente del nivel de la producción. El resultado de la ecuación 8.15 es una simple generalización del resultado Cobb-Douglas (donde $\sigma = 1$). Con la función Cobb-Douglas la proporción de capital a trabajo que minimiza los costos cambia directamente de acuerdo con los cambios de la proporción de las tasas de alquiler de salarios a capital. En casos donde existe mayor posibilidad de sustitución ($\sigma > 1$), la respuesta será proporcionalmente menor.

Pregunta: En el ejemplo numérico Cobb-Douglas, donde $w/v = 4$ encontramos que la proporción de factores que minimiza los costos de producir 40 unidades del producto era $k/l = 80/20 = 4$. ¿Cómo cambiaría el valor en caso de que $\sigma = 2$ o $\sigma = 0.5$? ¿Qué combinaciones reales de factores se utilizarían? ¿Cuál sería el costo total?

Funciones de costos

Ahora estamos en posición de analizar la estructura global de los costos de la empresa. Para ello, será conveniente utilizar soluciones extraídas de la senda de expansión para derivar la función de costo total.

DEFINICIÓN

Función de costo total. La *función de costo total* muestra que, para un conjunto cualquiera de los precios de los factores y para un nivel cualquiera de producción, el costo total mínimo contraído por la empresa es

$$C = C(v, w, q). \qquad \textbf{(8.16)}$$

La figura 8.2 deja en claro que el costo total aumenta a medida que aumenta la producción, q. Empezaremos por analizar esta relación entre el costo total y la producción al mismo tiempo que se mantienen fijos los precios de los factores. A continuación, se analizará cómo una variación del precio de un factor de producción desplaza la senda de expansión y sus correspondientes funciones de costos.

Funciones de costo promedio y costo marginal

Aun cuando la función del costo total ofrece información completa sobre la relación entre producción y costo, a menudo resulta conveniente analizar el costo por unidad de producto, porque este planteamiento se corresponde más estrechamente con el análisis de la demanda, el cual se centra en el precio por unidad de un bien. En economía se utilizan mucho dos medidas distintas del costo unitario, a saber: 1) el costo promedio, que es el costo por unidad de producto, y 2) el costo marginal, que es el costo de producir una unidad más. Las definiciones siguientes describen la relación entre estos dos conceptos y la función del costo total:

DEFINICIÓN

Funciones del costo promedio y del costo marginal. Obtenemos la *función del costo promedio* (*CP*) calculando el total de costos por unidad de producto:

$$\text{costo promedio} = CP(v, w, q) = \frac{C(v, w, q)}{q}. \tag{8.17}$$

Obtenemos la *función del costo marginal* (*CMg*) calculando la variación del costo total que se deriva de una variación del nivel de producción:

$$\text{costo marginal} = CMg(v, w, q) = \frac{\partial C(v, w, q)}{\partial q}. \tag{8.18}$$

Nótese que, en estas definiciones, el costo promedio y el costo marginal dependen ambos del nivel de producción que se está fabricando y de los precios de los factores de producción. A lo largo de este libro dibujaremos, en diversos puntos, relaciones bidimensionales sencillas entre los costos y la producción. Como dejan en claro las definiciones, hemos dibujado todas estas gráficas partiendo del supuesto de que los precios de los factores de producción permanecen constantes y que la tecnología no cambia. Si los precios de los factores cambian o si la tecnología mejora, entonces las curvas de costos generalmente se desplazarán a nuevas posiciones. Cuando se estudie la función completa de costos, más adelante en este mismo capítulo, se analizará la dirección probable y la magnitud de estos desplazamientos.

Análisis gráfico del costo total

Las figuras 8.4a y 8.5a ilustran dos formas posibles de la relación entre el costo total y el nivel de producción de la empresa. En la figura 8.4a, el costo total es sencillamente proporcional al nivel de producción. Esta situación se presentará si la función de producción subyacente muestra rendimientos constantes a escala. En tal caso, supongamos que necesitamos k_1 unidades del factor capital y l_1 unidades del factor trabajo para obtener una unidad de producto. Por tanto,

$$C(q = 1) = vk_1 + wl_1. \tag{8.19}$$

En consecuencia, para producir m unidades del producto, necesitaremos mk_1 unidades de capital y ml_1 unidades de trabajo, debido al supuesto de los rendimientos constantes a escala.[2] De ahí que,

$$\begin{aligned} C(q = m) &= vmk_1 + wml_1 = m(vk_1 + wl_1) \\ &= m \cdot C(q = 1), \end{aligned} \tag{8.20}$$

estableciéndose así la proporcionalidad entre producción y costos.

En la figura 8.5a, la situación es más compleja. En ella suponemos que, inicialmente, la curva del costo total es cóncava; es decir, si bien los costos aumentan con rapidez al inicio con los incrementos de la producción, esa tasa de crecimiento se desacelera a medida que la producción aumenta hasta el intervalo promedio de producción. Sin embargo, más allá de este intervalo promedio, la curva del costo total se vuelve convexa y los costos empiezan a aumentar progresivamente a mayor velocidad. Una posible explicación de esta forma de la curva del costo total es que hay un tercer factor de producción (por decir, los servicios empresariales) que permanece fijo a medida que aumenta la cantidad de trabajo y capital que se utilizan. En este caso, el hecho de que el tramo de la curva sea inicialmente cóncavo se explica en razón del uso, cada vez más óptimo, de los servicios del empresario; es decir, éste necesita un nivel moderado de producción para poder utilizar sus habilidades plenamente. Sin embargo, más allá de este punto de inflexión, el empresario tendrá exceso de trabajo cuando pretenda coordinar la producción, por lo cual se presentarán rendimientos decrecientes. Por tanto, el total de los costos aumentará con rapidez.

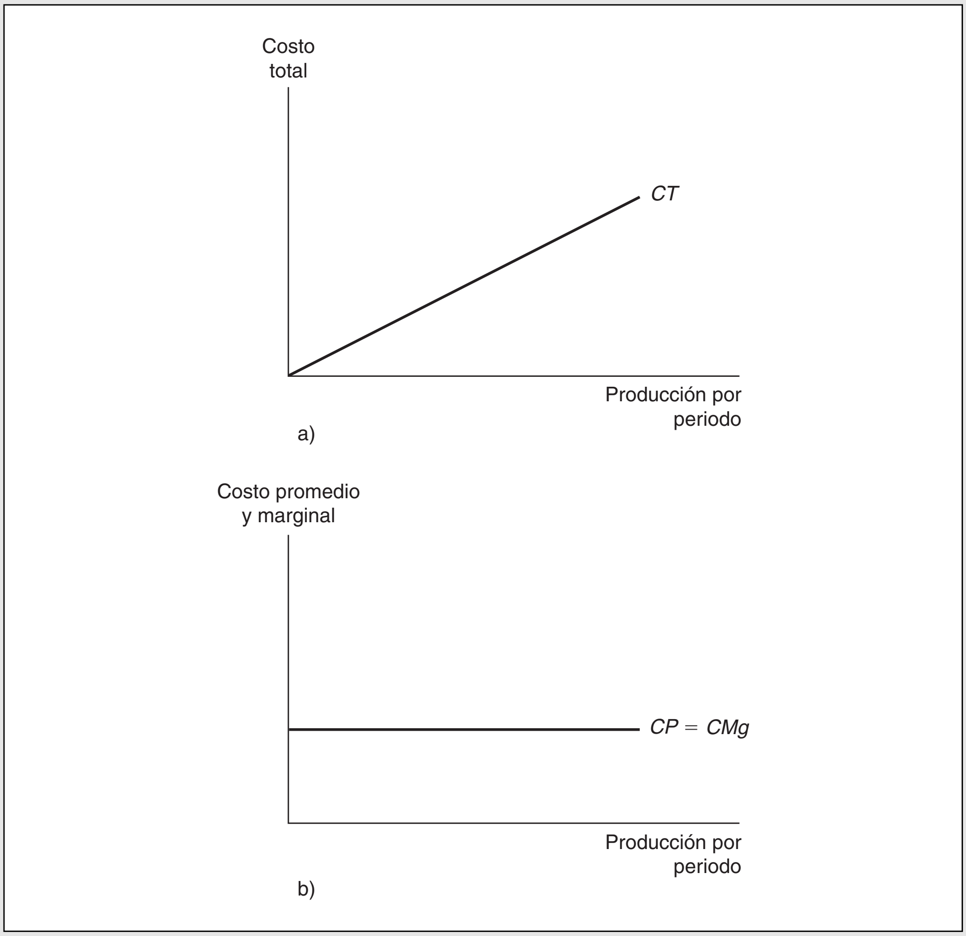
Muchos y diversos planteamientos han tratado de explicar la curva, de tipo cúbico, del costo total que presenta la figura 8.5a, pero no se analizarán aquí. En última instancia, la forma de la curva del costo total es una cuestión empírica que sólo es posible determinar mediante el análisis de datos reales. En las ampliaciones de este capítulo ilustramos algunas aplicaciones que tratan de las funciones de costos.

---

[2] La combinación de los factores ml_1, mk_1 minimiza el costo de producir m unidades del producto porque la proporción de los factores sigue siendo k_1/l_1 y la *TTS* de una función de producción con rendimientos constantes a escala depende únicamente de dicha proporción.

FIGURA 8.4 **Caso de los rendimientos constantes a escala y curvas de los costos promedio, marginal y total**

En a) el costo total es proporcional al nivel de producción. Como muestra b), el costo promedio y el marginal son iguales y constantes para todos los niveles de producción.



Análisis gráfico de los costos promedio y marginal

Podemos utilizar la información de las curvas del costo total para construir la curva de costo promedio y la de costo marginal que muestran las figuras 8.4b y 8.5b. En el caso de los rendimientos constantes a escala (figura 8.4), esto resulta bastante sencillo. Dado que el costo total es proporcional al nivel de producción, el costo marginal y el promedio son constantes e iguales para todos los niveles de producción.[3] La recta horizontal $CP = CMg$ de la figura 8.4b muestra estos costos.

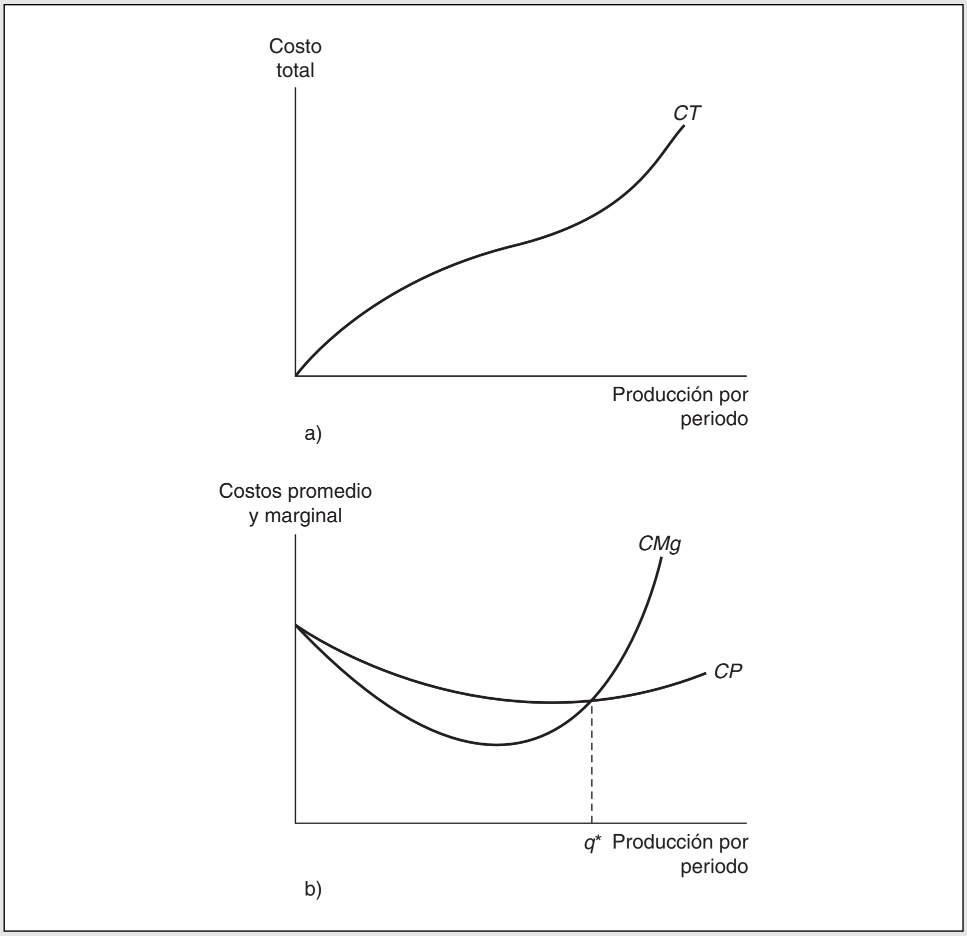
En el caso de la curva cúbica del costo total (figura 8.5) el cálculo de la curva del costo promedio y la del marginal exige cierta intuición geométrica. Como deja en claro la definición de la ecuación 8.18, el costo marginal es sencillamente la pendiente de la curva del costo total. Por tanto, dada la forma que asume la curva, la curva del *CMg* tiene forma de "U" y el *CMg*

[3]En términos matemáticos, dado que $C = aq$ (donde a es el costo de una unidad de producto),

$$CP = \frac{C}{q} = a = \frac{\partial C}{\partial q} = CMg.$$

FIGURA 8.5 **Curvas de los costos promedio, marginal y total para el caso de la curva cúbica del costo total**

Si la curva del costo total asume la forma cúbica que muestra a), entonces la curva del costo promedio y la del marginal tendrán forma de U. En b), la curva de costo marginal pasa por el punto mínimo de la curva de costo promedio en el nivel de producción q^*.



disminuye a lo largo de la parte cóncava de la curva del costo total y aumenta más allá del punto de inflexión. Sin embargo, dado que la pendiente siempre es positiva, el *CMg* siempre es mayor que cero. El costo promedio (*CP*) empieza siendo igual al costo marginal para la "primera" unidad producida.[4] Sin embargo, a medida que la producción aumenta, el *CP* es superior al *CMg*, porque el *CP* refleja tanto el costo marginal de la última unidad producida como los costos marginales más altos de las unidades producidas anteriormente. Siempre que $CP > CMg$, el costo promedio estará disminuyendo. Dado que los costos más bajos de las unidades nuevas produci-

[4]En términos técnicos, $CP = CMg$ en $q = 0$. Podemos demostrar lo anterior con la regla de L'Hopital que dice que si $f(a) = g(a) = 0$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En este caso, $C = 0$ en $q = 0$, por tanto

$$\lim_{q\to 0} CP = \lim_{q\to 0} \frac{C}{q} = \lim_{q\to 0} \frac{\partial C/\partial q}{1} = \lim_{q\to 0} CMg$$

o

$$CP = CMg \text{ en } q = 0,$$

que es lo que queríamos demostrar.

das están por debajo del costo promedio, éstos siguen provocando que el costo promedio disminuya. Sin embargo, el costo marginal aumenta, hasta que al final (en q^*) es igual al costo promedio. Más allá de este punto, $CMg > CP$ y el costo promedio estará aumentando porque los costos marginales cada vez más altos los empujan al alza. Por tanto, hemos demostrado que la curva *CP* también tiene forma de "U" y que alcanza un punto mínimo en q^*, donde las curvas *CP* y *CMg* se interceptan.[5] En los estudios empíricos de las funciones de costos, este punto del costo promedio mínimo tiene especial interés. Refleja la "escala mínima eficiente" (*EME*) para el proceso concreto de producción que está siendo analizado. Este punto también es importante desde el punto de vista teórico debido al papel que desempeña para determinar el precio perfectamente competitivo a largo plazo (véase el capítulo 10).

Funciones de costos y desplazamientos de las curvas de costos

Las curvas de costos que presentan las figuras 8.4 y 8.5 muestran las relaciones entre los costos y las cantidades producidas, partiendo del supuesto de que todos los demás factores permanecen constantes. En concreto, la construcción de estas curvas parte del supuesto de que los precios de los factores y el nivel de la tecnología no cambian.[6] Si estos factores cambiaran, entonces las curvas de costos se desplazarían. En esta sección se abundará más en las matemáticas de las funciones de costos como vía para estudiar estos desplazamientos. Comenzaremos con algunos ejemplos.

EJEMPLO 8.2

Algunas funciones de costos ilustrativas

En este ejemplo se calculan las funciones de costos asociadas a tres funciones distintas de producción. Más adelante se utilizarán estos ejemplos para ilustrar algunas de las propiedades generales de las funciones de costos.

a. Proporciones fijas: $q = f(k, l) = \text{mín}(ak, bl)$.

El cálculo de las funciones de costos a partir de la función de producción que la sustenta es una de las tareas más frustrantes para los estudiantes de economía. Por tanto, empecemos por un ejemplo muy sencillo. Queremos demostrar que el costo total depende de los costos de los factores y de la cantidad producida. En el caso de las proporciones fijas sabemos que la producción ocurrirá en el vértice de las isocuantas con forma de L, donde $q = ak = bl$. Por tanto, el costo total será

$$\text{Costo total} = C(v, w, q) = vk + wl = v(q/a) + w(q/b) = q\left(\frac{v}{a} + \frac{w}{b}\right). \tag{8.21}$$

En efecto, se trata del tipo de función que queremos porque expresa el costo total como función de v, w y q tan sólo al lado de otros parámetros de la función de producción que los sustenta. Dado que la naturaleza de esta función de producción son los rendimientos constantes a escala, adopta la forma especial de

$$C(v,w,q) = qC(v,w,1). \tag{8.22}$$

[5]En términos matemáticos, podemos encontrar el *CP* mínimo haciendo que su derivada sea igual a 0:

$$\frac{\partial CP}{\partial q} = \frac{\partial \frac{C}{q}}{\partial q} = \frac{q \cdot \frac{\partial C}{\partial q} - C \cdot 1}{q^2} = \frac{q \cdot CMg - C}{q^2} = 0$$

o

$$q \cdot CMg - C = 0 \text{ o } CMg = C/q = CP.$$

[6]En el caso de empresas que fabrican varios productos debemos tener en cuenta una complicación más. En estas empresas es posible que los costos asociados a la producción de un producto (por decir q_1) también se vean afectados por la cantidad que se fabrica de otro producto (q_2). En este caso, decimos que la empresa muestra "economías de alcance" y la función del costo total tendrá la forma $C(q_1, q_2, w, v)$. Por tanto, q_2 también se debe mantener constante para construir las curvas de costos q_1. Presumiblemente, los incrementos de q_2 desplazan las curvas de costos q_1 hacia abajo. Aun cuando en este capítulo no nos ocuparemos de empresas que fabrican múltiples productos, en el problema 8.2 y las extensiones de este capítulo analizaremos brevemente el concepto de las economías de alcance.

Es decir, el costo total está determinado por la producción multiplicada por el costo de producir una unidad. Los incrementos de los precios de los factores evidentemente incrementan el costo total con esta función y las mejoras tecnológicas que adoptan la forma de incrementar los parámetros a y b reducen los costos.

b. Cobb-Douglas: $q = f(k, l) = k^{\alpha}l^{\beta}$.

Éste es nuestro primer ejemplo de un cómputo muy laborioso, pero queda claro que la meta última es emplear los resultados de la minimización de costos para reemplazar los factores de la función de producción con los costos a efecto de aclarar el proceso. Dado el ejemplo 8.1 sabemos que la minimización de costos requiere que

$$\frac{w}{v} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{k}{l} \quad \text{así} \quad k = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{w}{v} \cdot l.$$

Si se sustituye este valor de k en la función de producción, se obtendrá una solución para el factor trabajo en los términos de q, v y w como

$$q = k^{\alpha}l^{\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{w}{v}\right)^{\alpha} l^{\alpha+\beta} \quad \text{o} \quad l = q^{1/\alpha+\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha/\alpha+\beta} w^{-\alpha/\alpha+\beta}v^{\alpha/\alpha+\beta}. \tag{8.23}$$

Un conjunto similar de manipulaciones nos dará

$$k = q^{1/\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/\alpha+\beta} w^{\beta/\alpha+\beta}v^{-\beta/\alpha+\beta}. \tag{8.24}$$

Ahora estamos listos para derivar el costo total como

$$C(v,w,q) = vk + wl = q^{1/\alpha+\beta}Bv^{\alpha/\alpha+\beta}w^{\beta/\alpha+\beta}, \tag{8.25}$$

donde $B = (\alpha + \beta)\ \alpha^{-\alpha/\alpha+\beta}\ \beta^{-\beta/\alpha+\beta}$ es una constante que sólo involucra los parámetros α y β. Si bien esta derivación resultó un poco enredada, varios aspectos interesantes de esta función de costo Cobb-Douglas saltan a la vista. En primer término, esta función será una función convexa, lineal o cóncava de la producción dependiendo de que haya rendimientos decrecientes ($\alpha + \beta < 1$), constantes ($\alpha + \beta = 1$), o crecientes a escala ($\alpha + \beta > 1$). En segundo término, un incremento del precio de un factor cualquiera incrementa el costo, y la magnitud del incremento estará determinada por la importancia relativa del factor, reflejada por la magnitud de su exponente en la función de producción. Por último, la función de costos es homogénea de grado uno en los precios de los factores; es decir, una característica general de todas las funciones de costos, como se demostrará a continuación.

c. CES: $q = f(k, l) = (k^{\rho} + l^{\rho})^{\gamma/\rho}$

En este caso, este autor se verá piadoso y le ahorrará tener que manejar el álgebra. Para derivar la función del costo total emplearemos la condición de la minimización de costos especificada en la ecuación 8.15, al resolver cada factor individualmente, y al final de cuentas se obtendrá

$$\begin{aligned} C(v, w, q) = vk + wl &= q^{1/\gamma}\ (v^{\rho/\rho-1} + w^{\rho/\rho-1})^{(\rho-1)/\rho} \\ &= q^{1/\gamma}\ (v^{1-\sigma} + w^{1-\sigma})^{1/1-\sigma}, \end{aligned} \tag{8.26}$$

donde la elasticidad de sustitución está determinada por $\sigma = 1/(1 - \rho)$. De nueva cuenta, la forma del costo total está determinada por el parámetro de la escala (γ) para esta función de producción y la función de costo es creciente en los dos precios de los factores. La función también es homogénea de grado uno en esos precios. Una característica limitante de esta forma de la función CES es que los factores tienen pesos iguales, de ahí que sus precios tengan igual importancia en la función de costos. No obstante, esta característica de la CES es fácil de generalizar (véase el problema 8.7).

Pregunta: Las distintas posibilidades de sustitución inherentes a la función CES cómo se reflejan en la función de costos CES de la ecuación 8.26.

Propiedades de las funciones de costos

Estos ejemplos ilustran algunas propiedades de las funciones del costo total que son bastante generales, entre ellas:

1. *Homogeneidad:* Las funciones del costo total del ejemplo 8.3 son todas homogéneas de grado uno en los precios de los factores. Es decir, si se duplican los precios de los factores, entonces el costo de un nivel determinado de producción se duplicará en cantidad justo igual (usted puede comprobar por su cuenta lo anterior). Ésta es una propiedad de todas las funciones de costos correctas. Cuando los precios de todos los factores se duplican (o si incrementan en una proporción uniforme cualquiera), entonces la proporción de los precios de dos factores no cambiará. Dado que la minimización de costos requiere que la proporción de los precios de los factores sea igual a la *TTS* a lo largo de una isocuanta determinada, la combinación de factores que minimiza los costos tampoco cambiará. Por tanto, la empresa comprará exactamente el mismo conjunto de factores y pagará precisamente el doble por ellos. Una implicación de este resultado es que una inflación uniforme pura de los costos de todos los factores no cambiará las decisiones de la empresa respecto a los factores y sus curvas de costos se desplazarán hacia arriba en correspondencia directa con la tasa de inflación.
2. *La función del costo total no es decreciente en q, v y w:* Esta propiedad parece evidente, pero vale la pena abundar un poco en ella. Dado que derivamos la función de costo a partir del proceso que minimiza los costos, toda disminución del costo derivada de un incremento de uno de los argumentos de la función llevaría a una contradicción. Por ejemplo, si un aumento de la producción de q_1 a q_2 provocara que el costo total disminuyera, entonces seguramente se debe a que la empresa no estaba minimizando los costos en primera instancia. Podría haber producido q_2 y arrojar a la basura una producción de $q_2 - q_1$, produciendo así q_1 a un costo más bajo. Asimismo, si en alguna ocasión hubiera un aumento de precio de un factor que redujera el costo total, entonces la empresa de entrada no habría estado minimizando sus costos. Para ver lo anterior, supongamos que la empresa estaba utilizando una combinación de factores de k_1, l_1 y que w aumentara. Queda claro que esto incrementaría el costo de la combinación inicial de factores. No obstante, si las variaciones de los factores elegidos de hecho provocaran que el costo total disminuyera, ello implicará que, de entrada, había una mezcla de factores con costos más bajos que k_1, l_1. Por tanto, existe una contradicción y esta propiedad de las funciones de costos queda establecida.[7]
3. *La función del costo total es cóncava en los precios de los factores:* Probablemente es más fácil ilustrar esta propiedad con una gráfica. La figura 8.6 muestra los costos totales para diversos valores del precio de un factor, por decir w, manteniendo constantes q y v. Supongamos que, inicialmente la tasa salarial que prevalece es w_1 y que el costo total asociado a la producción de q_1 están dados por $C(v, w_1, q_1)$. Si la empresa no variará su conjunto de factores en respuesta a los cambios de los salarios, la curva de su costo total sería lineal, como refleja la línea $C_{SEUDO}(v, w, q_1)$ de la figura. No obstante, una empresa que minimiza sus costos probablemente variaría el conjunto de factores que usa para producir q_1 cuando los salarios cambian y este costo efectivo $[C(v, w, q_1)]$ quedaría por debajo del "seudo" costo. Por tanto, la función del costo total debe tener la forma cóncava que muestra la figura 8.6. Una implicación de este resultado es que el costo será más bajo cuando una empresa afronta precios de los factores que fluctúan en torno a un nivel dado que cuando permanecen

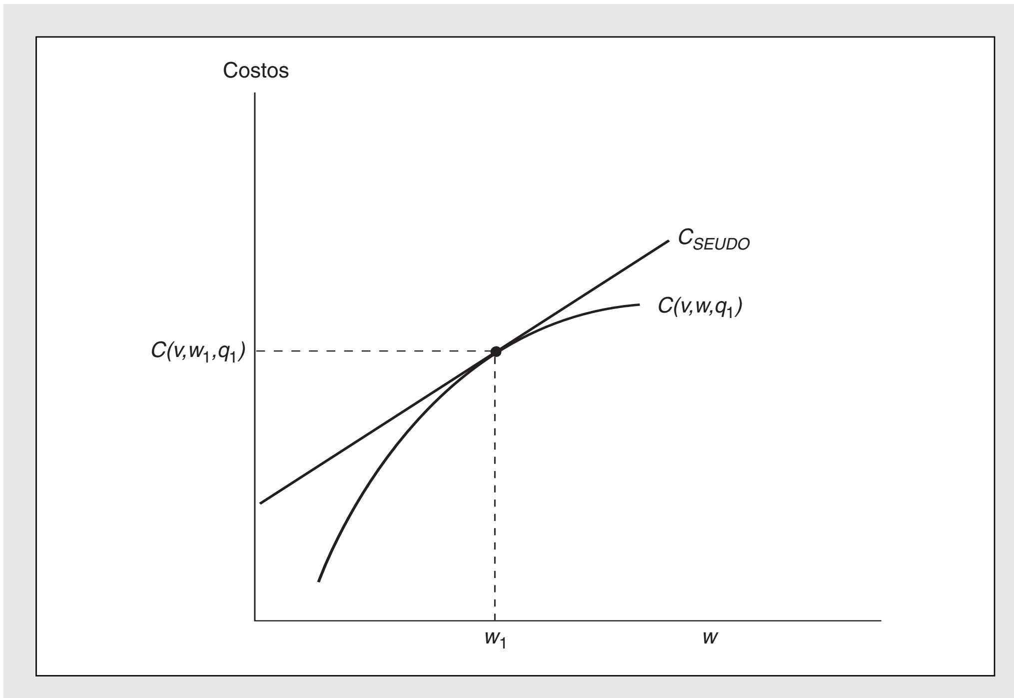
[7]También podríamos basar una prueba formal en el teorema de la envolvente, aplicado a problemas de minimización con restricciones. Pensemos en la expresión lagrangiana de la ecuación 8.3. Como señalamos en el capítulo 2, podemos calcular el cambio de la función objetivo en una expresión así (en este caso el costo total), con respecto a un cambio de una variable, si diferenciamos la expresión lagrangiana. Esta diferenciación nos dará

$$\frac{\partial C^*}{\partial q} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = \lambda \quad (= CMg) \geq 0$$
$$\frac{\partial C^*}{\partial v} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v} = k \geq 0$$
$$\frac{\partial C^*}{\partial w} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w} = l \geq 0$$

Los resultados de la envolvente no sólo demuestran esta propiedad de la función de costo, sino que también son muy útiles, por derecho propio, como demostraremos más adelante en este capítulo.

FIGURA 8.6 **Las funciones de costos son cóncavas en los precios de los factores**

Con un salario de w_1 el costo total de producir q_1 es (v, w_1, q_1). Si la empresa no varía su conjunto de factores, entonces los costos de producir q_1 seguirían la línea recta de C_{SEUDO}. Con la sustitución de los factores, los costos reales, $C(v, w, q_1)$, quedarán por debajo de esta línea y, por tanto, la función de costos será cóncava en w.



constantes en ese nivel. Cuando los precios de los factores fluctúan, la empresa puede adaptar su conjunto de factores para aprovechar estas fluctuaciones, por ejemplo empleando una gran cantidad de trabajo cuando su precio es bajo, y así economizar en ese factor cuando su precio es alto.

4. *Costos promedio y marginal:* Algunas de estas propiedades de las funciones de costo total, pero no todas, se heredan a sus correspondientes funciones de costo promedio y marginal. La homogeneidad es una propiedad que se hereda directamente. Dado que $C(tv, tw, q) = tC(v, w, q)$ tenemos que

$$CP(tv, tw, q) = \frac{C(tv, tw, q)}{q} = \frac{tC(v, w, q)}{q} = tCP(v, w, q) \tag{8.27}$$

y,[8]

$$CMg(tv, tw, q) = \frac{\partial C(tv, tw, q)}{\partial q} = \frac{t\partial C(v, w, q)}{\partial q} = tCMg(v, w, q). \tag{8.28}$$

Sin embargo, los efectos que las variaciones en q, v y w tienen en el costo promedio y el marginal, a veces son ambiguos. Ya hemos demostrado que la curva de costo promedio y la de costo marginal pueden tener segmentos de pendiente negativa, de modo que ni CP ni CMg son no-decrecientes en q. Dado que el costo total no decrecerá cuando el precio de un factor aumenta, queda claro que el costo promedio es creciente en w y v. Sin embargo, el caso del costo marginal es más complejo. La principal complicación se debe a la posibilidad de la inferioridad de los factores. En tal caso (extremadamente raro), el incremento del precio de un bien inferior de hecho provocaría que el costo marginal disminuya.

[8]Este resultado no se contrapone al teorema que dice que la derivada de una función que es homogénea de grado k es homogénea de grado $k - 1$ porque estamos diferenciando con respecto a q y el costo total es homogéneo tan sólo con respecto a los precios de los factores.

Si bien es relativamente sencillo demostrar lo anterior,[9] la explicación intuitiva es más complicada. No obstante, en la mayor parte de los casos, queda claro que el incremento del precio de un factor también aumentará el costo marginal.

Sustitución de factores

Un cambio en el precio de un factor hará que la empresa que minimiza sus costos modifique su conjunto de factores. Por tanto, un estudio completo del desplazamiento de las curvas de costos cuando cambian los precios de los factores también debe incluir el análisis de la sustitución de los factores. Para estudiar este proceso, los economistas han desarrollado una medida de la elasticidad de sustitución un tanto diferente de la que encontramos en la teoría de la producción. En concreto, queremos estudiar cómo la proporción de los factores utilizados (k/l) cambia en respuesta a una variación de w/v, mientras que q se mantiene constante. Es decir, queremos analizar la derivada

$$\frac{\partial\left(\dfrac{k}{l}\right)}{\partial\left(\dfrac{w}{v}\right)} \tag{8.29}$$

a lo largo de una isocuanta.

Si se expresa en términos de proporciones

$$s = \frac{\partial k/l}{\partial w/v} \cdot \frac{w/v}{k/l} = \frac{\partial \ln k/l}{\partial \ln w/v} \tag{8.30}$$

tendremos una definición alternativa y más intuitiva de la elasticidad de sustitución.[10] En el caso de dos factores, s no debe ser negativa; es decir, un incremento de w/v se verá compensado por un incremento de k/l (o, en el caso límite de las proporciones fijas, k/l se mantendrá constante). Los valores altos de s indican que las empresas cambian sustancialmente las proporciones de los factores en respuesta a las variaciones de los precios de éstos, mientras que los valores bajos indican que los cambios de los precios de los factores tienen un efecto relativamente pequeño.

Elasticidad de sustitución parcial

Cuando sólo hay dos factores de producción, la elasticidad de sustitución definida en la ecuación 8.30 es idéntica a la que se definió en el capítulo 7 (véase la ecuación 7.32). Podemos demostrar fácilmente lo anterior si recordamos que una empresa que minimiza[11] los costos igualará su *TTS* (de l por k) al cociente de los precios de los factores w/v. La gran ventaja de la definición que presenta la ecuación 8.30 es que la podemos generalizar al caso de muchos factores más fácilmente que la definición que vimos en el capítulo anterior. En concreto, tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Elasticidad de sustitución parcial (s_{ij}). La *elasticidad de sustitución parcial* entre dos factores (x_i y x_j) con precios w_i y w_j está determinada por

$$s_{ij} = \frac{\partial\, x_i/x_j}{\partial\, w_j/w_i} \cdot \frac{w_j/w_i}{x_i/x_j} = \frac{\partial \ln(x_i/x_j)}{\partial \ln(w_i/w_j)}, \tag{8.31}$$

donde la producción y los precios de los demás factores se mantienen constantes.

---

[9]La demostración se ciñe a los resultados del teorema de la envolvente que presenta la nota 7 al pie de página. Dado que podemos derivar la función *CMg* por diferenciación del lagrangiano para la minimización de costos, podemos emplear el teorema de Young para demostrar que

$$\frac{\partial CMg}{\partial v} = \frac{\partial(\partial \mathscr{L}/\partial^2 q)}{\partial v} = \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial v \partial q} = \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial q \partial v} = \frac{\partial k}{\partial q}.$$

Por tanto, si el capital es un factor normal, un incremento en v aumentará *CMg* mientras que, si el capital es inferior, un incremento en v de hecho disminuirá *CMg*.

[10]Esta definición suele ser atribuida a R.G.D. Allen, quien la desarrolló de forma alternativa en su obra *Mathematical Analysis for Economists*, Nueva York, 1938, pp. 504-509.

[11]En el ejemplo 8.1 vimos que, para la función de producción CES, la minimización de costos requiere que $\frac{k}{l} = \left(\frac{w}{v}\right)^{\sigma}$ de modo que $\ln(k/l) = \sigma \ln(w/v)$ y, por tanto $s_{k,l} = \frac{\partial \ln(k/l)}{\partial \ln(w/v)} = \sigma$.

En esta definición, utilizamos el término *parcial* para diferenciar este concepto de la definición de producción basada en la función. De hecho, s_{ij} es un concepto más flexible porque permite que la empresa varíe la cantidad que utiliza de otros factores de producción (aparte de x_i o x_j cuando cambian los precios de éstos, mientras que en la definición del capítulo 7 la utilización de otros factores se mantenía constante. Por ejemplo, supongamos que aumentan los precios de la energía y que queremos conocer el efecto que la variación tendrá en la proporción del factor energía al factor capital, mientras se mantiene constante la producción. Si bien esperaríamos que la cantidad de energía utilizada disminuyera, es posible que la empresa sustituya un tercer factor, por decir, el trabajo, por la energía y el capital, de modo que el factor capital también disminuiría. Por tanto, la proporción de energía a capital podría aumentar de hecho, dependiendo de las magnitudes concretas de estos cambios. En tal caso, diríamos que la energía y el capital son *complementos,* debido a la forma en que su uso conjunto se relaciona con el factor trabajo. Aquí no se analizarán las consecuencias que estas posibilidades tienen para la teoría de la producción y la de los costos, pero las ampliaciones de este capítulo muestran cómo podemos calcular s_{ij} si conocemos la función de costos.

Estimación cuantitativa de los desplazamientos de las curvas de costos

Ya hemos demostrado que los incrementos en el precio de un factor incrementarán el costo promedio, el marginal y el total (excepto en el caso de un factor inferior). Ahora estamos en posición de evaluar la magnitud de estos incrementos. Lo primero, evidentemente, es que el incremento en los costos se verá afectado en gran medida por la importancia relativa que el factor tenga para el proceso de producción. Si un factor constituye una parte importante del costo total, entonces un incremento en su precio incrementará el costo de manera sustancial. Un incremento del salario incrementaría mucho el costo de los constructores de viviendas porque el trabajo es uno de los factores principales en la construcción. Por otra parte, el aumento en el precio de un factor que tenga menos importancia relativa tendrá un efecto menor en los costos. El aumento en el precio de los clavos no incrementará demasiado el costo de construcción de las viviendas.

Un determinante menos evidente de la magnitud de los incrementos en los costos es la posibilidad de sustituir factores. Si las empresas pueden sustituir con facilidad el factor que ha registrado el aumento de precio por otro factor, entonces los costos tal vez registren un incremento menor. Por ejemplo, el incremento que registró el precio del cobre a finales de la década de los sesenta no tuvo grandes repercusiones en los costos de distribución de electricidad de las compañías de energía eléctrica, porque éstas descubrieron que podían sustituir, sin dificultad alguna, los cables de cobre por otros de aluminio. Por otra parte, si la empresa encuentra que es difícil o imposible sustituir el factor que se ha encarecido, los costos podrían aumentar con rapidez. El costo de las joyas de oro y el precio del oro aumentaron con rapidez a principios de la década de los setenta porque, sencillamente, no había sustituto alguno para esta materia prima.

Podemos formular con precisión, en términos matemáticos, la magnitud cuantitativa de todos estos efectos si utilizamos la elasticidad de sustitución parcial. Sin embargo, para ello, tendríamos que utilizar incluso más símbolos de los que ya contiene este libro.[12] Por tanto, la explicación intuitiva anterior bastará para nuestro propósito. Este análisis debe recordarnos que las variaciones del precio de un factor tendrán el efecto de desplazar las curvas de costos de la empresa y la magnitud de este desplazamiento dependerá de la importancia relativa del factor y de las posibilidades de sustitución disponibles.

Avances tecnológicos

Las mejoras tecnológicas permiten a la empresa producir una cantidad determinada utilizando menos factores de producción. Por tanto, estas mejoras evidentemente desplazarán el costo total hacia abajo (si los precios de los factores permanecen constantes). Si bien la forma en que los cambios tecnológicos reales afectan la fórmula matemática de la curva del costo total es muy compleja, en ciertos casos podemos obtener conclusiones muy sencillas. Por ejemplo, supongamos que la función de producción muestra rendimientos constantes a escala y que el cambio tecnológico entra en la función de la forma descrita en el capítulo 7 (es decir, $q = A(t)f(k, l)$ donde $A(0) = 1$). En tal caso, el costo total del periodo inicial estará determinado por

$$\mathbf{C_0 = C_0(v, w, q) = qC_0(v, w, 1).} \tag{8.32}$$

[12]Encontrará una formulación completa en Ferguson, *Neoclassical Theory of Production and Distribution,* Cambridge University Press, Cambridge, 1969, pp. 154-160.

Dado que los mismos factores que producían una unidad de producto en el periodo cero, producirán $A(t)$ unidades del producto en el periodo t, sabemos que

$$C_t(v, w, A(t)) = A(t)C_t(v, w, 1) = C_0(v, w, 1); \qquad \textbf{(8.33)}$$

por tanto podremos calcular la función del costo total en el periodo t como

$$C_t(v, w, q) = qC_t(v, w, 1) = qC_0(v, w, 1)/A(t) = C_0(v, w, q)/A(t). \qquad \textbf{(8.34)}$$

Por tanto, el costo total disminuye a lo largo del tiempo al mismo ritmo al que se produce el cambio tecnológico. Nótese que, en este caso, el cambio tecnológico es "neutro" en tanto que no afecta a las elecciones de la empresa respecto a los factores (siempre y cuando los precios de los factores permanezcan constantes). Este resultado de neutralidad tal vez no sea válido en casos cuando los avances tecnológicos adoptan una forma más compleja o en los cuales hay rendimientos variables a escala. Sin embargo, incluso en estos casos más complejos, las mejoras tecnológicas provocarán que el costo total disminuya.

EJEMPLO 8.3

Modificación de la función de costos Cobb-Douglas

En el ejemplo 8.2 calculamos la función de costos Cobb-Douglas como

$$C(v, w, q) = q^{1/\alpha+\beta}\, Bv^{\alpha/\alpha+\beta}\, w^{\beta/\alpha+\beta}, \qquad \textbf{(8.35)}$$

donde $B = (\alpha + \beta)\alpha^{-\alpha/\alpha+\beta}\, \beta^{-\beta/\alpha+\beta}$. Tal como en la ilustración numérica del ejemplo 8.1, supongamos que $\alpha = \beta = 0.5$, en cuyo caso la función del costo total se simplifica enormemente:

$$C(v, w, q) = 2qv^{0.5}\, w^{0.5}. \qquad \textbf{(8.36)}$$

Esta función producirá una curva de costo total que lo relaciona con la producción si especificamos valores concretos para los precios de los factores de producción. Si, al igual que antes, suponemos que $v = 3$ y $w = 12$, la relación será

$$C(3, 12, q) = 2q\sqrt{36} = 12q, \qquad \textbf{(8.37)}$$

y, al igual que en el ejemplo 8.1, costará 480 producir 40 unidades del producto. En este caso, podemos calcular los costos promedio y marginal fácilmente como

$$\begin{aligned} CP &= \frac{C}{q} = 12 \\ CMg &= \frac{\partial C}{\partial q} = 12. \end{aligned} \qquad \textbf{(8.38)}$$

Como era de esperar, el costo promedio y el marginal son constantes e iguales entre sí en el caso de esta función de producción con rendimientos constantes a escala.

Cambios en los precios de los factores. Si uno de los precios de los factores cambiara, entonces todos estos costos también cambiarían. Por ejemplo, si los salarios aumentaran a 27 (una cifra fácil para trabajar), los costos serían

$$\begin{aligned} &C(3, 27, q) = 2q\sqrt{81} = 18q \\ &CP = 18 \\ &CMg = 18. \end{aligned} \qquad \textbf{(8.39)}$$

Nótese que, en este caso, un incremento de los salarios de 125% incrementó los costos apenas un 50%, tanto porque el trabajo sólo representa 50% del costo total, como porque la variación en los precios de los factores llevó a la empresa a sustituir capital por trabajo. Dado que hemos derivado la función del costo total a partir del supuesto de la minimización de costos, ésta realiza dicha sustitución "tras bambalinas" y tan sólo reporta el efecto final en el costo total.

Avances tecnológicos. Ahora analicemos el efecto que los avances tecnológicos tienen en los costos. En concreto, supongamos que la función de producción Cobb-Douglas es

$$q = A(t)k^{0.5}l^{0.5} = e^{.03t}k^{0.5}l^{0.5}. \qquad \textbf{(8.40)}$$

Es decir, suponemos que el cambio tecnológico ocurre en forma exponencial y que la tasa de cambio tecnológico es de 3% anual. Utilizando los resultados de la sección anterior (ecuación 8.34) se obtendrá

$$C_t(v, w, q) = C_0(v, w, q)/A(t) = 2qv^{0.5}w^{0.5}e^{-0.03t} \tag{8.41}$$

Por tanto, si los precios de los factores no cambian, el costo total disminuirá al ritmo de las mejoras tecnológicas; es decir, a 3% anual. Pasados, por decir, 20 años, el costo será (con $v = 3$, $w = 12$)

$$\begin{aligned} C_{20}(3, 12, q) &= 2q\sqrt{36} \cdot e^{-0.60} = 12q \cdot (0.55) = 6.6q \\ CP_{20} &= 6.6 \\ CMg_{20} &= 6.6. \end{aligned} \tag{8.42}$$

En consecuencia, los costos habrán disminuido casi 50% como resultado del cambio tecnológico. Esto, por ejemplo, habría compensado con creces el aumento de salarios ilustrado previamente.

Pregunta: En este ejemplo, ¿qué elasticidad tiene el costo total con relación a los cambios de los precios de los factores? ¿Los cambios tecnológicos afectan la magnitud de estas elasticidades?

Demanda condicionada de los factores y el lema de Shephard

Como se dijo antes, el proceso de minimización de los costos crea una demanda implícita de factores de producción. Dado que el proceso mantiene constante la cantidad producida, esta demanda de factores también será "condicionada", dependiendo de la cantidad que se produce. Esta relación queda reflejada por completo en la función del costo total de la empresa y de ella podremos derivar, tal vez extrañamente, las funciones de demanda condicionada de todos los factores de la empresa. El proceso implica lo que ahora se conoce como el lema de Shephard,[13] el cual dice que la función de demanda condicionada de un factor cualquiera está determinada por la derivada parcial de la función del costo total en relación con el precio de ese factor. Dado que el lema de Shephard es muy usual en distintos campos de la investigación económica, haremos un análisis relativamente detallado del mismo.

La intuición que sustenta el lema de Shephard es muy sencilla. Supongamos que el precio del trabajo (w) aumentara ligeramente. ¿Ello cómo afectaría al costo total? Si no hubiera cambios por lo demás, al parecer los costos aumentarían aproximadamente en igual cantidad que el trabajo (l) que la empresa estuviera utilizando en ese momento. Así pues, en pocas palabras, $\partial C/\partial w = l$, que es justo lo que afirma el lema de Shephard. La figura 8.6 presenta el mismo punto, más o menos, en términos gráficos. A lo largo de la función de "seudo" costo, todos los factores se mantienen constantes y, por tanto, un aumento del salario incrementa los costos en proporción directa con la cantidad de trabajo empleada. Dado que la verdadera función de costos es tangente a la seudo función, al salario corriente, su pendiente (es decir, su derivada parcial) también mostrará la cantidad corriente del factor trabajo que se demanda.

Técnicamente, el lema de Shephard es uno de los resultados del teorema de la envolvente que vimos en el capítulo 2. Ahí, se demostró que podemos determinar el cambio del valor óptimo de un problema de optimización con restricciones, en relación con uno de los parámetros, si diferenciamos la expresión lagrangiana de ese problema de optimización con respecto al parámetro que cambió. En el caso de la minimización de costos, la expresión lagrangiana es

$$\mathscr{L} = vk + wl + \lambda[\bar{q} - f(k,l)] \tag{8.43}$$

[13]Llamado así por R. W. Shephard, quien subrayó la importante relación entre las funciones de costos y las funciones de demanda de factores en su obra *Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

y el teorema de la envolvente aplicado a uno de los factores es

$$\begin{aligned}\frac{\partial C(v,w,q)}{\partial v} &= \frac{\partial \mathscr{L}(v,w,q,\lambda)}{\partial v} = k^c(v,w,q)\\ \frac{\partial C(v,w,q)}{\partial w} &= \frac{\partial \mathscr{L}(v,w,q,\lambda)}{\partial w} = l^c(v,w,q),\end{aligned} \tag{8.44}$$

donde la notación pretende dejar en claro que las funciones de demanda resultantes de los factores capital y trabajo dependen de v, w y q. Dado que la cantidad producida entra en estas funciones, la demanda factorial depende, de hecho, de esa variable. Esta característica de las funciones de demanda también queda reflejada por la "c" de la notación.[14] De ahí que las relaciones de la demanda de la ecuación 8.44 no presenten el panorama completo de la demanda factorial, porque siguen dependiendo de una variable que está sujeta al control de la empresa. En el capítulo siguiente terminaremos el análisis de la demanda factorial cuando demostremos que el supuesto de la maximización de las ganancias permite reemplazar q de hecho, en las relaciones de demanda de factorial con el precio de mercado del producto de la empresa, p.

EJEMPLO 8.4

Funciones de la demanda condicionada de factores

En este ejemplo se demostrará que podemos utilizar las funciones del costo total derivadas en el ejemplo 8.2 para derivar funciones de una demanda condicionada de los factores capital y trabajo.

a. Proporciones fijas: $C(v, w, q) = q\left(\dfrac{v}{a} + \dfrac{w}{b}\right)$.

En el caso de esta función de costos, las funciones de la demanda condicionada son bastante sencillas:

$$\begin{aligned}k^c(v,w,q) &= \frac{\partial C(v,w,q)}{\partial v} = \frac{q}{a}\\ l^c(v,w,q) &= \frac{\partial C(v,w,q)}{\partial w} = \frac{q}{b}.\end{aligned} \tag{8.45}$$

La empresa, para poder alcanzar una producción determinada con una función de producción de proporciones fijas, en el costo mínimo debe producir en el vértice de sus isocuantas, independientemente de los precios que tengan los factores de producción. Por tanto, la demanda de los factores dependerá exclusivamente del nivel de producción y v y w no entrarían en las funciones de demanda condicionada de factores. Sin embargo, los precios de los factores pueden afectar los totales de las demandas de los factores en el caso de las proporciones fijas, porque pueden afectar la cantidad que la empresa podría vender.

b. Cobb-Douglas: $C(v, w, q) = q^{1/\alpha+\beta} Bv^{\alpha/\alpha+\beta} w^{\beta/\alpha+\beta}$.

En este caso, la derivación es más complicada, pero también más instructiva:

$$\begin{aligned}k^c(v,w,q) &= \frac{\partial C}{\partial v} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot q^{1/\alpha+\beta}Bv^{-\beta/\alpha+\beta}w^{\beta/\alpha+\beta}\\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot q^{1/\alpha+\beta}B\left(\frac{w}{v}\right)^{\beta/\alpha+\beta}\\ l^c(v,w,q) &= \frac{\partial C}{\partial w} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot q^{1/\alpha+\beta}Bv^{\alpha/\alpha+\beta}w^{-\alpha/\alpha+\beta}\\ &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot q^{1/\alpha+\beta}B\left(\frac{w}{v}\right)^{-\alpha/\alpha+\beta}.\end{aligned} \tag{8.46}$$

[14]La notación es un reflejo de la que usamos para las curvas de demanda compensada en el capítulo 5 (que derivamos de la función de gasto). En ese caso, las funciones de demanda dependían del objetivo asumido para la utilidad.

En consecuencia, las demandas condicionadas de los factores dependen de sus precios. Si suponemos que $\alpha = \beta = 0.5$ (por tanto, $B = 2$), lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned} k^c(v, w, q) &= 0.5 \cdot q \cdot 2 \cdot \left(\frac{w}{v}\right)^{0.5} = q\left(\frac{w}{v}\right)^{0.5} \\ l^c(v, w, q) &= 0.5 \cdot q \cdot 2 \cdot \left(\frac{w}{v}\right)^{-0.5} = q\left(\frac{w}{v}\right)^{-0.5}. \end{aligned} \tag{8.47}$$

Siendo $v = 3$, $w = 12$ y $q = 40$ rinden el resultado que obtuvimos antes; es decir, que la empresa debería elegir la combinación de factores $k = 80$, $l = 20$ para poder minimizar el costo de producción de 40 unidades de producto. Si el salario aumentara, por decir, a 27, entonces la empresa optaría por la combinación de factores $k = 120$, $l = 40/3$ para producir 40 unidades del producto. El costo total aumentaría de 480 a 520, pero la posibilidad de la empresa para sustituir capital por un trabajo que ahora es más caro sí le ahorra una cantidad considerable. Por ejemplo, la combinación inicial de factores ahora cuesta 780.

c. CES: $C(v, w, q) = q^{1/\gamma}\,(v^{1-\sigma} + w^{1-\sigma})^{1/1-\sigma}$

Las funciones de demanda condicionada derivadas de la función CES demuestran la importancia de la sustitución de los factores incluso con mayor claridad. Para esta función,

$$\begin{aligned} k^c(v, w, q) &= \frac{\partial C}{\partial v} = \frac{1}{1-\sigma} \cdot q^{1/\gamma}(v^{1-\sigma} + w^{1-\sigma})^{\sigma/1-\sigma}(1-\sigma)v^{-\sigma} \\ &= q^{1/\gamma}(v^{1-\sigma} + w^{1-\sigma})^{\sigma/1-\sigma} v^{-\sigma} \\ l^c(v, w, q) &= \frac{\partial C}{\partial w} = \frac{1}{1-\sigma} \cdot q^{1/\gamma}(v^{1-\sigma} + w^{1-\sigma})^{\sigma/1-\sigma}(1-\sigma)w^{-\sigma} \\ &= q^{1/\gamma}(v^{1-\sigma} + w^{1-\sigma})^{\sigma/1-\sigma} w^{-\sigma}. \end{aligned} \tag{8.48}$$

Estas funciones se colapsan cuando $\sigma = 1$ (el caso Cobb-Douglas), pero podemos estudiar ejemplos con mayor ($\sigma = 2$) o menor ($\sigma = 0.5$) posibilidad de sustitución y emplear el caso b como un campo intermedio. Si suponemos que hay rendimientos constantes a escala ($\gamma = 1$) y $v = 3$, $w = 12$ y $q = 40$, las demandas condicionadas de los factores, cuando $\sigma = 2$ son

$$\begin{aligned} k^c(3, 12, 40) &= 40(3^{-1} + 12^{-1})^{-2} \cdot 3^{-2} = 25.6 \\ l^c(3, 12, 40) &= 40(3^{-1} + 12^{-1})^{-2} \cdot 12^{-2} = 1.6. \end{aligned} \tag{8.49}$$

Es decir, el nivel del factor capital es 16 veces mayor que la cantidad del factor trabajo. Ante una menor posibilidad de sustitución ($\sigma = 0.5$), las demandas condicionadas de los factores son

$$\begin{aligned} k^c(3, 12, 40) &= 40(3^{0.5} + 12^{0.5})^{1} \cdot 3^{-0.5} = 120 \\ l^c(3, 12, 40) &= 40(3^{0.5} + 12^{0.5})^{1} \cdot 12^{-0.5} = 60. \end{aligned} \tag{8.50}$$

Por tanto, en este caso, el factor capital sólo es el doble que el factor trabajo. Si bien no podemos comparar directamente los distintos casos, porque los distintos valores de σ producen diferentes escalas de producción, sí podemos, por ejemplo, analizar las consecuencias que un aumento de w a 27 tiene en el caso de las pocas posibilidades de sustitución. Siendo $w = 27$, la empresa optará por $k = 160$, $l = 53.3$. En este caso, podemos calcular el ahorro de costos derivado de la sustitución si comparamos el costo total utilizando la combinación inicial de factores (= 120(3) + 27(60) = 1980) con el costo total de la combinación óptima (= 160(3) + 27(53.3) = 1919). Por tanto, pasar a la combinación óptima de factores disminuye el costo total apenas alrededor de 3%. En el caso Cobb-Douglas, el ahorro de costos pasa del 20 por ciento.

Pregunta: ¿El costo total cómo cambiaría si w aumentara de 12 a 27 y la función de producción tuviera una forma lineal simple $q = k + 4l$? ¿Este resultado qué luz aporta sobre los otros casos de este ejemplo?

Diferencias entre corto y largo plazo

En economía, se acostumbra marcar una diferencia entre el "corto plazo" y el "largo plazo". Si bien no podemos ofrecer una definición muy precisa de los tiempos que abarcan estos términos, el objetivo general de esta diferenciación consiste en distinguir un periodo corto, en el cual los agentes económicos sólo tienen flexibilidad limitada para sus acciones, de un periodo más largo, el cual les brinda mayor libertad. La teoría de la empresa y de sus costos es un campo de estudio en el cual esta diferencia resulta bastante importante, porque a los economistas les interesa analizar las reacciones de la oferta durante intervalos de tiempo que podrían ser distintos. En la parte restante de este capítulo analizaremos las consecuencias de estos distintos periodos de respuesta.

Para ilustrar por qué las reacciones a corto plazo podrían ser diferentes de las del largo plazo, suponemos que el factor capital se mantiene fijo al nivel de k_1, y que (en el corto plazo) la empresa sólo tiene libertad para variar su factor trabajo.[15] Implícitamente, estamos suponiendo que las variaciones del nivel de capital son infinitamente caras a corto plazo. En razón de este supuesto, podremos escribir la función de producción a corto plazo como

$$q = f(k_1, l), \tag{8.51}$$

donde la notación muestra explícitamente que las cantidades de capital no pueden variar. Por supuesto que la empresa puede modificar el nivel de producción si varía la cantidad de trabajo que utiliza.

Costo total a corto plazo

Seguimos definiendo el costo total de la empresa como

$$CT = vk + wl \tag{8.52}$$

para nuestro análisis del corto plazo, pero ahora el factor capital está fijo en el nivel de k_1. Para reflejar este hecho, escribiremos

$$CTcp = vk_1 + wl, \tag{8.53}$$

donde *cp* indica que estamos analizando los costos a corto plazo con un nivel fijo del factor capital. A lo largo de nuestro análisis, se utilizará este método para indicar los costos a corto plazo, mientras que representaremos los costos a largo plazo con las siglas *CT, CP* y *CMg*. Normalmente, no se mostrará explícitamente el nivel del factor capital, pero se sobreentiende que este factor está fijo.

Costo fijo y costo variable

Los dos tipos de costos de los factores de la ecuación 8.53 reciben nombres especiales. El término vk_1 se entiende como *costo fijo* (a corto plazo); es decir, dado que k_1 es una constante, estos costos no variarán a corto plazo. El término wl se entiende como *costo variable* (a corto plazo); es decir, el factor trabajo puede variar a corto plazo. Por tanto, tendremos las definiciones siguientes:

DEFINICIÓN

Costo fijo y costo variable a corto plazo. El *costo fijo a corto plazo* es aquel que se refiere a los factores que la empresa no puede variar a corto plazo. El *costo variable a corto plazo* es aquel que se refiere a los factores que la empresa puede variar para cambiar el nivel de su producción.

La importancia de esta diferenciación es que distingue el costo variable que la empresa puede evitar si no produce nada a corto plazo del costo que está fijo y que debe pagar, independientemente del nivel de producción que elija (incluso cero).

Costos a corto plazo no óptimos

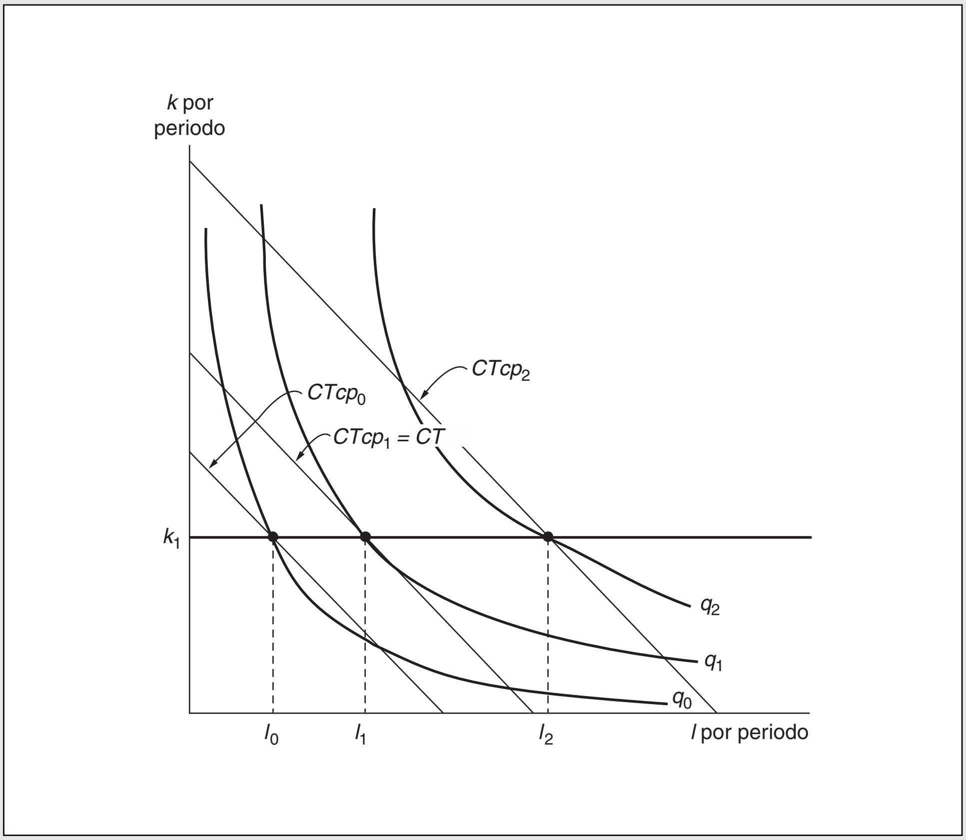
Es importante que entendamos que el costo total a corto plazo no representa los costos mínimos de generar los diversos niveles de producción. Dado que mantenemos constante el capital a

---

[15] Por supuesto que este planteamiento sólo sirve para efectos de ilustración. En muchas situaciones reales, el factor trabajo puede ser menos flexible a corto plazo que el factor capital.

FIGURA 8.7 **A corto plazo, la empresa debe hacer elecciones de factores “no óptimas”**

Dado que, en el corto plazo, el factor capital está fijo en k, la empresa no puede colocar su *TTS* en igualdad con el cociente de los precios de los factores. Dados los precios de los factores, producirá, q_0 con más trabajo y menos capital que los que debería utilizar a corto plazo, mientras que producirá q_2 con más capital y menos trabajo que los que debería utilizar.



corto plazo, la empresa no tiene flexibilidad para elegir los factores que dimos por supuestos cuando analizamos la minimización de los costos al principio de este capítulo. Por el contrario, para variar su nivel de producción a corto plazo, la empresa se verá obligada a utilizar combinaciones de factores que “no son óptimas”: la *TTS* no será igual al cociente de los precios de los factores. La figura 8.7 muestra este hecho. En el corto plazo, la empresa se ve obligada a utilizar k_1 unidades de capital. Por tanto, para fabricar el nivel de producción q_0, utilizará l_0 unidades de trabajo. Asimismo, utilizará l_1 unidades de trabajo para producir q_1, y l_2 unidades para producir q_2. El costo total de esta combinación de factores está dado por $CTcp_0$, $CTcp_1$ y $CTcp_2$, respectivamente. Sin embargo, sólo estará produciendo a costo mínimo con la combinación de factores k_1, l_1. La *TTS* será igual al cociente de los precios de los factores únicamente en este punto. La figura 8.7 permite ver con claridad que en q_0 la empresa está produciendo con “demasiado” capital en esta situación a corto plazo. La minimización de los costos sugiere un movimiento hacia el sudeste a lo largo de la isocuanta q_0 indicando así una sustitución de trabajo por capital en la producción. Asimismo, q_2 se produce con “demasiado poco” capital y la empresa podría reducir los costos sustituyendo capital por trabajo. Ninguna de las dos sustituciones es posible en el corto plazo. Sin embargo, en un periodo más largo, la empresa podrá cambiar el nivel del factor capital y ajustará la cantidad que utiliza de este factor a las combinaciones que minimizan los costos. Al principio de este capítulo se analizó este caso flexible y volveremos a él para ilustrar la relación entre las curvas de costos a corto y a largo plazo.

Costo promedio y costo marginal a corto plazo

Con frecuencia, es más útil analizar el costo a corto plazo por unidad producida y no por producción total. Los dos conceptos más importantes que podemos derivar de la función del costo total a corto plazo son la *función del costo total promedio a corto plazo* (*CPcp*) y la *función del costo marginal a corto plazo* (*CMgcp*). Estos conceptos se definen como

$$
\begin{aligned}
CPcp &= \frac{\text{costo total}}{\text{producción total}} = \frac{CTcp}{q} \\
CMgcp &= \frac{\text{cambio de costo total}}{\text{variación de producción total}} = \frac{\partial CTcp}{\partial q},
\end{aligned}
\tag{8.54}
$$

donde, de nuevo, definimos estos costos para un determinado nivel del factor capital. Estas definiciones del costo promedio y el costo marginal son idénticas a las desarrolladas anteriormente para el caso de largo plazo, con total flexibilidad, y la derivación de las curvas de costos a partir de la función del costo total se realiza exactamente de la misma manera. Dado que la curva del costo total a corto plazo tiene el mismo tipo general de forma cúbica en la curva del costo total de la figura 8.5, estas curvas del costo promedio y el costo marginal a corto plazo también tendrán una forma de "U".

Relación entre las curvas de costos a corto y largo plazo

Al analizar todas las posibles variaciones del factor capital, podremos establecer la relación entre los costos a corto plazo y los costos a largo plazo, totalmente flexibles, que derivamos al principio de este capítulo. La figura 8.8 muestra esta relación para el caso de los rendimientos constantes a escala y el de la curva cúbica del costo total. La figura muestra el costo total a corto plazo para tres niveles del factor capital, aun cuando, por supuesto, podría mostrar muchas más curvas a corto plazo. Las gráficas muestran que el costo total a largo plazo (*CTlp*) siempre es inferior al costo total de corto plazo, excepto para el nivel de producción en el cual el nivel del factor capital supuesto es el adecuado para minimizar los costos a largo plazo. Por ejemplo, como ocurre en la figura 8.7, con un factor capital igual a k_1, la empresa puede minimizar totalmente los costos cuando produce q_1. Por tanto, el costo total a corto y largo plazo son iguales en este punto. Sin embargo, en el caso de niveles de producción distintos a q_1, $CTcp > CT$, como era el caso en la figura 8.7.

Las curvas del costo total a largo plazo de la figura 8.8 se conocen, técnicamente, con el nombre de "envolvente" de sus respectivas curvas a corto plazo. Podemos representar estas curvas del costo total a corto plazo con parámetros mediante la fórmula

$$
\text{Costo total a corto plazo} = CTcp(v,w,q,k), \tag{8.55}
$$

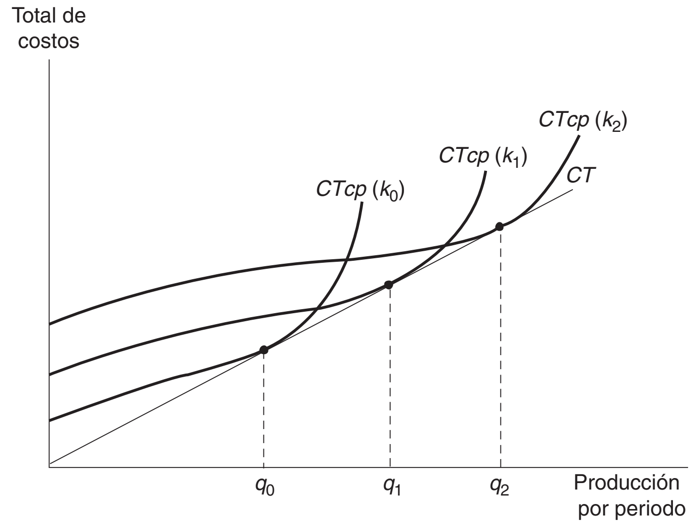
donde generamos la familia de curvas de corto plazo permitiendo que varíe k mientras v y w se mantienen constantes. La curva del costo total a largo plazo (*CTlp*) debe obedecer a la relación a corto plazo de la ecuación 8.55 y también está la condición de que debemos elegir la k que minimice el costo total para un nivel cualquiera de producción. Una condición de primer orden para esta minimización es que

$$
\frac{\partial CTcp(v,w,q,k)}{\partial km} = 0. \tag{8.56}
$$

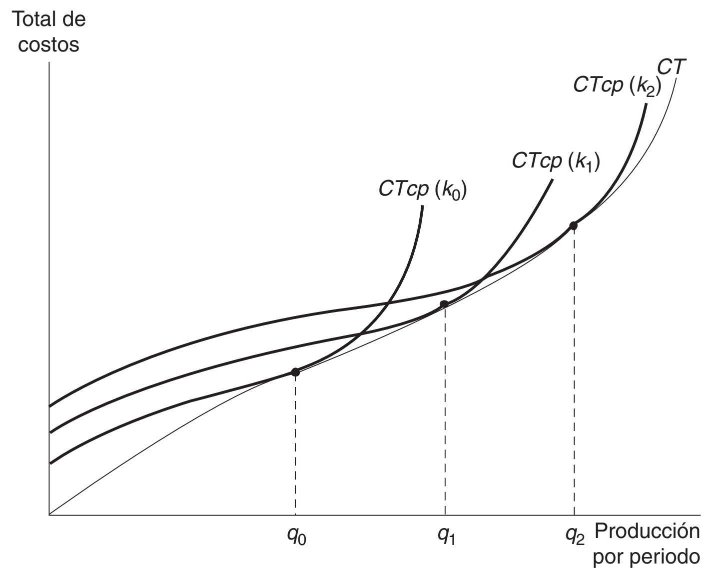
Por tanto, el resolver las ecuaciones 8.55 y 8.56 simultáneamente generará la función del costo total a largo plazo. Aun cuando se trata de un planteamiento distinto para derivar la función del costo total, nos debe dar precisamente los mismos resultados obtenidos al principio del capítulo, como ilustra el ejemplo siguiente.

FIGURA 8.8 **Dos posibles formas de la curva del costo total a largo plazo**

Si consideramos todos los posibles niveles del factor capital, podremos trazar la curva del costo total a largo plazo *(CTlp)*. En a), la función de producción subyacente muestra rendimientos constantes a escala; es decir, a largo plazo, pero no a corto, el costo total es proporcional a la producción. En b), la curva del costo total a largo plazo tiene forma cúbica, al igual que las curvas a corto plazo. Sin embargo, los rendimientos decrecientes son más pronunciados en las curvas a corto plazo porque hemos supuesto un nivel fijo del factor capital.



a) Rendimientos a escala constantes



b) Caso de la curva cúbica del costo total

EJEMPLO 8.5

Relaciones de la envolvente y funciones de costos Cobb-Douglas

De nueva cuenta empezamos con la función de producción Cobb-Douglas $q = k^{\alpha}l^{\beta}$ pero ahora mantenemos el factor capital constante en k_1. De tal modo, a corto plazo,

$$q = k_1^{\alpha}l^{\beta} \text{ o } l = q^{1/\beta}k_1^{-\alpha/\beta}, \tag{8.57}$$

y el costo total estarán determinados por

$$CTcp(v, w, q, k_1) = vk_1 + wl = vk_1 + wq^{1/\beta}k_1^{-\alpha/\beta}. \tag{8.58}$$

Nótese que el nivel fijo de capital entra en esta función del costo total a corto plazo de dos maneras: 1) k_1 determina el costo fijo y 2) k_1 también determina el costo variable en parte, porque determina la cantidad del factor variable (trabajo) necesario para generar los distintos niveles de producción. Para derivar los costos a largo plazo, requerimos escoger k de modo que minimice al costo total:

$$\frac{\partial CTcp(v, w, q, k)}{\partial k} = v + \frac{-\alpha}{\beta} \cdot q^{1/\beta}k^{-(\alpha+\beta)/\beta} = 0. \tag{8.59}$$

Aun cuando el álgebra es complicada, podemos resolver la ecuación para k y sustituirla en la ecuación 8.58 para volver a la función de costos Cobb-Douglas:

$$CT(v, w, q) = Bq^{1/\alpha+\beta}\, v^{\alpha/\alpha+\beta}\, w^{\beta/\alpha+\beta}. \tag{8.60}$$

Ejemplo numérico. Si de nueva cuenta dejamos que $\alpha = \beta = 0.5$, $v = 3$, $w = 12$, la función de costos a corto plazo será

$$CTcp(3, 12, q, k) = 3k_1 + 12q^2k_1^{-1}. \tag{8.61}$$

En el ejemplo 8.1 encontramos que el nivel del factor capital que minimiza los costos para, por decir, $q = 40$ era $k = 80$. La ecuación 8.61 muestra que el costo total a corto plazo para producir 40 unidades de producto con $k = 80$ son

$$\begin{aligned} CTcp(3, 12, q, 80) &= 3 \cdot 80 + 12 \cdot q^2 \cdot \frac{1}{80} = 240 + \frac{3q^2}{20} \\ &= 240 + 240 = 480, \end{aligned} \tag{8.62}$$

que es precisamente nuestro resultado anterior. También podemos utilizar la ecuación 8.61 para demostrar la diferencia de los costos a corto y largo plazo. La tabla 8.1 muestra que para niveles de producción que no sean $q = 40$, los costos a corto plazo son superiores a los costos a largo plazo y que esta diferencia es proporcionalmente más grande a medida que nos alejamos más del nivel de producción donde $k = 80$ es el óptimo.

También es muy ilustrativo estudiar las diferencias entre los costos por unidad a corto y largo plazo en esta situación. En tal caso $CT = CMg = 12$. Podemos calcular los equivalentes a corto plazo (cuando $k = 80$) como

$$\begin{aligned} CPcp &= \frac{CTcp}{q} = \frac{240}{q} + \frac{3q}{20} \\ CMgcp &= \frac{\partial CTcp}{\partial q} = \frac{6q}{20}. \end{aligned} \tag{8.63}$$

Estos dos costos por unidad a corto plazo son igual a 12 cuando $q = 40$. No obstante, como muestra la tabla 8.2, los costos por unidad pueden diferir sustancialmente de esta cifra dependiendo del nivel de producción que establezca la empresa.

Nótese en particular que el costo marginal a corto plazo aumenta con rapidez a medida que la producción se expande más allá de $q = 40$ debido a los rendimientos decrecientes ante el factor variable (trabajo). Esta conclusión tiene un papel muy importante en la teoría de la determinación de precios a corto plazo.

Pregunta: Explique por qué un incremento de w incrementará el costo promedio a corto plazo y el costo marginal a corto plazo en este ejemplo, pero un incremento en v sólo afectará el costo promedio a corto plazo.

TABLA 8.1 **Diferencia entre el costo total a corto y largo plazo con $k = 80$**

q	$CT = 12q$	$CTcp = 240 + \frac{3q^2}{20}$
10	120	255
20	240	300
30	360	375
40	480	480
50	600	615
60	720	780
70	840	975
80	960	1200

TABLA 8.2 **Costos por unidad al corto y largo plazo cuando $k = 80$**

q	CP	CMg	$CPcp$	$CMgcp$
10	12	12	25.5	3
20	12	12	15	6
30	12	12	12.5	9
40	12	12	12	12
50	12	12	12.3	15
60	12	12	13	18
70	12	12	13.9	21
80	12	12	15	24

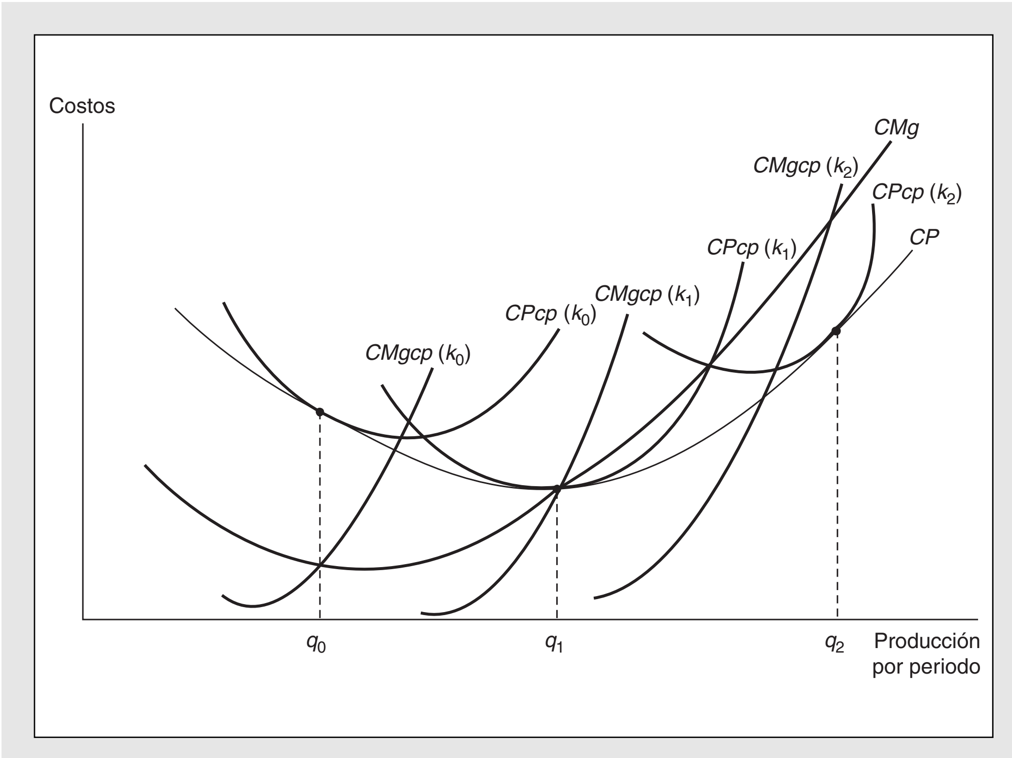
Gráficas de curvas de costos por unidad

Podemos utilizar las relaciones de la curva envolvente del costo total que presenta la figura 8.8 para demostrar las conexiones geométricas entre las curvas del costo promedio y el marginal a corto y a largo plazo. La figura 8.9 muestra estas relaciones para el caso de la curva cúbica del costo total. En la figura, el costo promedio a corto y a largo plazo es igual en el nivel de producción en el cual el factor capital (fijo) es adecuado. Por ejemplo, en q_1, $CPcp(k_1) = CP$ porque utilizamos k_1 para producir q_1 al costo mínimo. En el caso de movimientos que se alejan de q_1, el costo promedio a corto plazo será superior al costo promedio a largo plazo, reflejando así la naturaleza de minimización de costos de la curva del costo total a largo plazo.

Dado que el punto mínimo de la curva del costo promedio a largo plazo (*CP*) desempeña un papel esencial en la teoría de la determinación de precios a largo plazo, es importante advertir las diversas curvas que pasan por este punto en la figura 8.9. En primer término, como siempre ocurre con las curvas de costo promedio y la marginal, la curva del *CMg* pasa por el punto mínimo de la curva del *CP*. En q_1, el costo promedio y el marginal son iguales a largo plazo. Este nivel de producción q_1 está relacionado con determinado nivel del factor capital (por decir, k_1); es decir, la curva de costo promedio a corto plazo para este nivel del factor capital es tangente a la curva del *CP* en su punto mínimo. La curva del *CPcp* también alcanza su punto mínimo en el nivel de producción q_1. En el caso de movimientos que se alejan de q_1, la curva del *CP* es mucho más plana que la curva del *CPcp*, y esto refleja la mayor flexibilidad que tienen las empresas a largo plazo. Los costos a corto plazo aumentan con rapidez porque el factor del capital es fijo. En el largo plazo, este factor no es fijo, por lo cual las productividades marginales decre-

FIGURA 8.9 **Las curvas de costo promedio y de costo marginal para el caso de la curva cúbica**

Este conjunto de curvas se deriva de las curvas de costo total mostradas en la figura 8.8. Las curvas de *CP* y de *CMg* tienen las pendientes usuales como las curvas de corto plazo. En q_1, los costos promedio de largo plazo son mínimos. La configuración de curvas en este punto mínimo es bastante importante.



cientes no se presentan de forma tan abrupta. Por último, dado que la curva del *CPcp* alcanza su punto mínimo en q_1, la curva del costo marginal a corto plazo [*CMgcp*] también pasa por este punto. Por tanto, el punto mínimo de la curva del *CP* reúne los cuatro costos unitarios más importantes. En este punto

$$CP = CMg = CPcp = CMgcp. \tag{8.64}$$

Por ello, como se demostrará en el capítulo 10, el nivel de producción q_1 es un punto de equilibrio importante para una empresa competitiva a largo plazo.

RESUMEN

En este capítulo se ha analizado la relación entre el nivel de producción que fabrica una empresa y los precios de los factores necesarios para obtener ese nivel de producción. Las consecuentes curvas de costos seguramente le resultan conocidas porque son muy utilizadas en los cursos de introducción a la economía. Aquí hemos demostrado cómo estas curvas reflejan la función de producción subyacente de la empresa y su deseo de minimizar los costos. Al desarrollar curvas de costos a partir de estos fundamentos básicos, hemos podido ilustrar una serie de conclusiones importantes:

- Una empresa que desea minimizar los costos económicos de producir un nivel determinado de producción debería elegir la combinación de factores en la cual la tasa técnica de sustitución (*TTS*) es igual al cociente de los precios de alquiler de los factores.

- La aplicación reiterativa de este procedimiento de minimización permite obtener la senda de expansión de la empresa. Dado que la senda de expansión muestra cómo la cantidad de los factores que utiliza la empresa aumenta con el nivel de producción, también muestra la relación entre el nivel de producción y el costo total. La función del costo total $CT(q, v, w)$ resume esta relación y muestra los costos de producción en función del nivel de producción y de los precios de los factores.
- Podemos derivar las funciones del costo promedio ($CP = CT/q$) y del costo marginal ($CMg = \partial CT/\partial q$) de la empresa directamente de la función del costo total. Si la curva del costo total tiene una forma general cúbica, entonces las curvas del *CP* y del *CMg* tendrán forma de "U".
- Todas las curvas de costos se trazan partiendo del supuesto de que los precios de los factores se mantienen constantes. Cuando los precios de los factores cambian, las curvas de costos se desplazarán a nuevas posiciones. La magnitud de estos cambios estará determinada por la importancia global del factor cuyo precio ha cambiado y por la facilidad con la cual la empresa puede sustituir un factor por otro. Los avances tecnológicos también desplazan las curvas de costos.
- Podemos derivar las funciones de demanda de los factores a partir de la función del costo total de la empresa mediante una diferenciación parcial. Estas funciones de demanda de los factores dependerán de la cantidad de producción que la empresa decida realizar y, por tanto, se llaman funciones de demanda "condicionadas".
- La empresa tal vez no pueda variar la cantidad de algunos factores a corto plazo. En tal caso, sólo puede variar su nivel de producción alterando la cantidad que emplee de los factores variables. Al hacerlo, quizá tenga que utilizar combinaciones de factores que no son óptimas y que tienen un costo superior a las que elegiría si pudiera variar todos los factores.

PROBLEMAS

8.1

En un famoso artículo (J. Viner. "Cost Curves and Supply Curves", *Zeitschrift fur Nationalokonomie* 3, septiembre de 1931, pp. 23-46), Viner criticaba a su asistente porque no sabía dibujar una familia de curvas del *CPcp* cuyos puntos de tangencia con la curva del *CP* con forma de "U" también fueran los puntos mínimos en cada curva del *CPcp*. El asistente alegaba que era imposible dibujar esa gráfica. ¿A quién respaldaría usted en este debate?

8.2

Suponga que una empresa produce dos productos distintos, cuyas cantidades están representadas por q_1 y q_2. Por lo general, podemos representar el costo total de la empresa con $CT(q_1, q_2)$. Esta función muestra economías de alcance si $CT(q_1, 0) + CT(0, q_2) > CT(q_1, q_2)$ para todos los niveles de producción de los dos bienes.

a. Explique con palabras por qué esta formulación matemática implica que los costos serán más bajos en esta empresa que fabrica varios productos que en dos empresas que sólo fabrican uno de los productos por separado.

b. Si los dos productos fueran, de hecho, el mismo bien, entonces podríamos definir la producción total como $q = q_1 + q_2$. Suponga que, en este caso, el costo promedio ($= CT/q$) disminuye a medida que q aumenta. Demuestre que esta empresa también disfruta de economías de alcance con la definición presentada aquí.

8.3

Los catedráticos Smith y Jones van a escribir un libro nuevo de introducción a la economía. Como auténticos científicos, han determinado que la función de producción del libro es

$$q = S^{1/2}J^{1/2},$$

donde q = número de páginas del libro terminado, S = el número de horas-hombre empleadas por Smith y J = el número de horas empleadas por Jones.

Smith considera que su trabajo vale \$3 por hora. Ha invertido 900 horas en la preparación del primer borrador. Jones, cuyo trabajo se valora en \$12 por hora, revisará el borrador de Smith para terminar el libro.

a. ¿Cuántas horas tendrá que emplear Jones para producir un libro terminado que tendrá 150 páginas? ¿Uno que tendrá 300? ¿Uno que tendrá 450?

b. ¿Cuál es el costo marginal de la página número 150 del libro terminado? ¿De la número 300? ¿De la 450?

8.4

Supongamos que la función de producción de proporciones fijas de una empresa está determinada por

$$q = \text{mín}(5k, 10l),$$

y que las tasas de alquiler del capital y el trabajo están determinadas por $v = 1$, $w = 3$.

a. Calcule las curvas del costo promedio, el marginal y el total, a largo plazo, de la empresa.

b. Suponga que k está fijo en 10 a corto plazo. Calcule las curvas del costo promedio, el marginal y el total, a corto plazo, de la empresa. ¿Cuál es el costo marginal de la décima unidad? ¿De la número 50? ¿De la número 100?

8.5

Una empresa que produce bastones de hockey tiene una función de producción determinada por

$$q = 2\sqrt{k \cdot l}.$$

A corto plazo, la cantidad de equipo de capital de la empresa es fija en $k = 100$. La tasa de alquiler de k es $v = \$1$ y la tasa del salario de l es $w = \$4$.

a. Calcule la curva del costo total, a corto plazo, de la empresa. Calcule la curva del costo promedio a corto plazo.

b. ¿Cuál es la función del costo marginal, a corto plazo, de la empresa? ¿Cuáles son los *CTcp*, los *CPcp* y los *CMg* si la empresa produce 25 bastones? ¿Cincuenta bastones? ¿Cien bastones? ¿Doscientos bastones?

c. Dibuje las curvas de los *CPcp* y los *CMgcp* de la empresa. Indique los puntos calculados en el inciso anterior.

d. ¿La curva de los *CMgcp* dónde interseca la curva del *CPcp*? Explique por qué la curva de los *CMgcp* siempre intersecará la curva de los *CPcp* en su punto más bajo.

Supongamos ahora que el capital para fabricar bastones de hockey es fijo en $\bar{k}$ al corto plazo.

e. Calcule el costo total de la empresa como una función de q, w, v y $\bar{k}$.

f. Dados q, w y v, ¿la empresa cómo debe elegir el acervo de capital para minimizar el costo total?

g. Utilice sus resultados del inciso f para calcular el costo total, a largo plazo, de la fabricación de bastones de hockey.

h. Suponga que $w = \$4$, $v = \$1$, y dibuje la curva del costo total a largo plazo de la producción de bastones de hockey. Demuestre que es una envolvente de las curvas a corto plazo que calculó en el inciso a tomando los valores de $\bar{k}$, 100, 200 y 400.

8.6

Un empresario adquiere dos empresas que producen artefactos. Cada una fabrica productos idénticos y tiene una función de producción determinada por

$$q = \sqrt{k_i l_i} \quad i = 1, 2.$$

Sin embargo, cada empresa tiene una cantidad distinta de equipo de capital. En concreto, la empresa 1 tiene $k_1 = 25$, y la empresa 2 tiene $k_2 = 100$, las tasas de alquiler de k y l están determinadas por $w = v = \$1$.

a. Si el empresario quiere minimizar el costo total de su producción de artefactos a corto plazo, ¿cómo debe asignar la producción entre las dos empresas?

b. Dado que la producción ha sido asignada de forma óptima entre las dos empresas, calcule las curvas del costo marginal, el promedio y el total a corto plazo. ¿Cuál es el costo marginal del artefacto número 100? ¿Del artefacto número 125? ¿Del artefacto número 200?

c. ¿El empresario cómo debe asignar la producción de artefactos, a largo plazo, entre las dos empresas? Calcule las curvas del costo promedio, el marginal y el total de la producción a largo plazo.

d. ¿Cómo respondería al inciso anterior si las dos empresas mostraran rendimientos decrecientes a escala?

8.7

Podemos generalizar la función de producción CES para ponderar los factores. En el caso de los dos factores, la función es

$$q = f(k, l) = \left[(ak)^{\rho} + (bl)^{\rho}\right]^{\gamma/\rho}.$$

a. ¿Cuál es la función de costo total para una empresa que tiene esta función de producción? (*Pista:* por supuesto que usted puede resolver esto partiendo de cero. Sin embargo, tal vez sea más fácil utilizar los resultados del ejemplo 8.2 y razonar que el precio por una unidad del factor capital en esta función de producción es v/a y por una unidad del factor trabajo es w/b).

b. Si $\gamma = 1$ y $a + b = 1$, podemos demostrar que esta función de producción converge en la fórmula Cobb-Douglas $q = k^a l^b$ como $\rho \to 0$. ¿Cuál es la función del costo total para esta versión particular de la función CES?

c. La parte relativa del costo del trabajo en una función de producción con dos factores está determinada por wl/vk. Demuestre que esta parte es constante en el caso de la función Cobb-Douglas del inciso b. ¿Los parámetros a y b cómo afectan la parte relativa del trabajo?

d. Calcule la fracción relativa del costo del trabajo para la función general del CES introducida más arriba. ¿Los cambios en w/v, cómo cambian esa fracción? ¿La elasticidad de sustitución, σ, cómo determina la dirección de este efecto? ¿El tamaño de los parámetros a y b cómo la afectan?

8.8

Las elasticidades precio propio de la demanda dependiente de los factores capital y trabajo están definidas como

$$e_{l^c,w} = \frac{\partial l^c}{\partial w} \cdot \frac{w}{l^c} \qquad e_{k^c,v} = \frac{\partial k^c}{\partial v} \cdot \frac{v}{k^c}.$$

a. Calcule $e_{l^c,w}$ y $e_{k^c,v}$ para cada una de las funciones de costos que contiene el ejemplo 8.2.

b. Demuestre que, en general, $e_{l^c,w} + e_{l^c,v} = 0$.

c. Demuestre que las derivadas de precios cruzados de las funciones de demanda dependientes son iguales; es decir, demuestre que $\frac{\partial l^c}{\partial v} = \frac{\partial k^c}{\partial w}$. Utilice este hecho para demostrar que que $s_l e_{l^c,v} = s_k e_{k^c,w}$ donde s_l, s_k son, respectivamente, la parte del trabajo dentro del costo total (wl/CT) y del capital dentro del costo total (vk/CT).

d. Utilice los resultados de los incisos b y c para demostrar que $s_l e_{l^c,w} + s_k e_{k^c,w} = 0$.

e. Interprete las distintas relaciones de elasticidad con palabras y explique su importancia global para la teoría general de la demanda de factores de producción.

8.9

Supongamos que la función de costo total de una empresa está determinada por

$$CT = qw^{2/3}v^{1/3}.$$

a. Utilice el lema de Shephard para calcular las funciones de demanda con producción constante de los factores l y k.

b. Utilice los resultados del apartado anterior para calcular la función de producción subyacente de q.

8.10

Supongamos que la función de costo total de una empresa está determinada por

$$CT = q(2 + v\sqrt{vw} + w).$$

a. Utilice el lema de Shephard para calcular la función de demanda con producción constante del factor, k y l.

b. Utilice los resultados del inciso anterior para obtener la función de producción subyacente de q.

c. Compruebe el resultado utilizando los resultados del ejemplo 8.2 para demostrar que la función de costos CES, cuando $\sigma = 0.5$, $\rho = -1$ genera esta función de costo total.

LECTURAS RECOMENDADAS

Allen, R. G. D. *Mathematical Analysis for Economists*, New York: St. Martin's Press, Nueva York, 1938. Diversas páginas; véase el índice.

Análisis matemático muy completo de las posibilidades de sustitución y las funciones de costos. La notación un tanto difícil.

Ferguson, C. E. *The Neoclassical Theory of Production and Distribution*, Cambridge University Press, Cambridge, 1969, Cap. 6.

Buen planteamiento de las curvas de costos, especialmente fuerte en el análisis gráfico.

Fuss, M. y D. McFadden. *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

Tratamiento bastante completo y difícil de la relación dual entre las funciones de producción y costos. Breve explicación de cuestiones empíricas.

Knight, H. H. "Cost of Production and Price over Long and Short Periods", *Journal of Political Economics, 29*, abril de 1921, pp. 304-335.

Buen tratamiento de la diferencia entre el corto y el largo plazo.

Silberberg, E. y W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis,* 3a. ed., Irwin/McGraw-Hill, Boston, 2001.

Los capítulos 7, 8 y 9 contienen abundante material sobre las funciones de costos. Recomendamos en especial la explicación que presentan los autores de los "efectos de reciprocidad", así como su tratamiento de la diferencia del corto y largo plazo como la aplicación del principio de Le Chatelier tomado del campo de la física.

Sydsaeter, K., A. Strom y P. Berck. *Economists' Mathematical Manual,* 3a. ed., Springer-Verlag, Berlín, 2000.

El capítulo 25 presenta un resumen sucinto de los conceptos matemáticos de este capítulo. Un buen resumen de muchas funciones de costos de los factores de producción.

AMPLIACIONES

La función de costo translog

Las dos funciones de costos que estudiamos en el capítulo 8 (la Cobb-Douglas y la función CES) son muy restrictivas por cuanto a las posibilidades de sustitución que permiten. La Cobb-Douglas asume, implícitamente, que $\sigma = 1$ entre todos los factores de producción. La función CES permite que σ tome un valor cualquiera, pero requiere que la elasticidad de sustitución sea igual entre dos factores. Dado que los economistas empíricos preferirían dejar que los datos mostraran cuáles son las verdaderas posibilidades de sustitución entre los factores, han tratado de encontrar fórmulas más flexibles para las funciones. Una de estas fórmulas que goza de gran popularidad es la función de costos translog, que popularizaran Fuss y McFadden (1978) por primera vez. En esta ampliación se analizará dicha función.

A8.1 La función translog con dos factores

En el ejemplo 8.2 calculamos la función de costos Cobb-Douglas en el caso de dos factores de producción como

$$C(q, v, w) = Bq^{1/\alpha+\beta}v^{\alpha/\alpha+\beta}w^{\beta/\alpha+\beta}.$$

Si tomamos el logaritmo natural de lo anterior se obtendrá

$$\begin{aligned}\ln C(q, v, w) = \ln B &+ [1/(\alpha + \beta)]\ln q \\ &+ [\alpha/(\alpha + \beta)] \ln v \\ &+ [\beta/(\alpha + \beta)] \ln w. \qquad \text{(i)}\end{aligned}$$

Es decir, el logaritmo del total de costos es lineal en los logaritmos de los precios de la producción y los factores. La función translog generaliza lo anterior y permite los términos de segundo orden en los precios de los factores:

$$\begin{aligned}\ln C(q, v, w) = \ln q &+ \beta_0 + \beta_1 \ln v + \beta_2 \ln w \\ &+ \beta_3 (\ln v)^2 + \beta_4 (\ln w)^2 \\ &+ \beta_5 \ln v \ln w, \qquad \text{(ii)}\end{aligned}$$

donde esta función implícitamente supone rendimientos a escala constantes (porque el coeficiente de $\ln q$ es 1.0), pero no siempre es así.

Algunas de las propiedades de esta función son:

- Para que esta función sea homogénea de grado uno en los precios de los factores entonces $\beta_1 + \beta_2 = 1$ y $\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 0$.
- Esta función incluye la Cobb-Douglas y el caso especial donde $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. Por tanto, podemos utilizar la función para demostrar estadísticamente si la Cobb-Douglas es correcta o no.
- Podemos utilizar el lema de Shephard para calcular las funciones de demanda dependiente de los factores para el traslog como

$$\begin{aligned}k^c &= \frac{\partial C}{\partial v} = \frac{\partial C}{\partial \ln C} \cdot \frac{\partial \ln C}{\partial \ln v} \cdot \frac{\partial \ln v}{\partial v} \\ &= \frac{C}{v} \cdot [\beta_1 + 2\beta_3 \ln v + \beta_5 \ln w] \\ l^c &= \frac{\partial C}{\partial w} = \frac{\partial C}{\partial \ln C} \cdot \frac{\partial \ln C}{\partial \ln w} \cdot \frac{\partial \ln w}{\partial w} \qquad \text{(iii)} \\ &= \frac{C}{w} \cdot [\beta_2 + 2\beta_4 \ln w + \beta_5 \ln v],\end{aligned}$$

y las participaciones de factores están determinadas por

$$\begin{aligned}s_k &= \frac{vk}{C} = \beta_1 + 2\beta_3 \ln v + \beta_5 \ln w \\ s_l &= \frac{wl}{C} = \beta_2 + 2\beta_4 \ln w + \beta_5 \ln v.\end{aligned} \qquad \text{(iv)}$$

Esto demuestra que, al contrario de lo que ocurre en el caso Cobb-Douglas, las participaciones de los factores de producción no son constantes, sino que más bien dependen de los precios de éstos. Dado que las ecuaciones iv son especialmente sencillas, ésta es la forma que se suele utilizar para calcular el translog econométricamente.

- La elasticidad parcial de sustitución entre capital y trabajo en el caso de esta función está determinada por $s_{k,l} = (\beta_5 + s_k s_l)/s_k s_l$. Por tanto, este parámetro también está determinado por los datos. Nótese que el componente fundamental del parámetro es el coeficiente β_5 el cual representa el término de interacción en v y w. Si el coeficiente es igual a cero, se obtendrá el resultado Cobb-Douglas $s_{k,l} = 1$.

A8.2 La función de costos translog con muchos factores

Casi todos los estudios empíricos incluyen más de dos factores. Es muy fácil generalizar la función de costos translog a estas situaciones. Si suponemos que hay n factores, cada uno de ellos con un precio de w_i $(i = 1,n)$, entonces la función será

$$C(q, w_1 \cdots w_n) = \ln q + \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln w_i + 0.5 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \ln w_i \ln w_j, \quad \text{(v)}$$

donde, de nueva cuenta, hemos supuesto rendimientos a escala constantes. Esta función requiere que $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ de modo que cada término en el cual $i \neq j$ aparece dos veces en la suma doble final (lo cual explica la presencia del 0.5 en la expresión). Para que esta función sea homogénea de grado cero en los precios de los factores, debe ocurrir que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ y que $\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} = 0$. Dos propiedades muy útiles de esta función son:

- Las porciones de los factores adoptan la forma lineal:

$$s_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \ln w_j. \quad \text{(vi)}$$

  De nueva cuenta, esto explica por qué el translog generalmente es calculado en forma de participación. En ocasiones también se suma un término en $\ln q$ a las ecuaciones de las porciones para permitir los efectos de la escala en las porciones (véase Sydsaeter, Strom y Bercke, 2000).

- La elasticidad parcial de sustitución entre dos factores en la función translog está determinada por

$$s_{i,j} = (\beta_{ij} + s_i s_j)/s_i s_j. \quad \text{(vii)}$$

  Por tanto, de nueva cuenta podemos juzgar la posibilidad de sustitución directamente de los parámetros calculados para la función translog.

A8.3 Algunas aplicaciones

La función de costos translog se ha convertido en una opción importante para los estudios empíricos de la producción. Dos factores explican su popularidad. En primer término, la función permite una representación bastante completa de los patrones de sustitución de los factores; es decir, no requiere que los datos se ciñan a un patrón previamente especificado. En segundo, el formato de la función incorpora los precios de los factores de forma muy flexible, de modo que podamos estar razonablemente seguros de que hemos controlado dichos precios en el análisis de regresión. Cuando este control está garantizado, el cálculo de los otros aspectos de la función de costos (como los rendimientos a escala) será mucho más confiable.

Un ejemplo del uso de la función translog para estudiar la sustitución de factores es el estudio de Westbrook y Buckley (1990) sobre las respuestas de los transportistas ante el cambio de los precios relativos por trasladar mercancía que se derivó de la desregulación de la industria ferroviaria y la camionera de Estados Unidos. Los autores analizan específicamente los embarques de frutos y vegetales procedentes de los estados de Chicago y Nueva York, en el oeste del país. Encuentran elasticidades de sustitución relativamente elevadas entre las opciones de los embarques y, por tanto, llegan a la conclusión de que la desregulación tuvo beneficios sustantivos para el bienestar. Doucouliagos y Hone (2000) producen un análisis similar de la desregulación de los precios de los productos lácteos en Australia. Demuestran que los cambios de precio de la leche sin procesar provocaron que las empresas que la procesaban cambiaran sustancialmente los factores que utilizaban. Asimismo, demuestran que la industria adoptó muchas tecnologías nuevas para responder al cambio de precios.

Un estudio muy interesante que utiliza el translog principalmente para juzgar los rendimientos a escala es el análisis de Latzko (1999) tocante a la industria estadounidense de los fondos mutualistas. Él encuentra una elasticidad del costo total, con relación a los activos totales administrados por el fondo, sustancialmente menor a uno en todos los fondos, menos en los más grandes (los que tienen activos por más de 4 mil millones de dólares). Por tanto, el autor llega a la conclusión de que la administración del dinero muestra rendimientos a escala considerables. Una serie de estudios más que utilizan el translog para calcular las economías de escala se concentran en los servicios municipales. Por ejemplo, García y Thomas (2001) analizan el sistema de suministro de agua en comunidades locales francesas. Llegan a la conclusión de que existen importantes economías de escala en la operación de estos sistemas y de que tendría sentido fusionar algunos de ellos. Yatchew (2000) llega a una conclusión similar respecto a la distribución de electricidad a comunidades pequeñas de Ontario, Canadá. Él encuentra que existen economías de escala en los sistemas de distribución de electricidad que llegan hasta unos 20,000 clientes. De nueva cuenta, se podrían obtener eficiencias fusionando sistemas que son mucho más pequeños de lo antes mencionado.

Referencias

Doucouliagos, H. y P. Hone. "Deregulation and Subequilibrium in the Australian Dairy Processing Industry", *Economic Record*, junio de 2000, pp. 152-162.

Fuss, M. y D. McFadden, eds. *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, North Holland, Amsterdam, 1978.

Garcia, S. y A. Thomas. "The Structure of Municipal Water Supply Costs: Application to a Panel of French Local Communities", *Journal of Productivity Analysis*, julio de 2001, pp. 5-20.

Latzko, D. "Economies of Scale in Mutual Fund Administration", *Journal of Financial Research*, otoño de 1999, pp. 331-330.

Sato, R. y T. Koizumi. "On Elasticities of Substitution and Complementarity", *Oxford Economic Papers*, marzo de 1973, pp. 44-50.

Sydsaeter, K., A. Strom y P. Berck. *Economists' Mathematical Manual,* 3a. ed., Springer-Verlag, Berlín, 2000.

Westbrook, M. D. y P. A. Buckley. "Flexible Functional Forms and Regularity: Assessing the Competitive Relationship Between Truck and Rail Transportation", *Review of Economics and Statistics*, noviembre de 1990, pp. 623–630.

Yatchew, A. "Scale Economies in Electricity Distribution: A Semiparametric Analysis", *Journal of Applied Econometrics*, marzo-abril de 2000, pp. 187-210.

Capítulo 9

MAXIMIZACIÓN DE LAS GANANCIAS

En el capítulo 8 analizamos la forma mediante la cual las empresas minimizan los costos en un nivel de producción que elijan. En este capítulo nos centraremos en la forma mediante la cual las empresas que maximizan las ganancias eligen su nivel de producción. Sin embargo, antes de pasar a analizar esta decisión es conveniente presentar una breve explicación de la naturaleza de las empresas y del análisis de sus elecciones.

Naturaleza y comportamiento de las empresas

Como señalábamos al inicio de nuestro análisis de la producción, una empresa es una agrupación de individuos que se han organizado con el fin de transformar factores de producción en bienes y servicios. Los distintos individuos aportarán diferentes tipos de factores, como las habilidades de los trabajadores y diversos equipos de capital, con la expectativa de recibir algún tipo de recompensa por hacerlo.

Relaciones contractuales dentro de las empresas

La naturaleza de la relación contractual de la empresa con los proveedores de los factores puede ser muy compleja. Cada proveedor acepta dedicar su factor a actividades productivas de acuerdo con una serie de entendidos sobre cómo será utilizado y del beneficio que espera obtener de su utilización. En algunos casos, estos contratos son *explícitos*. Los trabajadores suelen negociar contratos que especifican, con detalle considerable, cuántas horas trabajarán, qué reglas laborales seguirán y qué salario recibirán. Por otra parte, los dueños del capital invierten en una empresa de acuerdo con una serie de principios jurídicos explícitos, los cuales detallan la forma en que la empresa puede emplear el capital, la retribución que el dueño espera recibir y si, tras haber cubierto todos los costos económicos, éste absorbe determinadas ganancias o pérdidas. Es evidente que, además de estos convenios formales, muchos de los acuerdos entre la empresa y sus proveedores de factores de producción son *implícitos*; es decir, las relaciones entre directivos y trabajadores siguen ciertos procedimientos que determinan quién tiene autoridad de hacer qué a la hora de tomar las decisiones relativas a la producción. En el caso de los trabajadores existen numerosos entendidos implícitos respecto a cómo compartirán las tareas y, por otro lado, los dueños del capital pueden delegar gran parte de su autoridad a directivos y trabajadores para que ellos tomen estas decisiones en su nombre (los accionistas de General Motors, por ejemplo, nunca participan en la decisión de cómo se utilizará el equipo de la línea de ensamble, a pesar de que, técnicamente, ellos son los dueños de este equipo). Todas estas relaciones explícitas e implícitas varían ante la presencia de experiencias y acontecimientos ajenos a la empresa. Así como un equipo de fútbol probará jugadas nuevas y estrategias defensivas, así también las empresas modificarán la naturaleza de sus organizaciones internas para obtener mejores resultados a largo plazo.[1]

Modelos del comportamiento de la empresa

Algunos economistas han adoptado un enfoque "conductual" para estudiar las decisiones de las empresas, pero la mayor parte de ellos ha encontrado que este planteamiento es demasiado complicado para efectos generales. En su lugar, han adoptado un enfoque "holístico", el cual considera que, para la toma de decisiones, la empresa es una sola unidad y, por tanto, evita las complejas cuestiones del comportamiento de los proveedores de factores en sus relaciones. Ante este planteamiento, normalmente es conveniente suponer que un solo director dictatorial toma las decisiones, quien racionalmente persigue una sola meta y que ésta suele ser maximizar las ganancias. Éste es el enfoque que adoptamos aquí. En el capítulo 19 se analizarán algunas de las cuestiones relativas a la información que surgen de los contratos internos de las empresas.

Maximización de las ganancias

La mayor parte de los modelos de la oferta suponen que la empresa y su director persiguen la meta de obtener la mayor cantidad de ganancias económicas posible. Por tanto, se utilizará la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Empresa que maximiza las ganancias. Una *empresa maximizadora de ganancias* elige sus factores y sus productos con el único fin de obtener la cantidad de ganancias máxima posible. Es decir, la empresa tratará de conseguir que la diferencia entre sus ingresos totales y sus costos totales sea lo más grande posible.

Este supuesto (que las empresas buscan obtener la cantidad máxima posible de ganancias económicas) tiene un largo historial en la literatura económica y existen muchas razones para recomendarlo. Es un supuesto plausible porque, de hecho, los dueños de las empresas buscarían que sus activos adquieran el mayor valor posible y porque los mercados competitivos podrían castigar a las empresas que no maximicen las ganancias. Este supuesto también ofrece resultados teóricos interesantes que, de alguna manera, explican las decisiones que toman las empresas.

Maximización de las ganancias y marginalismo

Si las empresas, en sentido estricto, buscan maximizar las ganancias, entonces tomarán decisiones de forma "marginal". El empresario, conceptualmente, experimentará ajustes de aquellas variables que puede controlar, hasta llegar al punto en el que sería imposible aumentar más las ganancias. Esto implica, por ejemplo, que observe las ganancias adicionales o "marginales" que puede obtener si produce una unidad adicional de producto o en las ganancias adicionales que obtendría si contratara a un trabajador más. Mientras estas ganancias crecientes sean positivas, producirá la unidad adicional o contratará al trabajador adicional. Cuando las ganancias adicionales de una actividad son nulas, entonces el empresario habrá llevado esa actividad tan lejos como es posible y, por ende, no sería rentable llegar más allá. En este capítulo exploraremos las consecuencias de este supuesto empleando operaciones matemáticas cada vez más complejas.

Elección de la producción

Primero analizamos un tema que le debe resultar bien conocido; es decir, qué nivel de producción elegirá una empresa a efecto de obtener el máximo de ganancias. Una empresa vende determinado nivel de producción, q, a un precio de mercado de p por unidad. Los ingresos totales (IT) están determinados por

$$IT(q) = p(q) \cdot q, \tag{9.1}$$

donde hemos dado cabida a la posibilidad de que el precio de venta que recibe la empresa se pueda ver afectado por la cantidad que venda. Al producir q, la empresa contrae determinados costos *económicos* y, como en el capítulo 8, se representarán mediante $CT(q)$.

---

[1]Encontrará la primera formulación de la teoría de la empresa, a partir del concepto de las relaciones contractuales, en R. H. Coase. "The Nature of the Firm", *Economica*, noviembre de 1937, pp. 386-405.

Se dice que la diferencia entre los ingresos y los costos son las *ganancias económicas* (π). Dado que tanto los ingresos como los costos dependerán de la cantidad producida, las ganancias económicas también dependerán de dicha cantidad. Es decir,

$$\pi(q) = p(q) \cdot q - CT(q) = IT(q) - CT(q). \tag{9.2}$$

Obtenemos la condición necesaria para elegir el valor de q que maximiza las ganancias haciendo que la derivada de la ecuación 9.2 respecto a q sea igual a 0:[2]

$$\frac{d\pi}{dq} = \pi'(q) = \frac{dIT}{dq} - \frac{dCT}{dq} = 0, \tag{9.3}$$

de modo que la condición de primer orden para el máximo es que

$$\frac{dIT}{dq} = \frac{dCT}{dq}. \tag{9.4}$$

Ésta es una simple formulación matemática de la regla que dice que el ingreso marginal es igual al costo marginal y que se suele estudiar en los cursos de introducción a la economía. En consecuencia, tenemos el siguiente:

PRINCIPIO DE OPTIMIZACIÓN

Maximización de las ganancias. La empresa, para maximizar las ganancias económicas, debe elegir el nivel de producción en el cual el ingreso marginal es igual al costo marginal. Es decir,

$$IMg = \frac{dIT}{dq} = \frac{dCT}{dq} = CMg. \tag{9.5}$$

Condiciones de segundo orden

La ecuación 9.4 o la 9.5 sólo es una condición necesaria para maximizar las ganancias. Para que sea suficiente, también es necesario que

$$\left.\frac{d^2\pi}{dq^2}\right|_{q\,=\,q^*} = \left.\frac{d\pi'(q)}{dq}\right|_{q\,=\,q^*} < 0, \tag{9.6}$$

es decir que la ganancia "marginal" debe ser decreciente en el nivel óptimo de q. Cuando q es inferior a q^* (el nivel óptimo de producción), las ganancias serán crecientes [$\pi'(q) > 0$]; y cuando q es superior a q^*, las ganancias serán decrecientes [$\pi'(q) < 0$]. Sólo si se cumple esta condición se obtendrá un verdadero máximo.

Análisis gráfico

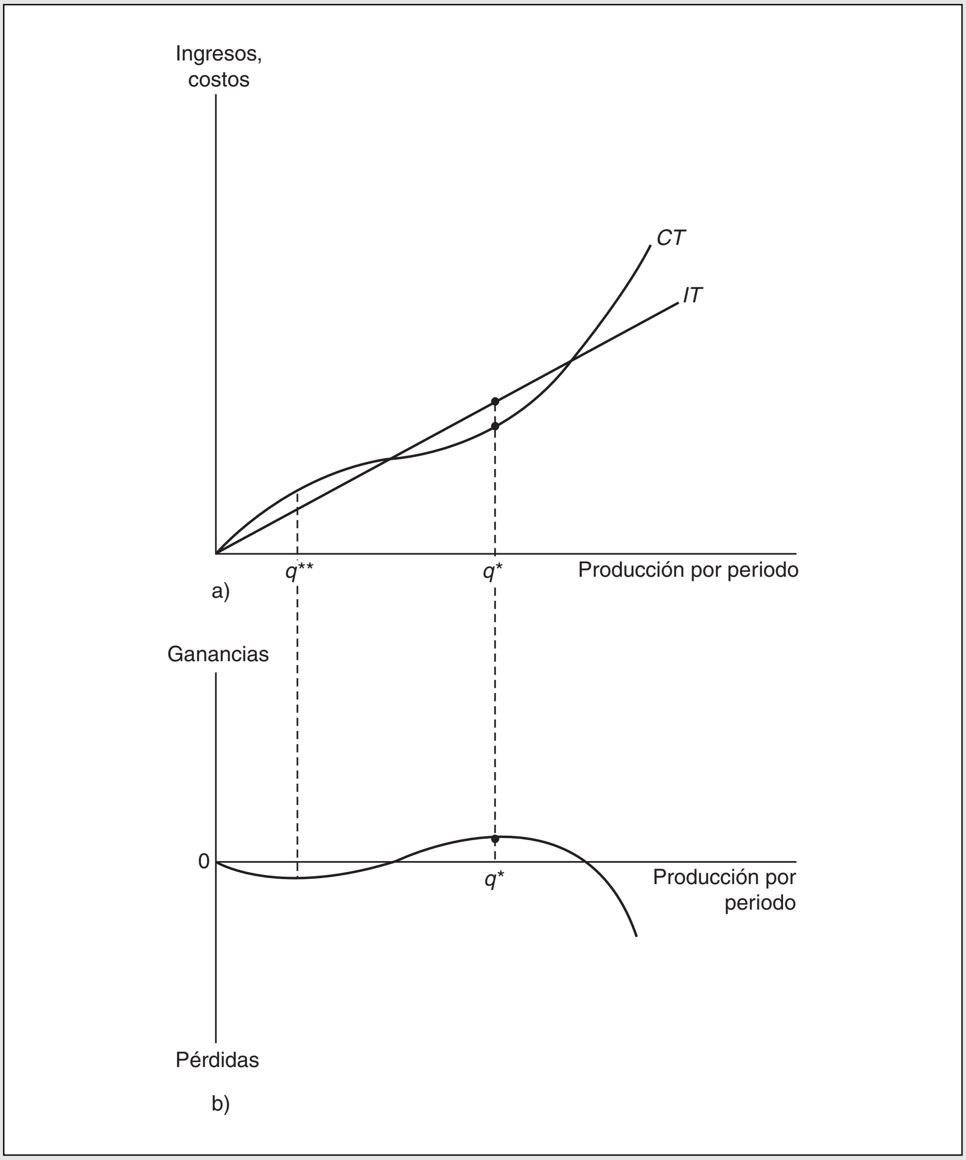
La figura 9.1 ilustra estas relaciones y, en ella, la sección superior describe las funciones típicas de costos e ingresos. En el caso de niveles bajos de producción, los costos son superiores a los ingresos y, por tanto, las ganancias económicas son negativas. En los niveles medios de producción, los ingresos son superiores a los costos y esto significa que las ganancias son positivas. Por último, en los niveles elevados de producción, los costos aumentan ostensiblemente y, de nuevo, son superiores a los ingresos. La figura 9.1b muestra la distancia vertical entre la curva de ingresos y la de costos (es decir, las ganancias). En ella, las ganancias llegan al máximo en q^*. En este nivel de producción también ocurre que la pendiente de la curva de ingresos (el ingreso marginal) es igual a la pendiente de la curva de costos (el costo marginal). La figura deja en claro que las condiciones suficientes para alcanzar el máximo también quedan satisfechas en este punto, porque las ganancias aumentan a la izquierda de q^* y disminuyen a la derecha de q^*. Por tanto, el nivel de producción q^* es un auténtico máximo de ganancias. No ocurre lo mismo con el nivel de producción q^{**}. Aun cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal en este nivel de producción, en ese punto las ganancias, de hecho, están en el mínimo.

---

[2]Nótese que se trata de un problema de maximización sin restricciones; es decir, las restricciones del problema están implícitas en las funciones de costos e ingresos. Concretamente, la curva de demanda de los productos de la empresa determina la función de ingresos y la función de producción de la empresa (con los precios de los factores) determina sus costos.

FIGURA 9.1 **El ingreso marginal debe ser igual al costo marginal para maximizar las ganancias**

Dado que las ganancias se definen como los ingresos (*IT*) menos los costos (*CT*), es evidente que las ganancias alcanzarán un máximo cuando la pendiente de la función de ingresos (el ingreso marginal) es igual a la pendiente de la función de costos (el costo marginal). Esta igualdad sólo es una condición necesaria para alcanzar el máximo, como podemos ver si comparamos los puntos q^* (un verdadero *máximo*) y q^{**} (un verdadero *mínimo*), en los cuales el ingreso marginal es igual al costo marginal.



Ingreso marginal

En el terreno de la producción, la decisión importante para la empresa que maximiza las ganancias se refiere al ingreso que obtiene de la venta de una unidad más de producto. Si la empresa puede vender todo lo que quiera, sin que ello tenga efecto alguno en el precio de mercado, entonces este precio será, de hecho, el ingreso adicional que obtendrá por la venta de una unidad adicional. Dicho de otra forma, si las decisiones de la empresa relativas a la producción no afectan al precio de mercado, el ingreso marginal será igual al precio al que vende esa unidad.

Sin embargo, una empresa no siempre podrá vender todo lo que quiere al precio que prevalece en el mercado. Si la curva de demanda de sus productos tiene pendiente negativa, sólo podrá vender más producción si reduce el precio del bien. En este caso, el ingreso que obtiene de la venta de una unidad más será inferior al precio de dicha unidad porque, para conseguir que los consumidores adquieran la unidad adicional, tendrá que reducir el precio de todas las demás unidades. Es muy fácil demostrar este resultado. Al igual que antes, el ingreso total (IT) es producto de la cantidad vendida (q) multiplicada por el precio al que se ha vendido (p), que también puede depender de q. Por tanto, se define el ingreso marginal (IMg) como la variación del IT debida a una variación de q:

DEFINICIÓN

Ingreso marginal.

$$\text{ingreso marginal} = IMg(q) = \frac{dIT}{dq} = \frac{d[p(q) \cdot q]}{dq} = p + q \cdot \frac{dp}{dq} \qquad (9.7)$$

Nótese que los ingresos marginales son una función de la producción. Por lo general, el IMg será distinto para distintos niveles de q. En la ecuación 9.7 es fácil ver que si el precio no cambia cuando aumenta la cantidad ($dp/dq = 0$), el ingreso marginal será igual al precio. En este caso, se dice que la empresa es *tomadora de precios*, porque sus decisiones no afectan el precio que obtiene. Por otra parte, si el precio disminuye a medida que la cantidad aumenta ($dp/dq < 0$), entonces el ingreso marginal será inferior al precio. Antes de tomar una decisión sobre la producción óptima, un empresario que maximiza las ganancias debe saber qué tanto los incrementos de la producción afectarán el precio que recibirá. Si los aumentos de q hacen que el precio de mercado disminuya, deberá tenerlo en cuenta.

Ingreso marginal a partir de una función de demanda lineal

Supongamos que, durante un periodo, la producción diaria (q) de sandwiches de una cafetería tiene una curva de demanda lineal de forma

$$q = 100 - 10p. \qquad (9.8)$$

Si se resuelve para conocer el precio que recibe la cafetería, se obtendrá

$$p = -q/10 + 10, \qquad (9.9)$$

y los ingresos totales (en función de q) están dados por

$$IT = pq = -q^2/10 + 10q. \qquad (9.10)$$

La función del ingreso marginal de la cafetería es

$$IMg = \frac{dIT}{dq} = \frac{-q}{5} + 10, \qquad (9.11)$$

y, en este caso, $IMg < p$ para todos los valores de q. Si, por ejemplo, la empresa produce 40 sandwiches por día, la ecuación 9.9 demuestra que recibirá un precio de 6 dólares por sandwich. Sin embargo, la ecuación 9.11 demuestra que, para este nivel de producción, el IMg sólo es de 2 dólares. Si la empresa produce 40 sandwiches por día, sus ingresos totales serán 240 dólares (= \$6 × 40), pero si produce 39 sandwiches, sus ingresos totales serían 238 dólares (= \$6.1 × 39) porque el precio aumentará ligeramente cuando produce menos. Por tanto, el ingreso marginal de la unidad 40 vendida es considerablemente inferior a su precio. En efecto, en $q = 50$, el ingreso marginal es cero (los ingresos totales llegan al máximo en \$250 = \$5 × 50), y toda expansión posterior de la producción diaria de sandwiches derivará, de hecho, en una reducción de los ingresos totales que obtiene la empresa.

Para poder determinar el nivel de producción de sandwiches que maximiza las ganancias debemos conocer los costos de la empresa. Si ésta puede producir los sandwiches de forma constante y a un costo marginal de 4 dólares, entonces la ecuación 9.11 demuestra que $IMg = CMg$ para una producción diaria de 30 sandwiches. Con este nivel de producción, la cafetería venderá cada sandwich en 7 dólares y sus ganancias ascenderán a 90 dólares [= (\$7 – \$4) · 30]. Si bien, en este punto, el precio excede al costo medio y al marginal por un buen margen, la empresa no estará interesada en aumentar la producción. Por ejemplo, con $q = 35$, el precio bajaría a 6.50 dólares y las ganancias a 87.50 dólares [= (\$6.50 – \$4.00) · 35]. El ingreso marginal, y no el precio, es el principal determinante del comportamiento que maximiza las ganancias.

Pregunta: ¿Un incremento del costo marginal de la producción de sandwiches a 5 dólares cómo afectaría la decisión de producción de esta empresa? ¿Cómo afectaría las ganancias de la empresa?

Ingreso marginal y elasticidad

El concepto de ingreso marginal está directamente relacionado con la elasticidad de la curva de demanda de los productos de la empresa. Recuerde que se definió la elasticidad de la demanda ($e_{q,p}$) como el cambio porcentual de la cantidad que se deriva de una variación del precio de un 1 por ciento:

$$e_{q,p} = \frac{dq/q}{dp/p} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}.$$

Ahora, podemos combinar esta definición con la ecuación 9.7 y se obtendrá

$$IMg = p + \frac{qdp}{dq} = p\left(1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq}\right) = p\left(1 + \frac{1}{e_{q,p}}\right). \qquad (9.12)$$

Si la curva de demanda de los productos de la empresa tiene pendiente negativa, entonces, $e_{q,p} < 0$ y el ingreso marginal será inferior al precio, como ya hemos demostrado. Si la demanda es elástica ($e_{q,p} < -1$), entonces el ingreso marginal será positivo. Si la demanda es elástica, la venta de una unidad más no afectará al precio "demasiado" y, por tanto, la empresa obtendrá más ingresos con la venta. De hecho, si la demanda del producto de la empresa es infinitamente elástica ($e_{q,p} = -\infty$), entonces el ingreso marginal será igual al precio. En este caso, la empresa es tomadora de precios. Sin embargo, si la demanda es inelástica ($e_{q,p} > -1$), el ingreso marginal será negativo. La empresa sólo podrá obtener incrementos de q mediante "grandes" decrementos en el precio de mercado y estos decrementos provocarán que, de hecho, los ingresos totales disminuyan.

La tabla 9.1 resume la relación entre el ingreso marginal y la elasticidad.

TABLA 9.1 **Relación entre la elasticidad y el ingreso marginal**

$e_{q,p} < -1$	$IMg > 0$
$e_{q,p} = -1$	$IMg = 0$
$e_{q,p} > -1$	$IMg < 0$

La regla del inverso de la elasticidad

Si partimos del supuesto que la empresa quiere maximizar las ganancias, podremos ampliar el análisis para reflejar la relación entre el precio y el costo marginal. Si $IMg = CMg$ tendremos que

$$CMg = p\left(1 + \frac{1}{e_{q,p}}\right)$$

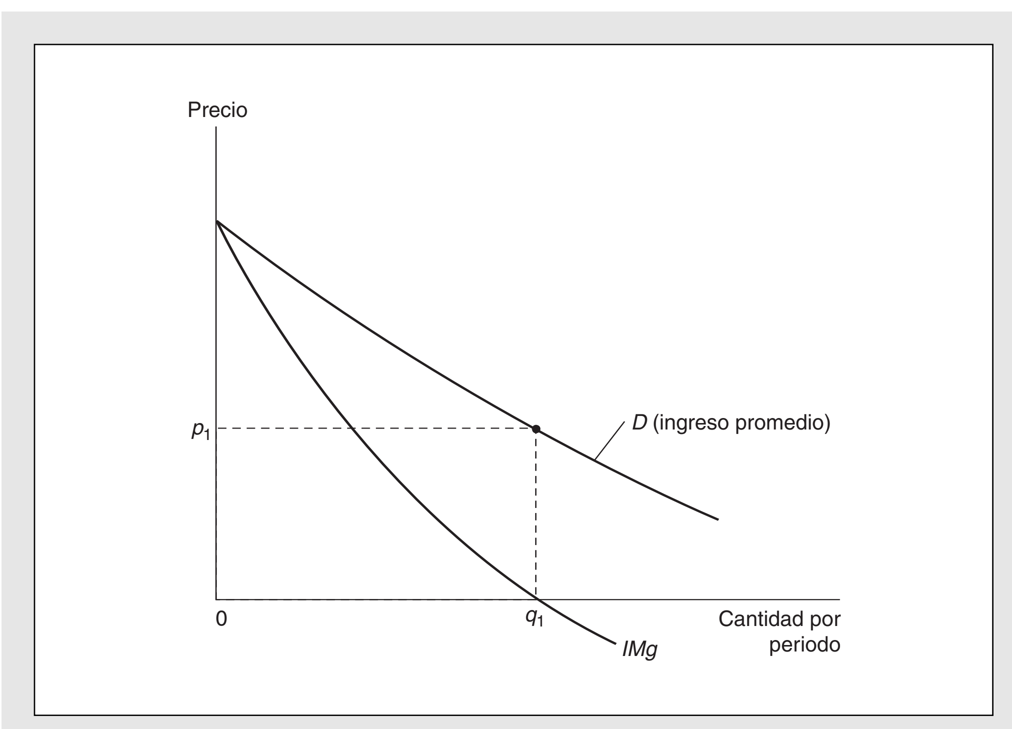
o

$$\frac{p - CMg}{p} = -\frac{1}{e_{q,p}}. \quad (9.13)$$

Es decir, la brecha entre el precio y el costo marginal disminuirá a medida que la curva de demanda del producto de la empresa se torne más elástica. En efecto, en el caso de una empresa tomadora de precios, $e_{q,p} = -\infty$ por lo cual $p = IMg = CMg$ y desaparece la brecha. Dado que, como veremos en capítulos posteriores, la brecha entre el precio y el costo marginal es una medida importante de la asignación ineficiente de los recursos, la ecuación 9.13 se utiliza con mucha frecuencia en los estudios empíricos de la organización del mercado. Nótese también que esta ecuación sólo tiene sentido si la curva de demanda del producto de la empresa es elástica ($e_{q,p} < -1$). Si $e_{q,p}$ fuera mayor que -1, la ecuación 9.13 implicaría un costo marginal negativo, cosa que, evidentemente, es imposible. Por tanto, las empresas que maximizan las ganancias optarán por operar únicamente en los puntos de las curvas de demanda de sus productos en los cuales la demanda es elástica. Por supuesto que cuando hay muchas empresas que fabrican un

FIGURA 9.2 **Curva de demanda del mercado y su correspondiente curva de ingreso marginal**

Dado que la curva de demanda tiene pendiente negativa, la curva del ingreso marginal estará por debajo de la curva de demanda ("ingreso promedio"). En el caso de niveles de producción superiores a q_1, el *IMg* es negativo. En q_1, los ingresos totales ($p_1 \times q_1$) están en el punto máximo posible; es decir, más allá de éste, los incrementos adicionales de q hacen que, de hecho, los ingresos totales disminuyan debido a las reducciones del precio.



solo bien, la curva de demanda del producto de una empresa puede ser bastante elástica, a pesar de que la curva de demanda de todo el mercado sea relativamente inelástica.

Curva del ingreso marginal

Toda curva de demanda tiene una correspondiente curva de ingreso marginal. Si, como suponemos en ocasiones, la empresa debe vender toda su producción a un precio, entonces resulta conveniente pensar que la curva de demanda del producto de la empresa es una *curva de ingreso promedio*. Es decir, la curva de demanda muestra el ingreso por unidad (en otras palabras, el precio) que producen distintas alternativas de producción. Por otra parte, la curva del ingreso marginal muestra el ingreso adicional que proporciona la última unidad vendida. En el caso habitual de una curva de demanda con pendiente negativa, la curva del ingreso marginal estará por debajo de la curva de demanda porque, según la ecuación 9.7, $IMg < p$. En la figura 9.2 hemos trazado esta curva, así como la curva de demanda de la cual se deriva. Nótese que el ingreso marginal es negativo para niveles de producción superiores a q_1. A medida que la producción aumenta de 0 a q_1, los ingresos totales $(p \cdot q)$ aumentan. No obstante, en q_1 estos ingresos $(p_1 \cdot q_1)$ están al máximo posible; es decir, más allá de este nivel de producción, la velocidad de la disminución del precio es proporcionalmente mayor a la del aumento de la producción.

En la parte 2 se analiza con detalle la posibilidad de que una curva de demanda se desplace debido a cambios del ingreso de las personas, de los precios de otros bienes o de las preferencias. Siempre que una curva de demanda se desplace también se desplazará su correspondiente curva del ingreso marginal. Esto nos resultará evidente, porque no podemos calcular la curva del ingreso marginal sin referirnos a una curva específica de demanda.

EJEMPLO 9.2

El caso de la elasticidad constante

En el capítulo 5 se demostró que una función de demanda de la forma

$$q = ap^b \tag{9.14}$$

tiene una elasticidad precio constante de la demanda y que esta elasticidad está determinada por el parámetro b. Para calcular la función del ingreso marginal para esta función, primero tendremos que resolver la p:

$$p = (1/a)^{1/b} q^{1/b} = kq^{1/b}, \tag{9.15}$$

donde $k = (1/a)^{1/b}$. Por tanto

$$IT = pq = kq^{(1+b)/b}$$

e

$$IMg = dIT/dq = [(1+b)/b]kq^{1/b} = [(1+b)/b]p. \tag{9.16}$$

En consecuencia, en el caso de esta función concreta, la curva del IMg es proporcional al precio. Por ejemplo, si $e_{q,p} = b = -2$, entonces $IMg = 0.5p$. Para un caso más elástico, supongamos que $b = -10$, entonces, $IMg = 0.9p$. La curva del IMg se aproxima a la curva de demanda a medida que la demanda se torna más elástica. De nuevo, si $b = -\infty$, entonces $IMg = p$; es decir, en el caso de una demanda infinitamente elástica, la empresa es tomadora de precios. Por otra parte, en el caso de una demanda inelástica, el IMg será negativo (y sería imposible maximizar las ganancias).

Pregunta: Suponga que la demanda depende de otros factores además de p. ¿Eso cómo cambiaría el análisis de este ejemplo? ¿El cambio de uno de estos otros factores cómo desplazaría la curva de demanda y su correspondiente curva del ingreso marginal?

Oferta a corto plazo de una empresa tomadora de precios

Ahora estamos preparados para estudiar las decisiones de oferta de una empresa que maximiza las ganancias. En este capítulo sólo se analizará el caso en el cual la empresa es tomadora de precios. Más adelante, en la parte 5, se analizarán otros casos con bastante detalle. Además, aquí sólo nos ocuparemos de las decisiones de oferta a corto plazo. Las cuestiones relativas al largo plazo son el enfoque del capítulo siguiente. Por tanto, el modelo adecuado para nuestro análisis es el conjunto de curvas de costos de la empresa a corto plazo.

Decisión de maximización de las ganancias

La figura 9.3 muestra la decisión de la empresa a corto plazo. El precio de mercado[3] está determinado por P^*. Por tanto, la curva de demanda del producto de la empresa es una línea recta horizontal que pasa por P^*. Esta recta se denomina $P^* = IMg$ para recordarnos que esta empresa es tomadora de precios, es decir, siempre puede vender una unidad adicional sin afectar al precio que recibe. El nivel de producción q^* ofrece el máximo de ganancias, porque en q^* el precio es igual al costo marginal a corto plazo. Podemos ver que las ganancias son positivas si advertimos que en q^* el precio es superior al costo promedio. La empresa obtiene una ganancia por cada unidad que vende. Si el precio estuviera por debajo del costo promedio (como es el caso de P^{***}), entonces la empresa registraría una pérdida por cada unidad que vendiera. Si el precio y el costo promedio fueran iguales, entonces las ganancias serían nulas. Nótese que la curva del costo marginal tiene pendiente positiva en q^*. Esto es necesario para que las ganancias sean un verdadero máximo. Si $P = MCg$ en una sección de la curva del costo marginal con pendiente negativa, ésta no sería un punto de ganancias máximas, porque un incremento de la producción generaría una cantidad de ingresos (el precio multiplicado por la cantidad producida) superior a la de los costos de esta producción (el costo marginal disminuiría si la curva del CMg tiene pendiente negativa). Por consiguiente, para maximizar las ganancias es necesario que $P = CMg$ y también que el costo marginal sea creciente en este punto.[4]

La curva de oferta a corto plazo de la empresa

La sección de la curva del costo marginal a corto plazo con pendiente positiva es la curva de oferta a corto plazo para esta empresa tomadora de precios. Esta curva muestra cuánto producirá la empresa a cada uno de los precios posibles de mercado. Por ejemplo, como muestra la figura 9.3, a un precio más alto de P^{**} la empresa producirá q^{**}, porque concluirá que merece la pena contraer los costos marginales más altos que implica q^{**}. Por otra parte, con un precio de P^{***}, la empresa optará por producir menos (q^{***}), porque sólo un nivel más bajo de producción dará por resultado los costos marginales más bajos que le permiten compensar el precio más bajo. Cuando se analizan todos los precios posibles que podría afrontar la empresa, la curva de los costos marginales permite ver la cantidad de producción que la empresa debería ofrecer a cada precio.

Debemos tener mucho cuidado con esta conclusión cuando los precios son muy bajos. Si el precio de mercado disminuyera por debajo de P_1, entonces la decisión para maximizar las ganancias sería no producir. Como muestra la figura 9.3, los precios inferiores a P_1 no cubren el costo variable promedio. La empresa registrará una pérdida en cada unidad producida y además perderá todos los costos fijos. Cuando cancela la producción, la empresa debe pagar los costos fijos, pero evita las pérdidas que contraería con cada unidad producida. Dado que, a corto plazo, la empresa no puede cerrar sus puertas y evitar todos los costos, su mejor decisión será no producir. Por otra parte, un precio apenas ligeramente superior a P_1 implica que la empresa

---

[3]Tanto en este capítulo como en los siguientes, normalmente emplearemos una P mayúscula, en cursivas, para denotar el precio de un solo bien. No obstante, cuando se trate de una notación compleja, en ocasiones volveremos a emplear una p minúscula.

[4]Dado que, en términos matemáticos,

$$\pi(q) = Pq - CT(q),$$

Para maximizar las ganancias es necesario que (condición de primer orden)

$$\pi'(q) = P - CMg(q) = 0$$

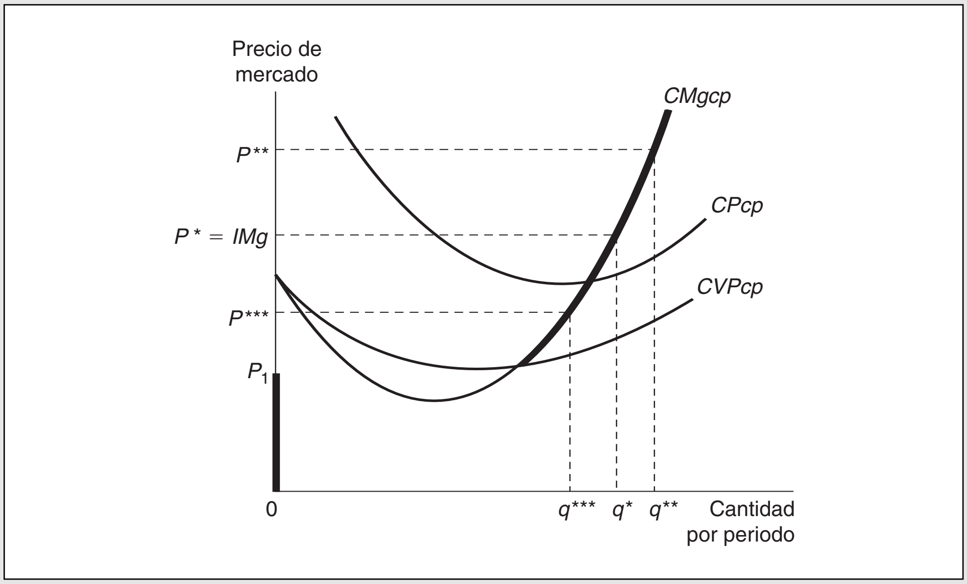
y que (condición de segundo orden)

$$\pi''(q) = -CMg'(q) < 0.$$

Por tanto, es necesario que $CMg'(q) > 0$; es decir, el costo marginal debe ser creciente.

FIGURA 9.3 **Curva de oferta a corto plazo para una empresa tomadora de precios**

A corto plazo, una empresa tomadora de precios producirá el nivel de producción en el cual *CMgcp* = *P*. Por ejemplo, en *P**, la empresa producirá *q**. La curva del *CMgcp* también muestra lo que producirá a otros precios. Sin embargo, a precios inferiores al *CVPcp,* la empresa optará por no producir. Las líneas gruesas de la figura representan la curva de oferta a corto plazo de la empresa.



debe producir algo. Aun cuando las ganancias puedan ser negativas (como lo serán si el precio es inferior al costo total promedio a corto plazo, como en el caso de *P****), siempre y cuando pueda cubrir los costos variables, la decisión que maximiza las ganancias sería seguir produciendo. De cualquier manera tendrá que pagar los costos fijos y un precio que cubra los costos variables le proporcionará ingresos para compensar los costos fijos.[5] Por tanto, tenemos una descripción completa de las decisiones de oferta de esta empresa ante distintas alternativas de precios para su producción. La descripción siguiente las resume:

DEFINICIÓN

Curva de oferta a corto plazo. La *curva de oferta a corto plazo* de la empresa muestra la cantidad que producirá a los distintos precios posibles para su producción. En el caso de una empresa que maximiza las ganancias y que toma el precio de sus productos como dado, esta curva es el segmento de los costos marginales a corto plazo de la empresa, con pendiente positiva, que está por encima del punto del costo variable promedio mínimo. En el caso de precios por debajo de este nivel, la decisión de la empresa que maximiza las ganancias consiste en cerrar sus puertas y en no producir.

Por supuesto que un factor que desplace la curva del costo marginal de la empresa a corto plazo (como las variaciones de los precios de los factores o los cambios del nivel de factores fijos

[5]Un poco de álgebra aclarará las cosas. Sabemos que los costos totales son iguales a la suma de los costos fijos y los variables:

$$CTcp = CFcp + CVcp,$$

y las ganancias están dadas por

$$\pi = IT - CTcp = P \cdot q - CFcp - CVcp.$$

Si $q = 0$, entonces los costos variables y los ingresos serán 0, por lo cual

$$\pi = -CFcp.$$

La empresa producirá sólo si $\pi > -CFcp$. Pero esto significa que

$$P \cdot q > CVcp \quad \text{o} \quad P > CVcp/q.$$

que emplea) también desplazará la curva de oferta a corto plazo. En el capítulo 10 se utilizará mucho este tipo de análisis para estudiar las operaciones de los mercados de competencia perfecta.

EJEMPLO 9.3

Oferta a corto plazo

En el ejemplo 8.5 calculamos la función del costo total en el caso de la función de producción Cobb-Douglas como

$$CTcp(v, w, q, k) = vk_1 + wq^{1/\beta}k_1^{-\alpha/\beta}, \tag{9.17}$$

donde k_1 es el nivel del factor capital que se mantiene constante al corto plazo.[6] Podemos calcular fácilmente el costo marginal como

$$CMgcp(v, w, q, k_1) = \frac{\partial CTcp}{\partial q} = \frac{w}{\beta} q^{(1-\beta)/\beta} k_1^{-\alpha/\beta}. \tag{9.18}$$

Nótese que el costo marginal a corto plazo es creciente para la producción en todos los valores de q. La empresa tomadora de precios que quiera maximizar las ganancias a corto plazo tendrá que optar por una producción de modo que el precio de mercado (P) sea igual al costo marginal a corto plazo:

$$CMgcp = \frac{w}{\beta} q^{(1-\beta)/\beta} k_1^{-\alpha/\beta} = P \tag{9.19}$$

y podemos resolver para conocer la cantidad ofrecida

$$q = \left(\frac{w}{\beta}\right)^{-\beta/(1-\beta)} k_1^{\alpha/(1-\beta)} P^{\beta/(1-\beta)}. \tag{9.20}$$

Esta función de oferta proporciona una serie de datos que usted reconocerá gracias a sus cursos anteriores de economía: 1) la curva de oferta tiene pendiente positiva; es decir los incrementos de P provocan que la empresa produzca más porque está dispuesta a contraer un costo marginal más alto;[7] 2) los incrementos de salario, w, provocan que la curva de oferta oscile hacia la izquierda; es decir, para un precio determinado de producción, con un salario más alto se ofrecerá menos; 3) los incrementos del factor capital, k, provocan que la curva de oferta se desplace hacia la derecha; es decir, cuando la empresa tiene más capital a corto plazo, entonces con un nivel de producción más alto, contrae un nivel dado de costos marginales a corto plazo, y 4) la tasa de alquiler del capital (v) no tiene importancia para las decisiones de oferta a corto plazo, porque sólo es un componente de los costos fijos.

Ejemplo numérico. De nueva cuenta, podemos seguir el caso numérico del ejemplo 8.5, donde $\alpha = \beta = 0.5$, $v = 3$, $w = 12$, $k_1 = 80$. En el caso de estos parámetros concretos, la función de oferta será

$$q = \left(\frac{w}{0.5}\right)^{-1} \cdot (k_1)^1 \cdot P^1 = 40 \cdot \frac{P}{w} = \frac{40P}{12} = \frac{10P}{3}. \tag{9.21}$$

Podemos comprobar si este cálculo es correcto si comparamos la cantidad ofrecida a diversos precios con el cálculo del costo marginal a corto plazo que presenta la tabla 8.2. Por ejemplo, si $P = 12$, la función de oferta predice que $q = 40$ será ofrecida y la tabla 8.2 muestra que esto coincidirá con la regla que expresa $P = CMgcp$. Si el precio se duplicara a $P = 24$, se ofrecería una producción de 80 y, de nueva cuenta, la tabla 8.2 muestra que, cuando $q = 80$, entonces $CMgcp = 24$. Un precio más bajo (por decir, $P = 6$) provocaría que disminuyera la producción ($q = 20$).

[6]Dado que mantenemos constante el factor capital, la función de costos a corto plazo exhibe costos marginales crecientes y, por tanto, el resultado será un nivel único de producción que maximiza las ganancias. Si hubiéramos usado una función de producción con rendimientos a escala a largo plazo, no habría habido este nivel de producción único. Más adelante en este capítulo, y también en el capítulo 10, elaboraremos este tema más a fondo.

[7]De hecho, podemos leer la elasticidad de oferta a corto plazo directamente de la ecuación 9.20 como $\beta/(1-\beta)$.

Antes de adoptar la ecuación 9.21 como *la* curva de oferta para esta situación, también debemos revisar la decisión de la empresa de cerrar sus puertas. ¿Hay un precio al cual sería más rentable producir $q = 0$ que seguir la regla $P = CMgcp$? De la ecuación 9.17 sabemos que los costos variables a corto plazo están determinados por

$$CVcp = wq^{1/\beta}k_1^{-\alpha/\beta}, \qquad (9.22)$$

y, por tanto,

$$\frac{CVcp}{q} = wq^{(1-\beta)/\beta}k_1^{-\alpha/\beta}. \qquad (9.23)$$

Si se compara la ecuación 9.23 con la ecuación 9.18 se verá que $CVcp/q < CMgcp$ en el caso de todos los valores de q siempre y cuando $\beta < 1$. Por tanto, en este problema, no hay un precio que sea lo bastante bajo como para que la empresa, siguiendo la regla $P = CMcp$ pierda más que si no produjera nada.

En el ejemplo numérico, piense en el caso de $P = 3$. Con un precio tan bajo, la empresa optaría por $q = 10$. Los ingresos totales serían $IT = 30$, y los costos totales a corto plazo serían $CTcp = 255$ (véase la tabla 8.1). Por tanto, las ganancias serían $\pi = IT - CTcp = -225$. Si bien la situación es bastante oscura para la empresa, es mejor que optar por $q = 0$. Si la empresa no produce, evitará los costos variables (trabajo), pero no obstante perderá 240 por los costos fijos del capital. Si produce 10 unidades de producto, sus ingresos cubren los costos variables ($IT - CVcp = 30 - 15 = 15$) y contribuirá 15 para compensar ligeramente la pérdida de costos fijos.

Pregunta: ¿Cómo trazaría usted la curva de oferta a corto plazo de la ecuación 9.21? ¿Cómo se desplazaría la curva si w aumentara a 15? ¿Cómo se desplazaría si el factor capital aumentara a $k_1 = 100$? ¿Cómo se desplazaría la curva de oferta a corto plazo si v disminuyera a 2? ¿Alguno de estos cambios modificaría la decisión de la empresa de no tener que cerrar sus puertas a corto plazo?

Funciones de ganancias

Podemos obtener más información del proceso de maximización de las ganancias de la empresa tomadora de precios[8] si se analiza la función de ganancias. Esta función muestra que las ganancias (maximizadas) de la empresa dependen exclusivamente de los precios de sus productos. Para entender la lógica de esta interpretación, recuerde que definimos las ganancias económicas como

$$\pi = Pq - CT = Pf(k, l) - vk - wl. \qquad (9.24)$$

En esta expresión, la empresa sólo controla las variables k y l (y también $q = f(k, l)$). La empresa elige los niveles de esos factores con objeto de maximizar las ganancias y, para su decisión, considera que los tres precios, P, v y w son parámetros fijos. Con este enfoque, las ganancias máximas de la empresa dependen, al final de cuentas, exclusivamente de estos tres precios exógenos, así como de la fórmula de la función de producción. Resumimos esta dependencia con la *función de ganancias*:

Función de ganancias. La función de ganancias de la empresa presenta sus ganancias máximas como función de los precios de sus productos:

$$\Pi(P,v,w) = \underset{k,l}{\text{Máx}}\ \pi(k,l) = \underset{k,l}{\text{Máx}}\,[Pf(k,l) - vk - wl]. \qquad (9.25)$$

[8]También podríamos aplicar gran parte de este análisis a una empresa que tuviera cierto poder de mercado en el precio que recibe por su producto, pero dejaremos la explicación de esta posibilidad para la parte 5 de este libro.

En esta definición se utiliza la Π mayúscula para indicar que el valor dado por la función son las ganancias máximas que la empresa puede obtener dados los precios. Esta función incorpora implícitamente la fórmula de su función de producción, proceso que se ilustrará un poco más adelante en el ejemplo 9.4. La función de ganancias se refiere a la maximización de las ganancias a corto o a largo plazos, pero en el segundo caso también sería preciso especificar los niveles de aquellos factores fijos a corto plazo.

Propiedades de la función de ganancias

Tal como en el caso de otras funciones de optimización que hemos analizado, la función de ganancias tiene una serie de propiedades que resultan sumamente útiles para el análisis económico, entre ellas:

1. *Homogeneidad:* Al duplicarse todos los precios de la función de ganancias, ello duplicará éstas; es decir, la función de las ganancias es homogénea de grado uno para todos los precios. Ya hemos demostrado que los costos marginales son homogéneos de grado uno para los precios de los factores y, por tanto, al duplicarse los precios de los factores y al duplicarse los precios de mercado de la producción de la empresa, ello no cambiará la cantidad que decida producir para maximizar las ganancias. Sin embargo, dado que los ingresos y los costos se han duplicado, las ganancias se duplicarán. Lo anterior demuestra que ante una inflación pura (en la cual todos los precios aumentan juntos), las empresas no modificarán sus planes de producción y los niveles de sus ganancias simplemente irán aumentando a la par que la inflación.
2. *Las funciones de ganancias no son decrecientes para el precio del producto,* P*:* Este resultado parece evidente; es decir, una empresa siempre podrá responder al aumento del precio de su producto sin modificar sus planes para los factores o la producción. Dada la definición de ganancias, éstas deben aumentar. Por tanto, si la empresa cambia de planes, seguramente lo hará a efecto de obtener incluso más ganancias. Si las ganancias disminuyeran, la empresa no estaría maximizando sus ganancias.
3. *Las funciones de ganancias no son crecientes para los precios de los factores,* v *y* w*:* De nueva cuenta, esta característica de la función de ganancias parece evidente. Lo podemos comprobar de la misma forma que hicimos en la explicación de los precios del producto.
4. *Las funciones de ganancias son convexas para los precios del producto:* Esta importante característica de las funciones de ganancias establece que las ganancias que obtiene la empresa con el promedio de las ganancias que puede obtener de dos precios distintos de los productos serán, cuando menos, tan altas como las que puede obtener con el promedio[9] de los dos precios. En términos matemáticos,

$$\frac{\Pi(P_1, v, w) + \Pi(P_2, v, w)}{2} \geq \Pi\left[\frac{P_1 + P_2}{2}, v, w\right]. \tag{9.26}$$

La intuición nos dice que esto se debe a que, cuando las empresas pueden adaptar sus decisiones a dos precios distintos libremente, entonces obtienen mejores resultados que cuando sólo pueden optar por un conjunto de elecciones ante un solo precio promedio. Dicho en términos más formales, dejemos que $P_3 = (P_1 + P_2)/2$ y que q_i, k_i, l_i representen las elecciones de producción y de factores que maximizan las ganancias para estos distintos precios. Dado el supuesto de la maximización de ganancias que implica la función Π, podremos escribir

$$\begin{aligned} \Pi(P_3, v, w) &\equiv P_3q_3 - vk_3 - wl_3 = \frac{P_1q_3 - vk_3 - wl_3}{2} + \frac{P_2q_3 - vk_3 - wl_3}{2} \\ &\leq \frac{P_1q_1 - vk_1 - wl_1}{2} + \frac{P_2q_2 - vk_2 - wl_2}{2} \equiv \frac{\Pi(P_1, v, w) + \Pi(P_2, v, w)}{2}, \end{aligned} \tag{9.27}$$

lo cual comprueba la ecuación 9.26. La convexidad de la función de las ganancias tiene muchas aplicaciones a distintos temas, entre ellos la estabilización de precios, y en las extensiones de este capítulo se analizan algunas de ellas.

[9]Aquí sólo exponemos un promedio simple de los precios, pero queda claro que, dada la convexidad, una condición similar a la de la ecuación 9.26 será válida para un precio promedio ponderado cualquiera $\bar{P} = tP_1 + (1 - t)P_2$ donde $0 \leq t \leq 1$.

Resultados de la envolvente

Dado que la función de ganancias refleja el proceso subyacente de una maximización sin restricciones, también podemos aplicar el teorema de la envolvente para ver la respuesta de las ganancias ante variaciones en los precios de los factores y la producción. Esta aplicación del teorema produce una serie de resultados muy útiles. En concreto, si se utiliza la definición de ganancias se obtendrá

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi(P, v, w)}{\partial P} &= q(P, v, w)\\ \frac{\partial \Pi(P, v, w)}{\partial v} &= -k(P, v, w)\\ \frac{\partial \Pi(P, v, w)}{\partial w} &= -l(P, v, w).\end{aligned} \tag{9.28}$$

De nueva cuenta, la intuición nos dice que estas ecuaciones tienen sentido; es decir, una pequeña variación del precio del producto aumentará las ganancias en proporción con la cantidad que la empresa esté produciendo, mientras que un pequeño incremento en el precio de un factor disminuirá las ganancias en proporción con la cantidad de ese factor que esté empleando. La primera de estas ecuaciones expresa que se puede calcular la función de oferta de la empresa, a partir de su función de ganancias, mediante una diferenciación parcial con respecto al precio del producto.[10] La segunda y la tercera ecuación muestran que también podemos derivar las funciones de la demanda factoriales a partir de las funciones[11] de ganancias. Dado que la función de ganancias misma es homogénea de grado uno, todas las funciones descritas en las ecuaciones 9.28 son homogéneas de grado cero. Es decir, si se duplican los precios de los factores y del producto, ello no cambiará los niveles de factores que elija la empresa, ni tampoco el nivel de producción que maximiza sus ganancias. Todos los resultados tienen además analogías a corto plazo, como se demostrará más adelante con un ejemplo concreto.

Excedente del productor a corto plazo

En el capítulo 5 se explicó el concepto de "excedente del consumidor" y se demostró que podemos utilizar las áreas que quedan debajo de la curva de demanda para medir los costos de bienestar que las variaciones de precios cobran a los consumidores. Asimismo, se demostró que la función de gasto del individuo puede captar estos cambios del bienestar. El proceso para calcular los efectos que las variaciones de precios tienen en el bienestar de las empresas es muy similar en el análisis del corto plazo. En esta sección se abordará este tema. Sin embargo, como se demostrará en el capítulo siguiente, calcular el efecto que las variaciones de precios tienen en el bienestar de los productores a largo plazo requiere de un planteamiento muy diferente, porque las empresas mismas no son las que sienten la mayor parte de estos efectos a largo plazo, sino que lo sienten los proveedores de sus factores. En general, el planteamiento a largo plazo es el que, a continuación, nos resultará más útil para estudiar el efecto de los cambios de precio en el bienestar.

Dado que la función de precios no es decreciente para los precios del producto, sabemos que si $P_2 > P_1$

$$\Pi(P_2, \ldots) \geq \Pi(P_1, \ldots),$$

y sería natural que las ganancias en el bienestar de la empresa se midieran a partir de cambios en el precio de la siguiente forma

$$\textbf{Ganancia del bienestar} = \Pi(P_2, \ldots) - \Pi(P_1, \ldots). \tag{9.29}$$

La figura 9.4 muestra que podemos medir este valor, en términos gráficos, como el área limitada por los dos precios y que se encuentra encima de la curva de oferta a corto plazo. Por intuición,

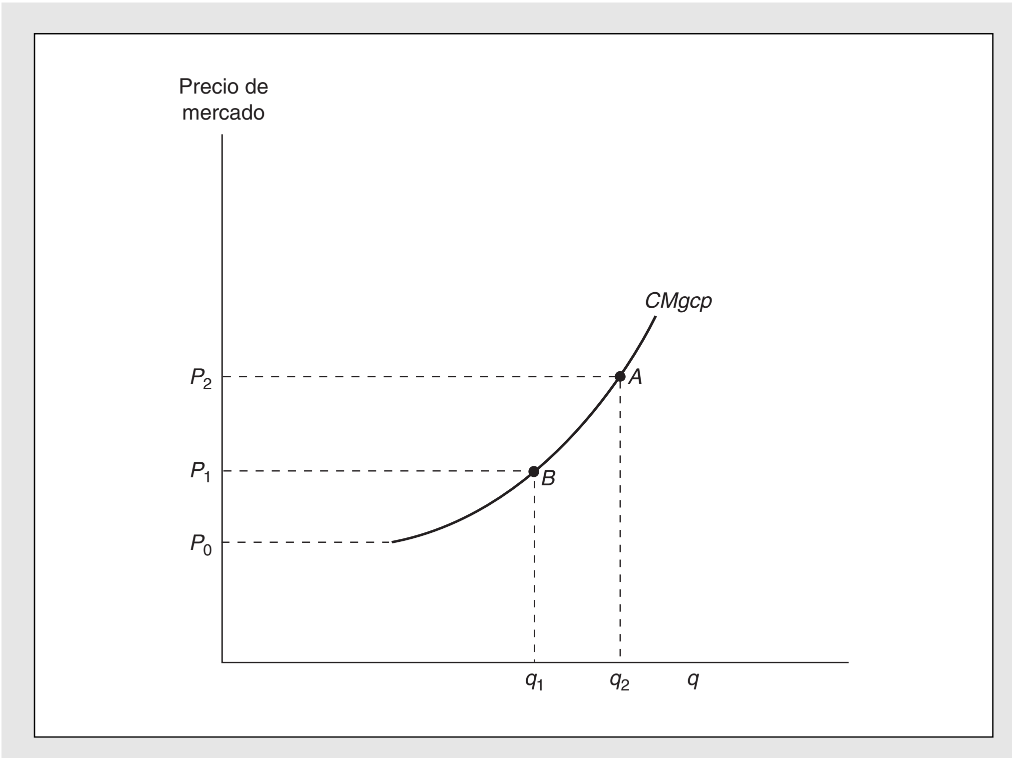
---

[10]En ocasiones, esta relación se conoce con el nombre de "lema de Hotelling", por el economista Harold Hotelling que la descubrió en la década de 1930.

[11]A diferencia de las funciones de demanda factoriales que derivamos en el capítulo 8, estas funciones de demanda factorial no dependen de los niveles de producción. Por el contrario, las funciones ya toman en cuenta la decisión de la empresa de producir una cantidad que maximice las ganancias. Por tanto, este concepto de la demanda es más general que el que presentamos en el capítulo 8, y en la siguiente sección hablaremos mucho más de él.

FIGURA 9.4 **Los cambios en el excedente del productor a corto plazo miden las ganancias de la empresa**

Si el precio aumenta de P_1 a P_2 el incremento de las ganancias de la empresa estará determinado por el área P_2ABP_1. Al precio de P_1 la empresa gana el excedente del productor a corto plazo determinado por el área P_0BP_1. Esto mide el incremento de las ganancias para la empresa si produce q_1 en lugar de cerrar sus puertas cuando el precio es P_0 o más bajo.



entendemos que la curva de oferta muestra el precio mínimo que la empresa aceptará por elaborar su producto. Por tanto, cuando el precio de mercado aumenta de P_1 a P_2, la empresa puede vender su nivel de producción anterior (q_1) a un precio más alto y opta por vender la producción adicional ($q_2 - q_1$) por la cual también obtiene, al margen, ganancias adicionales por todas las unidades menos la última. De ahí que el aumento total de las ganancias de la empresa esté dado por el área P_2ABP_1. En términos matemáticos, podemos emplear los resultados de la envolvente de las secciones anteriores para derivar

$$\textbf{Ganancia del bienestar} = \int_{P_1}^{P_2} q(P)dP = \int_{P_1}^{P_2} (\partial\Pi/\partial P)dP = \Pi(P_2, \cdots) - \Pi(P_1, \cdots). \qquad \textbf{(9.30)}$$

En consecuencia, los cálculos geométricos del cambio de bienestar coinciden con los matemáticos.

Si se utiliza este planteamiento, también podremos calcular el valor que otorga la empresa al derecho de producir al precio que prevalece en el mercado, en relación con una situación en la cual no produciría nada. Si se denota el precio de cierre a corto plazo como P_0 (que, de hecho, podría ser un precio de cero, pero no necesariamente), entonces las ganancias adicionales por un precio del producto de P_1 quedarán definidas como el excedente del productor:

$$\textbf{Excedente del productos} = \Pi(P_1, \cdots) - \Pi(P_0, \cdots) = \int_{P_0}^{P_1} q(P)dP \qquad \textbf{(9.31)}$$

El área P_1BP_0 de la figura 9.4 muestra lo anterior. Por tanto, tendremos una definición formal:

DEFINICIÓN

Excedente del productor. El excedente del productor son las ganancias adicionales que obtienen los productores haciendo transacciones a un precio de mercado por encima del que obtendrían si no produjeran. Éstas quedan ilustradas por el tamaño del área que está debajo del precio de mercado y encima de la curva de oferta.

En la definición anterior no marcamos diferencia entre el corto y el largo plazo, porque hasta ahora nuestra exposición sólo se ha referido al análisis del corto plazo. En el siguiente capítulo se verá que esta misma definición tiene una doble función, porque también describe el excedente del productor a largo plazo, por tanto el emplear una definición genérica funciona para los dos conceptos. Por supuesto que, como se demostrará, el significado de excedente del productor a largo plazo es bastante diferente del que hemos visto por ahora.

Cabría señalar un aspecto más del excedente del productor a corto plazo. Dado que la empresa no produce al precio de cierre, sabemos que $\Pi(P_0, \ldots) = -vk_1$, es decir, las ganancias al precio de cierre están compuestas, exclusivamente, por las pérdidas de todos los costos fijos. Por tanto:

$$\begin{aligned}\textbf{Excedente del productor} &= \Pi(P_1, \ldots) - \Pi(P_0, \ldots) \\ &= \Pi(P_1, \ldots) - (-vk_1) = \Pi(P_1, \ldots) + vk_1\end{aligned} \tag{9.32}$$

Esto significa que el excedente del productor está dado por las ganancias actuales provenientes de obtener un ingreso que excede los costos fijos. La manipulación siguiente muestra que la magnitud también puede ser expresada como

$$\begin{aligned}\textbf{Excedente del productor} &= \Pi(P_1, \ldots) - \Pi(P_0, \ldots) \\ &= P_1q_1 - vk_1 - wl_1 + vk_1 = P_1q_1 - wl_1.\end{aligned} \tag{9.33}$$

Dicho en palabras, el excedente del productor a corto plazo está determinado por la cantidad de sus ingresos que exceda a la de sus costos variables, o sea que esto es lo que la empresa gana cuando produce a corto plazo, en lugar de cerrar sus puertas y no producir.

Función de ganancias a corto plazo

Podemos ilustrar diversos usos de la función de ganancias empleando la función de producción Cobb-Douglas que se ha venido utilizando. Dado que $q = k^{\alpha}l^{\beta}$ y que consideramos que el capital está fijo en k_1 al corto plazo, las ganancias serán

$$\pi = Pk_1^{\alpha}l^{\beta} - vk_1 - wl. \tag{9.34}$$

Para determinar esta función de ganancias se utilizan las condiciones de primer orden para alcanzar el máximo a efecto de eliminar l de esta expresión:

$$\frac{\partial \pi}{\partial l} = \beta Pk_1^{\alpha}l^{\beta-1} - w = 0 \text{ por tanto } l = \left(\frac{w}{\beta Pk_1^{\alpha}}\right)^{1/(\beta-1)}. \tag{9.35}$$

Podemos simplificar el proceso para sustituir esto de nueva cuenta en la ecuación de las ganancias si dejamos que $A = (w/\beta Pk_1^{\alpha})$. Al utilizar este atajo tendremos

$$\begin{aligned}\Pi(P, v, w, k_1) &= Pk_1^{\alpha}A^{\beta/(\beta-1)} - vk_1 - wA^{1/(\beta-1)} \\ &= wA^{1/(\beta-1)}[Pk_1^{\alpha}(A/w) - 1] - vk_1 \\ &= wA^{1/(\beta-1)}[(1-\beta)/\beta] - vk_1.\end{aligned} \tag{9.36}$$

Aceptamos que esta solución es un tanto complicada, pero es la prometida; es decir, las ganancias máximas de la empresa están expresadas como una función tan sólo de los precios de sus productos y su tecnología. Nótese que los costos fijos de la empresa (vk_1) entran en esta expre-

(*continúa*)

EJEMPLO 9.4 *CONTINUACIÓN*

sión en forma lineal. Los precios de los productos de la empresa determinan la cantidad de los ingresos que excede a la de los costos variables y, después, restamos los costos fijos para obtener la cifra final de las ganancias.

Dado que siempre es más recomendable comprobar si las operaciones algebraicas son correctas, probemos el ejemplo numérico que hemos venido utilizando. Si $\alpha = \beta = 0.5$, $v = 3$, $w = 12$, $k_1 = 80$, sabemos que, a un precio de $P = 12$ la empresa producirá 40 unidades de producto y utilizará un factor trabajo de $l = 20$. Por tanto, las ganancias serán $\pi = IT - CT = 12 \cdot 40 - 3 \cdot 80 - 12 \cdot 20 = 0$. La empresa tan sólo llegará al equilibrio a un precio de $P = 12$. Si se utiliza la función de ganancias se obtendrá

$$
\begin{aligned}
\Pi(P, v, w, k_1) &= \Pi(12, 3, 12, 80) \\
&= 12 \cdot [12/(0.5 \cdot 12 \cdot 80^{0.5})]^{-2}(1) - 3 \cdot 80 \\
&= 12 \cdot (80^{0.5}/2)^2 - 240 = 240 - 240 = 0. \qquad (9.37)
\end{aligned}
$$

Por tanto, al precio de 12, la empresa obtendrá 240 de ganancias sobre sus costos variables y éstos quedarían compensados, exactamente, con los costos fijos al llegar al total final. Con un precio más alto para su producto, la empresa obtendría ganancias positivas. Sin embargo, a un precio menor de 12, la empresa sufriría pérdidas a corto plazo.[12]

El lema de Hotelling: Podemos utilizar la función de ganancias de la ecuación 9.36 y el teorema de la envolvente para derivar la función de oferta a corto plazo de esta empresa:

$$
\begin{aligned}
q(P, v, w, k_1) &= \frac{\partial \Pi}{\partial P} = \frac{-w}{\beta} \cdot A^{(2-\beta)/(\beta-1)} \cdot \left(\frac{-w}{\beta P^2 k_1^{\alpha}}\right) \\
&= \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\beta/\beta-1} k_1^{\alpha/(1-\beta)} P^{\beta/(1-\beta)}, \qquad (9.38)
\end{aligned}
$$

que es precisamente la función de oferta a corto plazo que calculamos en el ejemplo 9.3 (véase la ecuación 9.20).

Excedente del productor: También se puede utilizar la función de oferta para calcular el excedente del productor, a corto plazo, de esta empresa. Para ello, volvemos a nuestro ejemplo numérico: $\alpha = \beta = 0.5$, $v = 3$, $w = 12$, $k_1 = 80$. Con estos parámetros, la relación de oferta a corto plazo es $q = 10P/3$ y el precio de cierre es cero. Por tanto, a un precio de $P = 12$, el excedente del productor será

$$
\textbf{Excedente del productor} = \int_0^{12} (10P/3)dP = \frac{10P^2}{6}\Bigg|_0^{12} = 240. \qquad (9.39)
$$

Éstas son precisamente las ganancias a corto plazo con un precio de 12 ($\pi = 0$) y costos fijos a corto plazo ($= vk_1 = 3 \cdot 80 = 240$). Si el precio aumentara, por decir, a 15, entonces el excedente del productor aumentaría a 375, cifra que seguiría consistiendo de 240 de costos fijos más las ganancias totales al precio más alto ($\pi = 135$).

Pregunta: En este caso, los cambios de la tasa de alquiler del capital (v), ¿cómo afectan el monto del excedente del productor a corto plazo? ¿Los cambios de salario cómo lo afectarían, w?

[12] En la tabla 8.2 demostramos que si $q = 40$, entonces los *Cpcp* = 12. Por tanto $P = 12 =$ *Cpcp* también indica que las ganancias son nulas.

Maximización de las ganancias y demanda factorial

Hasta aquí, se ha considerado el problema de la decisión de la empresa consistente en elegir el nivel de producción que maximiza las ganancias. Sin embargo, toda nuestra explicación ha dejado en claro que, de hecho, los factores que decide emplear son lo que determina su producción, en una relación que resume la función de producción $q = f(k, l)$. Por tanto, también podemos expresar las ganancias económicas de la empresa como una función, exclusivamente, de los factores de producción que emplea:

$$\pi\,(k, l) = Pq - CT(q) = Pf(k, l) - (vk + wl). \tag{9.40}$$

Visto así, el problema de la decisión de la empresa para maximizar las ganancias se convierte en uno que consiste en elegir los niveles adecuados del factor capital y el factor trabajo.[13] Las condiciones de primer orden para obtener un máximo son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial k} &= P\frac{\partial f}{\partial k} - v = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial l} &= P\frac{\partial f}{\partial l} - w = 0. \end{aligned} \tag{9.41}$$

Estas condiciones dejan en claro, desde un punto de vista intuitivo, que una empresa que maximiza las ganancias debería contratar un factor cualquiera hasta el punto en el cual su contribución marginal a los ingresos sea igual al costo marginal de contratar dicho factor. Dado que suponemos que la empresa es tomadora de precios en sus contrataciones, el costo marginal de contratar un factor cualquiera será igual al precio de mercado de éste. La contribución marginal del factor a los ingresos está dada por la producción adicional que genera (el producto marginal) multiplicado por el precio de mercado del bien. El concepto de demanda tiene un nombre específico:

DEFINICIÓN

Ingreso marginal del producto. El ingreso adicional que recibe la empresa cuando emplea una unidad adicional de un factor. En el caso de la empresa tomadora de precios,[14] $IMP_l = Pf_l$, $IMP_k = Pf_k$.

Por tanto, para maximizar sus ganancias, la empresa tendrá que contratar cada factor hasta el punto en el cual el ingreso marginal del producto sea igual a su precio de mercado. Nótese que las ecuaciones 9.41 de la maximización de las ganancias también implican que la empresa minimiza los costos, porque $TTS = f_l/f_k = w/v$.

Condiciones de segundo orden

Dado que la función de las ganancias de la ecuación 9.40 depende de dos variables, k y l, las condiciones de segundo orden para obtener el máximo de ganancias son algo más complejas que en el caso de una sola variable que se analizó anteriormente. En el capítulo 2 se demostró que para garantizar un verdadero máximo es necesario que la función de ganancias sea cóncava, es decir,

$$\pi_{kk} = f_{kk} < 0 \qquad \pi_{ll} = f_{ll} < 0 \tag{9.42}$$

y

$$\pi_{kk}\pi_{ll} - \pi^2_{kl} = f_{kk}\,f_{ll} - f^2_{kl} > 0.$$

Por tanto, la concavidad de la relación de las ganancias es igual que requerir que la función de producción misma sea cóncava. Nótese que la productividad marginal decreciente de cada factor no basta para garantizar que los costos marginales sean crecientes. La expansión de la producción generalmente requiere que la empresa utilice más capital y más trabajo. Por tanto, también nos debemos asegurar de que los incrementos del factor capital no aumenten la productividad marginal del trabajo (disminuyendo así el costo marginal) en una cantidad lo bastante grande

---

[13] En esta sección, a lo largo de nuestro análisis, supondremos que la empresa es tomadora de precio, por lo cual podemos considerar que los precios de sus productos y de sus factores de producción pueden ser parámetros fijos. Podemos generalizar los resultados fácilmente al caso en el cual los precios dependen de la cantidad.

[14] Si la empresa no es tomadora de precios en el mercado de productos, podemos generalizar esta definición empleando el ingreso marginal en lugar del precio. Es decir, $PIM_g = \partial IT/\partial l = \partial IT/\partial q \cdot \partial q/\partial l = IMg \cdot PMg_l$. Una derivacion similar se sostiene de los factores de capital.

como para revertir el efecto de la productividad marginal decreciente del trabajo mismo. Por tanto, la segunda parte de la ecuación 9.42 requiere que estos efectos de productividad cruzados sean relativamente pequeños; es decir, que estén dominados por las productividades marginales decrecientes de los factores. Si estas condiciones están satisfechas, entonces los costos marginales serán crecientes con las opciones de k y l, que maximizan las ganancias y las condiciones de primer orden representarán un punto máximo.

Funciones de demanda de factores

En principio, las condiciones de primer orden para contratar factores de forma que maximice las ganancias se pueden manipular para que produzcan funciones de demanda de factores que muestren cómo la contratación depende de los precios de los productos de la empresa. Denotaremos estas funciones con

$$\begin{aligned}\textbf{Demanda de capital} &= k(P, v, w)\\ \textbf{Demanda de trabajo} &= l(P, v, w).\end{aligned}\tag{9.43}$$

Nótese que, a diferencia de los conceptos de la demanda de factores que vimos en el capítulo 8, estas funciones de demanda "no tienen condiciones"; es decir, implícitamente permiten que la empresa adapte su producción a los precios cambiantes. Por tanto, estas funciones de demanda ofrecen un panorama de la forma en que los precios afectan la demanda factorial más completo que el de las funciones de la demanda coyuntural que vimos en el capítulo 8. Ya hemos demostrado que también podemos derivar estas funciones de demanda factorial a partir de la función de ganancias por medio de la diferenciación. En el ejemplo 9.5 se demostró el proceso explícitamente. Sin embargo, primero se estudiará cómo los cambios en el precio de un factor probablemente afectarían la demanda del mismo. Para simplificar las cosas, tan sólo se analizará la demanda de trabajo, pero el análisis de la demanda de otro factor cualquiera sería lo mismo. En términos generales, llegamos a la conclusión de que la dirección de este efecto no es ambigua en ningún caso; es decir, que $\partial l/\partial w \leq 0$ independientemente de la cantidad de factores que haya. Para desarrollar cierta intuición respecto a este resultado, empezamos por algunos casos muy sencillos.

El caso de un solo factor

Una razón por la cual esperaríamos que $\partial l/\partial w$ sea negativa parte del supuesto de que el producto marginal del trabajo disminuye a medida que aumenta la cantidad de trabajo que emplea la empresa. Un disminución de w significa que la empresa deberá contratar más trabajo para llegar a la igualdad de $w = P \cdot PMg_l$: la disminución de w debe ser igual a la disminución de PMg_l (porque P es fijo), y la empresa lo puede lograr si aumenta l. Podemos demostrar que este argumento es estrictamente correcto para el caso de un factor de la manera siguiente. Si se escribe el diferencial total de la ecuación 9.41 para maximizar las ganancias como

$$dw = P \cdot \frac{\partial f_l}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial w} \cdot dw$$

o

$$1 = P \cdot f_{ll} \cdot \frac{\partial l}{\partial w}\tag{9.44}$$

o

$$\frac{\partial l}{\partial w} = \frac{1}{P \cdot f_{ll}} \leq 0,$$

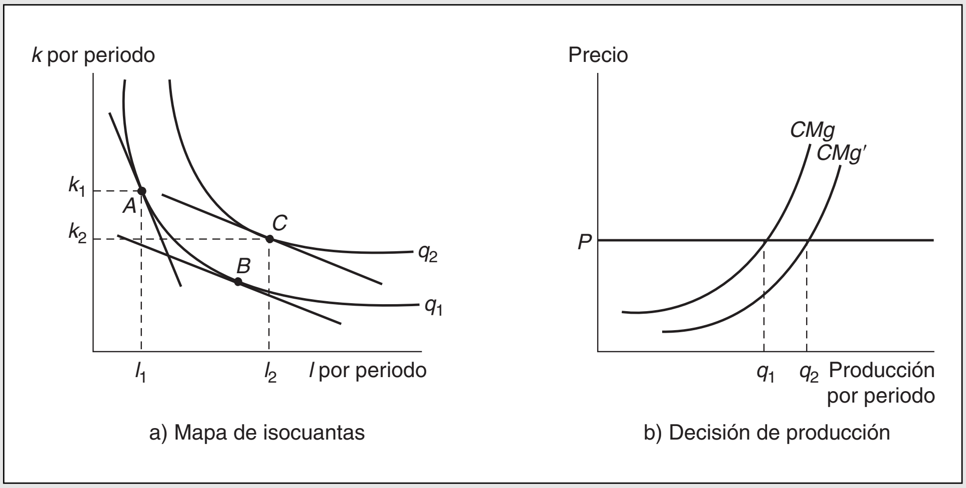
donde la desigualdad final es válida porque suponemos que la productividad marginal del trabajo es decreciente ($f_{ll} \leq 0$). Por tanto, hemos demostrado que, cuando menos en el caso de un solo factor, un aumento del salario, ceteris paribus, provocará que la empresa contrate menos trabajo.

El caso de dos factores

En el caso de dos (o más) factores, las cosas se complican. El supuesto de un producto marginal decreciente del trabajo nos puede llevar a error en este caso. Si w disminuye, entonces no sólo habrá un cambio en l sino también un cambio en k porque la empresa elige otra combinación de factores que minimiza los costos. Cuando k cambia, toda la función f_l cambia (ahora el tra-

FIGURA 9.5 **Efecto sustitución y efecto producción derivados de una disminución del precio de un factor**

Cuando el precio del trabajo disminuye, entonces entran en juego dos efectos analíticamente diferentes. Uno de ellos, el efecto sustitución, provocará que la empresa contrate más trabajo si quiere mantener constante la producción. Esto aparece como el movimiento del punto A al punto B en (a). En el punto B las condiciones que minimizan los costos ($TTS = w/v$) quedan satisfechas para el nuevo w, que ahora es más bajo. Este cambio de w/v también desplazará la senda de expansión de la empresa y su curva de costos marginales. Una situación normal es que la curva del CMg se desplace hacia abajo ante una disminución de w como muestra (b). Con la nueva curva (CMg') la empresa optará por un nivel más alto de producción (q_2). Por tanto, la contratación de trabajo aumentará (a l_2), también debido al efecto producción.



bajo tiene otra cantidad de capital para trabajar) y el argumento simple que usamos antes deja de ser válido. En el resto de esta sección se empleará un planteamiento gráfico para sugerir por qué, incluso en el caso de dos factores, $\partial l/\partial w$ debe ser negativa. En la siguiente sección se presenta un análisis matemático más preciso.

Efecto sustitución

De alguna manera, el análisis del caso de dos factores es similar al de la respuesta de un individuo ante una variación del precio de un bien que vimos en el capítulo 5. Cuando w disminuye, podemos descomponer, en dos elementos, su efecto total en la cantidad de l contratada. Decimos que el primero de ellos es el *efecto sustitución*. Si mantenemos q constante en q_1, habrá una tendencia a sustituir l por k en el proceso de producción. La figura 9.5a ilustra este efecto. Dado que la condición para minimizar el costo de producir q_1 requiere que la $TTS = w/v$, para que w disminuya será necesario que la combinación de factores A se mueva a la combinación B. Dado que las isocuantas exhiben una TTS decreciente, la figura deja en claro que el efecto sustitución será negativo. Una disminución de w provocará un aumento del trabajo contratado para poder mantener constante la producción.

Efecto producción

Sin embargo, no es correcto mantener la producción constante. Al considerar un cambio de q (el *efecto producción*) la analogía con el problema de la maximización de la utilidad del individuo se desmorona. Los consumidores tienen presupuestos con restricciones, pero las empresas no. Éstas producen tanto como les permite la demanda existente. Para investigar qué ocurre con la cantidad de productos producidos, debemos investigar la decisión de la empresa para tener una producción que maximice las ganancias. Como una variación de w modifica los costos relativos de los factores, ello desplazará la senda de expansión de la empresa. Por tanto, todas sus curvas de costos se desplazarán y probablemente elegirá un nivel de producción que no sea q_1. En la figura 9.5b hemos dibujado lo que se podría considerar el caso "normal". En esta figura, la caída de w

provoca que el *CMg* se desplace hacia la derecha hasta *CMg*′. Por tanto, el nivel de producción que maximiza las ganancias aumenta de q_1 a q_2. La condición para maximizar las ganancias ($P = CMg$) ahora queda satisfecha en un nivel más alto de producción. Si volvemos a la figura 9.5a se verá que este aumento de la producción provocará que la empresa demande incluso más l, siempre y cuando l no sea un bien inferior (véase más adelante). El resultado, tanto del efecto sustitución como del efecto producción, será que la elección de factores se mueva al punto C en el mapa de isocuantas de la empresa. Ambos efectos hacen que aumente la cantidad de trabajo contratada ante una disminución del salario real.

El análisis de la figura 9.5 supone que el precio de mercado (o el ingreso marginal si éste no es igual al precio) del bien producido permanece constante. Este supuesto sería adecuado si sólo una de las empresas de la industria registrara una disminución de sus costos de trabajo por unidad. Sin embargo, si (como parece más probable) la disminución se produjera en toda la industria, entonces sería necesario un análisis ligeramente distinto. En este caso, las curvas de costos marginales de *todas* las empresas se desplazarían hacia fuera y, por tanto, la curva de oferta de la industria también se desplazaría. Si suponemos que la demanda tiene pendiente negativa, entonces ello llevará a una disminución del precio del producto. La producción de la industria y la de la empresa típica seguirían aumentando y, como antes, contratarían más trabajo.

Efectos cruzados en los precios

Hemos demostrado que, al menos en los casos sencillos, $\partial l/\partial w$ es contundentemente negativa; es decir, el efecto sustitución *y* el efecto producción llevan a la empresa a contratar más trabajo cuando el salario disminuye. La figura 9.5 debería dejar en claro que no es posible hacer una afirmación contundente sobre la respuesta de la utilización de capital ante una variación del salario. Es decir, el signo de $\partial k/\partial w$ no es contundente. En el caso simple de dos factores, una disminución del salario hará que la empresa sustituya el capital; es decir, utilizará menos capital para producir un determinado nivel de producción. Sin embargo, el efecto producción provocará que demande más capital, debido a su plan de incrementar la producción. Por tanto, en este caso, el efecto sustitución y el efecto producción operan en sentido opuesto y, por ello, no es posible llegar a una conclusión contundente sobre el signo de $\partial k/\partial w$.

Un resumen del efecto sustitución y el efecto producción

Podemos resumir el resultado de nuestro análisis con el siguiente principio:

PRINCIPIO DE OPTIMIZACIÓN

Efecto sustitución y efecto producción en la demanda de factores. Cuando el precio de un factor de producción disminuye, dos efectos provocan que aumente la cantidad demandada de ese factor:

1. El *efecto sustitución* provoca que la fabricación de un nivel de producción utilice mayor cantidad del factor cuyo precio disminuyó, y
2. Esta disminución de los costos provoca que se venda mayor cantidad del bien, creando así un *efecto producción* adicional que aumenta la demanda del factor.

En el caso de un incremento en el precio del factor de producción, tanto el efecto sustitución como el efecto producción hacen que disminuya la cantidad demandada del factor.

A continuación se presenta un planteamiento más detallado de estos conceptos mediante un planteamiento matemático para el análisis.

Un planteamiento matemático

Nuestro planteamiento matemático del efecto sustitución y el efecto producción que se deben a una variación del precio de un factor sigue el mismo camino que se utiliza para estudiar el efecto de los cambios de precios en la teoría de consumo. El resultado final es una ecuación tipo Slutsky similar a la que se derivó en el capítulo 5. Sin embargo, la ambigüedad que introduce la paradoja de Giffen en la teoría de la demanda de consumo no se presenta en este caso.

Podemos empezar recordando que tenemos dos conceptos de demanda para un factor cualquiera (por decir, el trabajo): 1) la demanda condicionada de trabajo, denotada por $l^c(v, w, q)$, y 2) la demanda sin condiciones del trabajo, denotada por $l(P, v, w)$. En la elección del factor trabajo que maximiza las ganancias, estos dos conceptos coinciden en cuanto a la cantidad de trabajo contratado:

$$l(P, v, w) = l^c(v, w, q). \tag{9.45}$$

Si diferenciamos esta identidad con respecto al salario de mercado se obtendrá

$$\frac{\partial l(P, v, w)}{\partial w} = \frac{\partial l^c(v, w, q)}{\partial w} + \frac{\partial l^c(v, w, q)}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial w}. \tag{9.46}$$

Por tanto, podemos descomponer en dos el efecto total que una variación del salario tiene en el trabajo demandado: 1) la variación de la demanda de trabajo manteniendo q constante (el efecto sustitución), y 2) la variación de la demanda de trabajo debida a una variación del nivel de producción (el efecto producción). El primero de estos dos efectos es, evidentemente, negativo, debido a la convexidad de las isocuantas de la empresa. Para poder estudiar el signo del segundo efecto, veamos el análisis cuasi matemático siguiente, el cual muestra exactamente cómo la variación del salario afecta la producción:

$$\textbf{Efecto producción} = \frac{\partial l^c}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial w} = \frac{\partial l^c}{\partial q} \cdot \frac{\partial q(P = CMg)}{\partial CMg} \cdot \frac{\partial CMg}{\partial w}. \tag{9.47}$$

Ahora $\partial q/\partial CMg$ es claramente negativa; es decir, en el caso de un precio de mercado dado, el desplazamiento hacia arriba de la curva de costo marginal provocará que la empresa produzca menos. Para un bien normal tanto $\partial l^c/\partial q$ y ∂CMg serán positivas, de modo que el efecto producción definitivamente será negativo. Sin embargo, incluso en el molesto caso de un factor inferior, la nota 9 al pie de página, en el capítulo 8, muestra que estas dos derivadas serán negativas, de modo que su producto será positivo. Por tanto, incluso en el caso de bienes inferiores el efecto producción será negativo.

Así, nuestro desarrollo matemático respalda el análisis gráfico de la figura 9.5. El efecto que un aumento en el precio de un factor tiene en la demanda de ese factor es, definitivamente, negativo. Dada la hipótesis de maximización de las ganancias, las rarezas como la paradoja de Giffen no pueden ocurrir. La descomposición de la demanda del factor planteada en la ecuación 9.46 también ofrece un camino muy útil para estudiar el efecto de las variaciones de los precios de los factores, como muestra el ejemplo siguiente.

Una descomposición de la demanda de factores en el efecto sustitución y el efecto producción

Para poder estudiar la demanda factorial tenemos que empezar por una función de producción que tiene dos características: 1) la función debe permitir la sustitución de capital por trabajo (porque la sustitución es parte importante del caso), y 2) la función de producción debe exhibir costos marginales crecientes (para poder satisfacer las condiciones de segundo orden para maximizar las ganancias). Una función que satisface estas condiciones es una función Cobb-Douglas con tres factores, en cuyo caso mantenemos fijo uno de los factores. Por tanto, dejemos que $q = f(k, l, g) = k^{0.25}l^{0.25}g^{0.5}$, donde k y l son los conocidos factores de capital y trabajo y g es el tercer factor (tamaño de la fábrica) que mantendremos constante en $g = 16$ (¿metros cuadrados?) durante todo nuestro análisis. Por tanto, la función de producción a corto plazo es $q = 4k^{0.25}l^{0.25}$. Suponemos que la fábrica sólo puede ser alquilada a un costo de r por metro cuadrado por periodo. Para estudiar la demanda, por decir, del factor trabajo, necesitamos la función de los costos totales y la función de ganancias que implica esta función de producción. Este autor se ha apiadado de usted, y ha calculado las funciones como

$$C(v, w, r, q) = \frac{q^2 v^{0.5} w^{0.5}}{8} + 16r \tag{9.48}$$

y

$$\Pi(P, v, w, r) = 2P^2 v^{-0.5} w^{-0.5} - 16r.$$

Como era de esperar, los costos del factor fijo (g) entran como una constante en estas ecuaciones y dichos costos tendrán muy poco que hacer en nuestro análisis.

(*continúa*)

EJEMPLO 9.5 *CONTINUACIÓN*

Resultados de la envolvente

Podemos derivar la relación entre la demanda y el trabajo a partir de estas dos funciones por medio de la diferenciación:

$$l^c(v, w, r, q) = \frac{\partial CT}{\partial w} = \frac{q^2 v^{0.5} w^{-0.5}}{16} \tag{9.49}$$

y

$$l(P, v, w, r) = -\frac{\partial \Pi}{\partial w} = P^2 v^{-0.5} w^{-1.5}.$$

Estas funciones ya sugieren que la variación del salario tiene un efecto en la demanda total de trabajo más grande que el efecto de la demanda coyuntural de trabajo, porque el exponente de w es más negativo en la ecuación del total de la demanda. Es decir, el efecto producción seguramente también tiene un papel en este caso. Para verlo directamente, recurrimos a algunas cifras.

Ejemplo numérico. Empecemos de nueva cuenta con los valores que hemos supuesto para varios ejemplos anteriores: $v = 3$, $w = 12$ y dejemos que $P = 60$. Primero calculemos qué producción elegirá la empresa en esta situación. Para ello, necesitamos la función de su oferta:

$$q(P, v, w, r) = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = 4Pv^{-0.5} w^{-0.5}. \tag{9.50}$$

Con esta función y con los precios que hemos elegido, el nivel de producción que maximiza las ganancias de la empresa es (sorpresa) $q = 40$. Con estos precios y un nivel de producción de 40, las dos funciones de demanda de la ecuación 9.49 predicen que la empresa contratará $l = 50$. Dado que en este caso la *TTS* está determinada por k/l, también sabemos que $k/l = w/v$, de modo que, con estos precios $k = 200$.

Supongamos ahora que el salario aumenta a $w = 27$ pero que los otros precios no sufren cambio alguno. La función de oferta de la empresa (ecuación 9.50) muestra que ahora producirá $q = 26.67$. El aumento del salario desplaza la curva de costos marginales de la empresa hacia la izquierda y, con un precio de producción constante, esto provoca que la empresa produzca menos. Para fabricar esta producción, podemos utilizar la función de la demanda o la del trabajo para demostrar que la empresa contratará $l = 14.8$. La contratación de capital también disminuirá a $k = 133.3$ debido a la ostensible disminución de la producción.

Podemos descomponer la disminución de contratación de trabajo de $l = 50$ a $l = 14.8$ en el efecto sustitución y el efecto producción si se utiliza la función de la demanda coyuntural. Si la empresa hubiera seguido produciendo $q = 40$ a pesar del aumento de salario, la ecuación 9.49 muestra que habría utilizado $l = 33.33$. El factor capital habría aumentado a $k = 300$. Dado que mantenemos la producción constante a su nivel inicial de $q = 40$, estos cambios representan los efectos sustitución de la empresa ante el salario más alto.

La disminución de la producción que se necesita para restaurar la maximización de las ganancias lleva a la empresa a reducir la producción. Al hacerlo disminuye sustancialmente los factores que utiliza. Nótese, en particular, que en este ejemplo el aumento de salario no sólo provoca que la cantidad de trabajo empleado disminuya notablemente, sino que también provoca que el capital empleado disminuya debido al importante efecto producción.

Pregunta: ¿Los cálculos de este problema cómo se verían afectados si todas las empresas hubieran registrado un aumento de salario? ¿La disminución de la demanda de trabajo (y capital) sería mayor o menor que la que hemos encontrado aquí?

RESUMEN

En este capítulo hemos estudiado la decisión, relativa a la oferta, que tomará la empresa para maximizar sus ganancias. Nuestro objetivo general era demostrar cómo esta empresa responde a las señales de precios que provienen del mercado. Para tal efecto, obtuvimos una serie de resultados analíticos:

- Para maximizar las ganancias, la empresa debe optar por un nivel de producción en el cual el ingreso marginal (el ingreso que recibe de la venta de una unidad adicional) sea igual al costo marginal (el costo de producir una unidad más).
- Si una empresa es tomadora de precios, entonces sus decisiones sobre la cantidad que producirá no afectarán al precio de su producto, por lo cual el ingreso marginal está dado por el precio. Sin embargo, si la demanda del producto de la empresa tiene una pendiente negativa, ésta sólo podrá vender mayor cantidad a un precio más bajo. En este caso, el ingreso marginal será inferior al precio e incluso podría ser negativo.
- El ingreso marginal y la elasticidad precio de la demanda se relacionan mediante la fórmula

$$IMg = P\left(1 + \frac{1}{e_{q,p}}\right),$$

  donde P es el precio de mercado de la producción de la empresa y $e_{q,p}$ es la elasticidad precio de la demanda de su producto.
- La curva de oferta de una empresa tomadora de precios, que maximiza las ganancias, está determinada por la parte de su curva de costos marginales, con pendiente positiva, que queda por encima del punto mínimo de la curva del costo promedio variable (CPV). Si el precio está por debajo del CPV, mínimo, la elección de la empresa que maximiza sus ganancias será cerrar sus puertas y no producir.
- Podemos calcular las reacciones de la empresa ante los diversos cambios de precios que afronta si empleamos su función de ganancias, $\Pi(P, v, w)$. Dicha función muestra las ganancias máximas que puede obtener la empresa dado el precio de su producto, los precios de sus factores y su tecnología para la producción. La función de ganancias da por resultado una envolvente especialmente útil. La diferenciación con respecto a los precios de mercado da por resultado una función de oferta, mientras que la diferenciación con respecto al precio de un factor da por resultado la función de demanda (negativa) de ese factor.
- Las variaciones en el precio de mercado a corto plazo dan por resultado cambios de la rentabilidad de la empresa a corto plazo y podemos medirlos gráficamente con los cambios de la cuantía del excedente del productor. También podemos utilizar la función de ganancias para calcular las variaciones del excedente del productor.
- La maximización de las ganancias nos ofrece una teoría de la demanda coyuntural factorial. La empresa contratará un factor cualquiera hasta el punto en el cual el ingreso marginal del producto sea igual a su precio de mercado por unidad. Los aumentos en el precio de un factor provocarán el efecto sustitución y el efecto producción, los cuales llevarán a la empresa a disminuir la cantidad que contrata de ese factor.

PROBLEMAS

9.1

El negocio de Juan, Podadores de Jardines, es una pequeña empresa que actúa como tomadora de precios (es decir, $IMg = P$). El precio de mercado de un corte de césped es de \$20 por acre. Los costos de Juan están determinados por

$$\textbf{total de costos} = 0.1q^2 + 10q + 50,$$

donde q = número de acres que Juan decide cortar por día.

a. ¿Cuántos acres debe cortar Juan para maximizar sus ganancias?
b. Calcule la ganancia máxima diaria de Juan.
c. Elabore una gráfica con estos resultados y muestre la curva de oferta de Juan.

9.2

¿Un impuesto de suma única sobre las ganancias afectaría la cantidad de producción que maximiza las ganancias? ¿Qué ocurriría con un impuesto proporcional sobre las ganancias? ¿Con un impuesto gravado sobre cada unidad? ¿Con un impuesto sobre el factor trabajo?

9.3

Este problema se refiere a la relación entre la curva de demanda y la de ingreso marginal para unas cuantas formas de funciones. Demuestre que:

a. En el caso de una curva de demanda lineal, la curva del ingreso marginal bisecciona la distancia entre el eje vertical y la curva de demanda a un precio cualquiera.

b. En el caso de una curva de demanda lineal, la distancia vertical entre la curva de demanda y la de ingreso marginal es $-1/b \cdot q$, donde b (<0) es la pendiente de la curva de demanda.

c. En el caso de una curva de demanda con elasticidad constante de forma $q = aP^b$, la distancia vertical entre la curva de demanda y la de ingreso marginal es una proporción constante de la altura de la curva de demanda, donde esta constante depende de la elasticidad precio de la demanda.

d. En el caso de una curva con pendiente negativa, podemos calcular la distancia vertical entre la curva de demanda y la de ingreso marginal, en un punto cualquiera, si utilizamos una aproximación lineal de la curva de demanda en ese punto y aplicando el procedimiento descrito en la sección b.

e. Elabore una gráfica con los resultados de los incisos anteriores de este problema.

9.4

Artefactos Universales elabora productos de gran calidad en su fábrica de Gulch, Nevada, para venderlos en todo el mundo. La función de costos de la producción total de artefactos (q) está determinada por

$$\text{total de costos} = 0.25q^2.$$

Los artefactos sólo tienen demanda en Australia (donde la curva de demanda está determinada por $q = 100 - 2P$) y Laponia (donde la curva de demanda está determinada por $q = 100 - 4P$). Si Artefactos Universales puede controlar las cantidades ofertadas en cada mercado, ¿cuántas debe vender en cada lugar para maximizar sus ganancias totales? ¿Qué precio debe fijar en cada mercado?

9.5

La función de producción de una empresa que se dedica a armar calculadoras está determinada por

$$q = 2\sqrt{l},$$

donde q es la producción de calculadoras terminadas y l representa las horas del factor trabajo. La empresa es tomadora de precios para las calculadoras (que se venden a P) y también para los trabajadores (que se contratan a un salario de w por hora).

a. ¿Cuál es la función del total de costos de esta empresa?

b. ¿Cuál es la función de ganancias de esta empresa?

c. ¿Cuál es la función de oferta de las calculadoras armadas [$q(P,w)$]?

d. ¿Cuál es la demanda de la empresa para la función del trabajo [$l(P,w)$]?

9.6

El mercado de caviar de primera calidad depende del clima. Si hace buen tiempo, entonces habrá muchas fiestas elegantes y el caviar se venderá a \$30 la libra. Si hace mal tiempo, el caviar se venderá a sólo \$20 la libra. El caviar producido esta semana no se conserva hasta la siguiente. Un pequeño productor de caviar tiene la función de costos determinada por

$$CT = \tfrac{1}{2}q^2 + 5q + 100,$$

donde q es la producción semanal de caviar. El productor debe tomar las decisiones relativas a la producción antes de saber cómo estará el clima (y el precio del caviar), pero sí sabe que la probabilidad de que haga buen o mal tiempo es de 0.5.

a. ¿Cuánto caviar debe producir esta empresa si quiere maximizar el valor esperado de sus ganancias?

b. Suponga que el propietario de esta empresa tiene una función de utilidad de forma

$$\textbf{utilidad} = \sqrt{\pi},$$

donde π son las ganancias semanales. ¿Cuál es la utilidad esperada en razón de la estrategia de producción definida en el inciso a?

c. ¿El propietario de esta empresa puede obtener una mayor utilidad de las ganancias si produce un poco más que las cantidades especificadas en los incisos anteriores?

d. Suponga que esta empresa pudiera predecir el precio de la semana entrante, pero que no lo puede afectar. En este caso, ¿qué estrategia maximizaría las ganancias esperadas? ¿A cuánto ascenderían las ganancias esperadas?

9.7

La Escuela de Maquinaria Pesada Acme enseña a los estudiantes a manejar maquinaria para la construcción. La cantidad de alumnos que la escuela puede preparar por semana está determinada por $q = 10 \min(k, l)^{\gamma}$, donde k es la cantidad de excavadoras que la empresa renta por semana, l es la cantidad de instructores que contrata por semana y γ es un parámetro que indica los rendimientos a escala de esta función de producción.

a. Explique por qué, en este caso, para poder desarrollar un modelo que maximice las ganancias es necesario que $0 < \gamma < 1$.

b. Suponiendo que $\gamma = 0.5$, calcule las funciones de ganancias y del total de costos de esta empresa.

c. Si $v = 1000$, $w = 500$ y $P = 600$, ¿cuántos alumnos preparará la empresa y a cuánto ascenderán sus ganancias?

d. Si el precio que los alumnos están dispuestos a pagar aumenta a $P = 900$, ¿cuánto variarán las ganancias?

e. Elabore una gráfica de la curva de oferta de plazas para alumnos de Acme y demuestre que es posible mostrar en la gráfica el aumento de ganancias calculado en el inciso d.

9.8

¿Cómo esperaría usted que un aumento en el precio del producto, P, afectara la demanda del factor capital y el factor trabajo?

a. Explique, en forma gráfica, por qué si ninguno de los dos factores es inferior queda claro que un aumento de P no disminuirá la demanda de ninguno de los dos factores.

b. Demuestre que las funciones de demanda de factores que podemos derivar en el caso Cobb-Douglas sirven para corroborar el supuesto de la gráfica del inciso a.

c. Utilice la función de producción para demostrar que la presencia de factores inferiores provocaría que el efecto de P en la demanda de factores fuera ambiguo.

9.9

Con una función de producción CES con $q = (k^{\rho} + l^{\rho})^{\gamma/\rho}$ podemos emplear muchas operaciones algebraicas para calcular la función de producción como $\prod(P, v, w) = KP^{1/(1-\gamma)} (v^{1-\sigma} + w^{1-\sigma})^{\gamma/(1-\sigma)(\gamma-1)}$, donde $\sigma = 1/(1-\rho)$ y K es una constante.

a. Si usted es muy sufrido (o si a su profesor le encantan los castigos), demuestre que la función de ganancias adopta esta forma; el camino más fácil para hacerlo tal vez es partir de la función de costos con CES del ejemplo 8.2.

b. Explique por qué esta función de ganancias proporciona una representación razonable del comportamiento de la empresa sólo en el caso de $0 < \gamma < 1$.

c. Explique el papel que desempeña la elasticidad de sustitución (σ) en esta función de ganancias.

d. ¿Cuál es la función de oferta en este caso? ¿La elasticidad σ cómo determina la medida en que dicha función cambia cuando varían los precios de los factores?

e. Derive las funciones de demanda de los factores para este caso. ¿El tamaño de σ cómo afecta estas funciones?

9.10

Podemos emplear el teorema de Young y los resultados de la envolvente de este capítulo para generar algunos resultados muy útiles.

a. Demuestre que $\partial l(P, v, w)/\partial v = \partial k(P, v, w)/\partial w$. Interprete este resultado.

b. Utilice el resultado del inciso a para demostrar que un impuesto sobre unidad de trabajo afectaría el factor capital.

c. Demuestre que $\partial q/\partial w = -\partial l/\partial P$. Interprete este resultado.

d. Utilice el resultado del inciso c para explicar cómo un impuesto sobre unidad del factor trabajo afectaría la cantidad ofertada.

LECTURAS RECOMENDADAS

Ferguson, C. E. *The Neoclassical Theory of Production and Distribution,* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1969.
Presenta un análisis muy completo del efecto producción en la demanda de factores. También demuestra que la posibilidad de sustitución afecta muchos de los resultados que contiene este capítulo.

Hicks, J. R. *Value and Capital,* Oxford University Press, Oxford, 1947.
El apéndice analiza con detenimiento el concepto de la complementariedad de los factores.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory,* Oxford University Press, Nueva York, 1995.
Una elegante introducción a la teoría de la producción empleando vectores y notaciones matriciales; esto permite una cantidad arbitraria cualquiera de insumos y producciones.

Samuelson, P. A. *Foundations of Economic Analysis,* Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947.
Uno de los primeros planteamientos de la idea de la función de ganancias y una explicación estupenda de las consecuencias que los rendimientos a escala constantes tienen en el equilibrio del mercado.

Sydsaeter, K., A. Strom y P. Berck. *Economists' Mathematical Manual,* 3a. ed., Springer-Verlag, Berlín, 2000.
El capítulo 25 presenta fórmulas de una serie de funciones de demanda de factores y de ganancias.

Varian, H. R. *Microeconomic Analysis,* 3a. ed., W.W. Norton, Nueva York, 1992.
Ofrece un capítulo sobre la función de ganancias. Varian ofrece un planteamiento novedoso para comparar las respuestas a corto y a largo plazos empleando el principio de LeChatelier.

AMPLIACIONES

Aplicaciones de la función de ganancias

En el capítulo 9 se presentó la función de ganancias, la cual resume la "línea de fondo" de la empresa, toda vez que depende de los precios que tienen sus productos y sus insumos. En estas ampliaciones se demuestra cómo algunas propiedades de la función de ganancias han sido utilizadas para calcular importantes cuestiones empíricas y teóricas.

A9.1 Convexidad y estabilización de precios

La convexidad de la función de ganancias implica que una sola empresa, por lo general, preferirá que su valor medio sea un precio variable del producto en lugar de uno estabilizado (por ejemplo, por medio de la intervención del gobierno). El resultado va en contra del sentido de la política económica en muchos países en vías de desarrollo, la cual tiende a subrayar la idoneidad de estabilizar los precios de las materias primas. Varios factores explican esta aparente paradoja. En primer término, muchos planes para "estabilizar" los precios de las materias primas son, en realidad, planes para incrementar el nivel promedio de estos precios. Por ejemplo, ésta suele ser la meta principal de los cárteles de productores. En segundo, el resultado de la convexidad se aplica para una sola empresa tomadora de precios. Desde la perspectiva del mercado completo, los ingresos totales provenientes de precios estabilizados o fluctuantes dependerá de la naturaleza de la demanda del producto.[1] Una tercera complicación que debemos abordar al evaluar los programas de estabilización de precios es la de las expectativas que tiene la empresa respecto a los precios futuros. Cuando los bienes se pueden almacenar, las decisiones para una producción óptima, cuando existen programas de estabilización de precios, pueden ser bastante complejas. Por último, el objetivo de los programas de estabilización de precios, en algunas situaciones, puede estar más centrado en reducir los riesgos para los consumidores de bienes básicos, como los alimentos, que en el bienestar de los productores. No obstante, esta propiedad fundamental de la función de ganancias sugiere tener cautela cuando diseñamos programas de estabilización de precios que, a largo plazo, tienen efectos deseables para los productores. Encontrará un amplio análisis teórico de estas cuestiones en Newbury y Stiglitz (1981).

A9.2 Excedente del productor y costos de las enfermedades a corto plazo

Las epidemias alteran seriamente los mercados y, a corto plazo, conducen a pérdidas en los excedentes del productor y del consumidor. En el caso de las empresas, podemos calcularlas como la pérdida de ganancias, a corto plazo, que se derivan de que los precios de sus productos son transitoriamente más bajos o de los precios que debe pagar por los factores que son temporalmente más altos. Harrington, Krupnick y Spofford (1991) ofrecen un conjunto particularmente amplio de estos cálculos en su detallado estudio de la epidemia de amibiasis por *giardia lambia* ocurrida en Pensilvania en 1983. Si bien los consumidores sufrieron la mayor parte de las pérdidas registradas debido a esta epidemia, los autores calcularon que los restaurantes y bares de la zona afectada también sufrieron importantes pérdidas. Estos negocios registraron pérdidas debido a que bajó su actividad, pero también porque, para operar, tuvieron que usar temporalmente agua embotellada y otros factores de alto costo. Los cálculos cuantitativos de estas pérdidas están basados en las funciones de ganancias que describen los autores.

A9.3 Funciones de ganancias y medición de la productividad

En el capítulo 7 se demostró que, por lo general, medimos el aumento total de la productividad de los factores como

$$G_A = G_q - s_k G_k - s_l G_l, \text{ donde } G_x = \frac{dx/dt}{x} = \frac{d \ln x}{dt}$$

y s_k, s_l son las partes del total de costos correspondientes al capital y el trabajo, respectivamente. Un problema para efectuar este cálculo es que requiere que se midan las variaciones del uso de

[1] En concreto, en el caso de una función de demanda con elasticidad constante, el ingreso total será una función cóncava del precio si la demanda es inelástica, pero convexa si la demanda es elástica. Por tanto, en el caso de una demanda elástica, los productores obtendrán ingresos totales más altos en razón de un precio fluctuante que de un precio estabilizado en su valor medio.

factores con el transcurso del tiempo y ésta es una medición que puede resultar especialmente difícil en el caso del capital. La función de ganancias ofrece un camino alternativo para calcular el mismo fenómeno, pero sin tener que estimar el uso de factores directamente. Para entender la lógica de este planteamiento, veamos la función de producción que queremos analizar, $q = f(k, l, t)$. Deseamos saber cómo cambiaría la producción con el transcurso del tiempo, incluso si los niveles de factores se mantuvieran constantes. Es decir, queremos calcular $\partial \ln q/\partial t = f_t/f$. Nótese el uso de la diferenciación parcial en esta expresión; es decir, queremos conocer el cambio proporcional que registrará f con el transcurso del tiempo cuando los otros insumos se mantienen constantes. Si la función de producción exhibe rendimientos a escala constantes y si la empresa es precio aceptante, de factores y también de su producción, entonces es bastante fácil[2] demostrar que esta derivada parcial es la medida del cambio de la productividad total de los factores que queremos conocer; es decir, $G_A = f_t/f$. Ahora veamos la función de ganancias, $\Pi(P, v, w, t)$. Por definición, las ganancias están determinadas por

$$\pi = Pq - vk - wl = Pf - vk - wl,$$

de modo que

$$\frac{\partial \ln \Pi}{\partial t} = \frac{Pf_t}{\Pi}$$

y, por ello,

$$G_A = \frac{f_t}{f} = \frac{\Pi}{Pf} \cdot \frac{\partial \ln \Pi}{\partial t} = \frac{\Pi}{Pq} \cdot \frac{\partial \ln \Pi}{\partial t}. \quad \text{(i)}$$

En consecuencia, en este caso especial, podemos inferir los cambios de la productividad total de los factores considerando la parte de las ganancias que les corresponde del total de ingresos y el tiempo de la derivada del logaritmo de esta función de producción. Sin embargo, podemos generalizar la conclusión fácilmente a casos en los cuales los rendimientos a escala no son constantes e incluso a empresas que producen muchos productos (véase, por ejemplo, Kumbhakar, 2002). Por tanto, para situaciones en las cuales los precios de los factores y los productos son más fáciles de obtener que las cantidades de los factores, el uso de la función de ganancias representa una forma atractiva de proceder.

Cabe mencionar tres ejemplos de este uso de la función de ganancias, Karagiannis y Mergos (2000) recalculan los grandes incrementos en la productividad total de los factores que ha registrado la agricultura de Estados Unidos en los pasados 50 años empleando el planteamiento de la función de ganancias. Encuentran resultados que, en general, son congruentes con los que utilizan medidas más convencionales. Huang (2000) adopta el mismo planteamiento para estudiar la banca de Taiwán y encuentra aumentos sustanciales en la productividad que no podría haber detectado empleando otros métodos. Por último, Coelli y Perelman (2000) utilizan el enfoque de una función de ganancias modificada para calcular la eficiencia relativa de los ferrocarriles europeos. No es extraño que hayan encontrado que los ferrocarriles holandeses son los más eficientes de Europa, mientras que los menos eficientes son los italianos.

Referencias

Coelli, T. y S. Perelman. "Technical Efficiency of European Railways: A Distance Function Approach", *Applied Economics*, diciembre de 2000, pp. 1967-1976.

Harrington, W. A., J. Krupnick y W. O. Spofford. *Economics and Episodic Disease: The Benefits of Preventing a Giardiasis Outbreak*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1991.

Huang, T. "Estimating X-Efficiency in Taiwanese Banking Using a Translog Shadow Profit Function", *Journal of Productivity Analysis*, noviembre de 2000, pp. 225-245.

Karagiannis, G. y G. J. Mergos. "Total Factor Productivity Growth and Technical Change in a Profit Function Framework", *Journal of Productivity Analysis*, julio de 2000, pp. 31-51.

Kumbhakar, S. "Productivity Measurement: A Profit Function Approach", *Applied Economics Letters*, abril de 2002, pp. 331-334.

Newbury, D. M. G. y J. E. Stiglitz. *The Theory of Commodity Price Stabilization*, Oxford University Press, Oxford, 1981.

[2]La comprobación empieza por diferenciar la función de producción con relación al tiempo, logarítmicamente, como $G_q = d \ln q/dt = e_{q,k}G_k + e_{q,l}G_l + f_t/f$ después, reconociendo que, habiendo rendimientos a escala constantes y un comportamiento tomador de precios $e_{q,k} = S_k$ $e_{q,l} = s_l$.

Parte 4

MERCADOS EN COMPETENCIA PERFECTA

En las partes 2 y 3 desarrollamos modelos que explicaban la demanda de bienes por parte de individuos que maximizan su utilidad y la oferta de bienes por parte de empresas que maximizan sus beneficios (o ganancias). En esta parte uniremos estas dos líneas de análisis para describir el proceso que determina los precios. Nos centraremos en un modelo concreto para determinar el precio: el modelo de la competencia perfecta. Este modelo parte del supuesto que, para cada bien, hay una cantidad de demandantes y de oferentes lo bastante grande como para que los dos sean tomadores de precios. En la parte 5 se ilustrarán algunos de los modelos que obtenemos al relajar el supuesto de precios fijos de la competencia perfecta, pero a lo largo de esta parte supondremos un comportamiento tomador de precios.

El capítulo 10 desarrolla el conocido modelo de equilibrio parcial para determinar los precios en mercados en competencia. El principal resultado es el diagrama de la oferta y la demanda "cruzada" marshalliana que se analizó por primera vez en el capítulo 1. Este modelo ilustra la perspectiva del equilibrio "parcial" para determinar los precios porque se centra tan sólo en un mercado.

El capítulo 11 prosigue el análisis de los modelos de equilibrio parcial de la competencia analizando algunas de las formas en que podemos aplicarlos. Se centra la atención específicamente en mostrar cómo podemos utilizar el modelo de la competencia para evaluar las consecuencias que los cambios de equilibrio en el mercado tienen para el bienestar de los agentes de ese mercado.

Si bien el modelo de equilibrio parcial de la competencia es bastante útil para estudiar un solo mercado en detalle, no resulta adecuado para analizar las relaciones entre mercados. Para poder captar estos efectos entre mercados es necesario desarrollar modelos de equilibrio "general" (tema que se analizará en el capítulo 12). Ahí se verá cómo podemos analizar una economía en su conjunto como si fuera un sistema de mercados interconectados que compiten y que determinan todos los precios simultáneamente. También se verá cómo podemos estudiar las consecuencias que la competencia perfecta tiene para el bienestar.

Capítulo 10

MODELO DE EQUILIBRIO PARCIAL EN COMPETENCIA PERFECTA

En este capítulo se describe el muy conocido modelo para determinar los precios en competencia perfecta que fuera desarrollado, originalmente, por Alfred Marshall a finales del siglo XIX. *Es decir, se presenta un análisis bastante completo del mecanismo de la oferta y la demanda en un solo mercado. Éste seguramente es el modelo empleado con mayor frecuencia para estudiar los precios.*

Demanda del mercado

En la parte 2 vimos cómo construir las funciones de demanda de los individuos, las cuales ilustran modificaciones en la cantidad de un bien que un individuo que maximiza su utilidad elige cuando el precio de mercado y otros factores cambian. Llegamos a la conclusión que, habiendo sólo dos bienes (x y y) podemos resumir la función de demanda (marshalliana) de un individuo como

$$\textbf{Cantidad demandada de } x = x(p_x, p_y, I). \qquad \textbf{(10.1)}$$

Ahora queremos demostrar que es posible sumar estas funciones de demanda para que reflejen la demanda de todos los individuos del mercado. Si utilizamos el subíndice i ($i = l, n$) para representar la función de demanda del bien x podremos definir la demanda total del mercado como

$$\textbf{Demanda de mercado de } X = \sum_{i=1}^{n} x_i(p_x, p_y, I_i). \qquad \textbf{(10.2)}$$

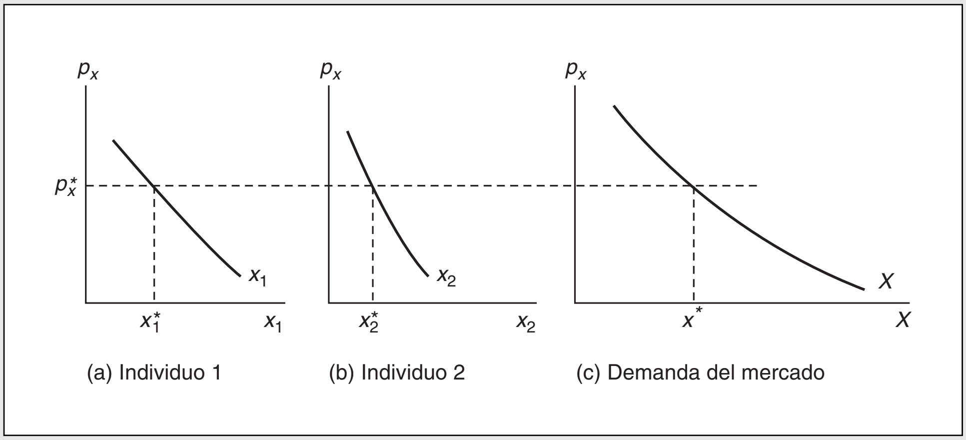
Nótense tres puntos de este planteamiento. En primer término, suponemos que todos los agentes de este mercado encuentran los mismos precios para los dos bienes. Es decir, p_x, y p_y entran en la ecuación 10.2 sin subíndices específicos para las personas. Por otra parte, el ingreso de cada persona entra en su función específica de demanda. La demanda de mercado no sólo depende del ingreso total de todos los agentes del mercado, sino también de cómo el ingreso se distribuye entre los consumidores. Por último, nótese que hemos utilizado una X mayúscula pera referirnos a la demanda de mercado, con una notación que pronto modificaremos ligeramente.

La curva de demanda del mercado

La ecuación 10.2 deja en claro que la cantidad total demandada de un bien no sólo depende de su precio, sino también de los precios de otros bienes y del ingreso de cada persona. Para construir la curva de demanda del mercado del bien X dejamos que p_x varíe, al mismo tiempo que se

FIGURA 10.1 **Construcción de una curva de demanda del mercado a partir de las curvas de demanda de los individuos**

Una curva de demanda del mercado es la "suma horizontal" de la curva de demanda de cada individuo. En cada precio, la cantidad demandada en el mercado es la suma de las cantidades que demanda cada individuo. Por ejemplo, en p_x^* la demanda del mercado es $x_1^* + x_2^* = x^*$.



mantienen constantes p_y y el ingreso de cada persona. La figura 10.1 muestra esta construcción para el caso simple con sólo dos consumidores en el mercado. En el caso de cada uno de los precios posibles de x, encontramos su punto en la curva de demanda del mercado de X sumando las cantidades que demanda cada persona. Por ejemplo, a un precio de p_x^* la persona 1 demanda x_1^* y la persona 2 demanda x_2^*. La cantidad total demandada en este mercado de dos personas es la suma de estas dos cantidades ($X^* = x_1^* + x_2^*$). Por tanto, el punto p_x^*, X^* es un punto en la curva de demanda del mercado de X. De esta misma manera podemos derivar otros puntos en la curva de demanda. Por tanto, la curva de demanda del mercado es una "suma horizontal" de la curva de demanda de cada individuo.[1]

Cambios en la curva de demanda del mercado

En consecuencia, la curva de demanda del mercado resume la relación, ceteris paribus, entre X y p_x. Es importante recordar que la curva es, en realidad, una representación bidimensional de una función con muchas variables. Los cambios en p_x dan por resultado movimientos a lo largo de la curva. Sin embargo, los cambios en uno de los otros determinantes de la demanda de X provocan que la curva se desplace a otra posición. Por ejemplo, un aumento general de los ingresos provocaría que la curva se desplace hacia la derecha (suponiendo que X es un bien normal), porque cada individuo optaría por comprar mayor cantidad de X a todos los precios. Asimismo, un aumento en p_Y provocaría el desplazamiento hacia la izquierda de la curva de demanda X hacia fuera si los individuos X y Y fueron considerados como sustitutos, pero desplazan la curva de demanda X hacia dentro si los bienes fueran considerados complementarios. Justificar todos estos desplazamientos a veces podría necesitar que volvamos a analizar las funciones de la demanda de los individuos que constituyen las relaciones del mercado, sobre todo cuando se analizan situaciones en las cuales cambia la distribución del ingreso, incrementando algunos ingresos, pero disminuyendo otros. Para no confundir las cosas, los economistas generalmente se reservan el término *cambio de la cantidad demandada* para un movimiento a lo largo de una curva fija de demanda en respuesta a un cambio en p_x. Por otra parte, dicen que un cambio en la posición de la curva de demanda es un "cambio de demanda".

[1]Construimos las curvas de demanda compensada de mercado exactamente de la misma manera, sumando la demanda compensada de cada individuo. Esta curva de demanda compensada de mercado mantendría constante la utilidad de cada persona.

EJEMPLO 10.1

Cambios en la demanda del mercado

Podemos ilustrar estas ideas con un conjunto simple de funciones lineales de la demanda. Supongamos que la demanda de naranjas del individuo 1 (x medida en docenas al año) está determinada por[2]

$$x_1 = 10 - 2p_x + 0.1I_1 + 0.5p_y, \tag{10.3}$$

donde

p_x = precio de las naranjas (dólares por docena)
I_1 = ingreso del individuo 1 (miles de dólares)
p_y = precio de las toronjas (sustituto cercano de las naranjas-dólares por docena).

La demanda de naranjas del individuo 2 está determinada por

$$x_2 = 17 - p_x + 0.05I_2 + 0.5p_y. \tag{10.4}$$

Por tanto, la función de demanda del mercado será

$$X(p_x, p_y, I_1, I_2) = x_1 + x_2 = 27 - 3p_x + 0.1I_1 + 0.05I_2 + p_y. \tag{10.5}$$

En este caso, el coeficiente del precio de las naranjas representa la suma de los coeficientes de los dos individuos, al igual que el coeficiente de los precios de la toronja. Lo anterior refleja el supuesto de que el mercado de las naranjas y el de las toronjas se caracterizan por la ley de un solo precio. Sin embargo, dado que los coeficientes del ingreso de los individuos son diferentes, la función de demanda depende de cómo se distribuya el ingreso entre ellos.

Para trazar la ecuación 10.5 en forma de curva de demanda del mercado debemos asumir valores para I_1, I_2 y p_y (porque la curva de demanda tan sólo refleja la relación bidimensional entre x y p_x). Si $I_1 = 40$, $I_2 = 20$ y $p_y = 4$, la curva de demanda del mercado estará determinada por

$$X = 27 - 3p_x + 4 + 1 + 4 = 36 - 3p_x, \tag{10.6}$$

o sea una simple curva lineal de demanda. Si el precio de las toronjas aumentara a $p_y = 6$, entonces la curva, suponiendo que los ingresos no cambian, se desplazaría hacia fuera a

$$X = 27 - 3p_x + 4 + 1 + 6 = 38 - 3p_x, \tag{10.7}$$

Mientras que un impuesto sobre el ingreso que tomó 10 (mil dólares) del individuo 1 y los transfirió al individuo 2 desplazaría la curva de demanda hacia la izquierda a

$$X = 27 - 3p_x + 3 + 1.5 + 4 = 35.5 - 3p_x \tag{10.8}$$

Porque el efecto marginal de los cambios en el ingreso del individuo 1 en las compras de naranjas es más grande. Todos estos cambios desplazan la curva de demanda en forma paralela porque, en este caso lineal, ninguno afecta el coeficiente de p_x de estos dos individuos. En todos los casos, un aumento para p_x de 0.10 (diez centavos) provocaría que X disminuyera 0.30 (docenas por año).

Pregunta: En este caso lineal, ¿cuándo podríamos expresar la demanda del mercado como función lineal del ingreso total ($I_1 + I_2$)? Por otra parte, supongamos que los coeficientes de p_y de estos dos individuos fueran diferentes. ¿Ello cambiaría el análisis en algún sentido fundamental?

[2]Usamos esta forma lineal para ilustrar algunos aspectos de la agregación. Sin embargo, es difícil defender esta forma teóricamente. Por ejemplo, no es homogénea de grado cero para todos los precios e ingresos.

Generalizaciones

Si bien nuestra construcción sólo se refiere a dos bienes y dos individuos, no es difícil generalizarla. Supongamos que hay n bienes (denotado por x_i, $i = 1, n$) cuyos precios son p_i, $i = 1, n$. Supongamos también que hay m individuos en la sociedad. La demanda del j-ésimo individuo por el i-ésimo bien dependerá de todos los precios y de I_j, o sea el ingreso de esta persona. Podemos denotar lo anterior con

$$x_{i,j} = x_{i,j}(p_1, \cdots p_n, I_j), \tag{10.9}$$

donde $i = 1, n$ y $j = 1, m$.

Con estas funciones de demanda de los individuos, las siguientes definiciones presentan los conceptos de la demanda del mercado:

DEFINICIÓN

Demanda del mercado. La *función de demanda del mercado* de un bien particular (X_i) es la suma de la demanda de cada individuo para ese bien:

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} x_{i,j}(p_1, \cdots p_n, I_j). \tag{10.10}$$

Construimos la *curva de demanda del mercado* de X_i con la función de demanda, variando p_i, y manteniendo constantes todos los demás determinantes de X_i. Suponiendo que la demanda de cada individuo tiene pendiente negativa, esta curva de demanda también tendrá demanda negativa.

Por supuesto que esta definición es tan sólo una generalización de nuestra explicación anterior, pero tres puntos garantizan que se repetirá. En primer término, la representación funcional de la ecuación 10.10 deja en claro que la demanda de X_i dependerá no sólo de p_i sino también de los precios de todos los demás bienes. Por tanto, cabe esperar que un cambio en uno de los otros precios desplace la curva de demanda a otra posición. En segundo, la notación de la función indica que la demanda de X_i dependerá de la distribución completa de los ingresos de los individuos. Si bien en muchas discusiones económicas es habitual que hablemos del efecto que los cambios del poder adquisitivo total agregado tienen en la demanda de un bien, este planteamiento podría ser una simplificación que lleva a equívocos, porque el efecto real que este cambio tenga en la demanda total dependerá precisamente de cómo se distribuyan los cambios de ingresos entre los individuos. Por último, es necesario mencionar el papel de los cambios de preferencias, si bien la notación que hemos empleado los podría ocultar un tanto. Hemos construido las funciones de demandas de los individuos partiendo del supuesto que las preferencias (representadas por mapas de curvas de indiferencia) permanecen fijas. Si las preferencias cambiaran, también cambiarían las funciones de demanda del mercado y de los individuos. Por tanto, queda claro que los cambios de preferencias modificarán las curvas de demanda del mercado. Sin embargo, muchos análisis económicos presuponen que estos cambios ocurren tan lentamente que podemos mantenerlos implícitamente constantes sin malinterpretar la situación.

Una aclaración sobre la notación

En este libro muchas veces se considerará un solo mercado. A efecto de simplificar la notación, en estos casos emplearemos la letra Q_D para referirnos a la cantidad de un bien particular demandado en dicho mercado y P para denotar el precio de mercado. Como siempre, cuando tracemos una curva de demanda en el plano Q–P estaremos aplicando el supuesto ceteris paribus. Si alguno de los factores mencionados en la sección anterior (otros precios, ingresos de los individuos o preferencias) cambiara, entonces la curva de demanda Q–P se desplazará, y debemos tener esa posibilidad en mente. Sin embargo, cuando consideremos las relaciones entre dos o más bienes, entonces volveremos a la notación que hemos venido utilizando hasta ahora (es decir, denotando los bienes con x y y o con x_i).

Elasticidad de la demanda del mercado

Cuando se utilice esta notación para la demanda del mercado, también se utilizará una notación compacta para la elasticidad precio de la función de demanda del mercado:

$$\textbf{Elasticidad precio de la demanda del mercado} = e_{Q,P} = \frac{\partial Q_D(P, P', I)}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_D}, \tag{10.11}$$

donde la notación tiene el propósito de recordarnos que la demanda de Q depende de muchos factores además de su propio precio, como los precios de otros bienes (P') y los ingresos de todos los posibles demandantes (I). Cuando se calcula la elasticidad del precio propio de la demanda del mercado se mantienen constantes estos otros factores. Como en el capítulo 5, esta elasticidad mide la respuesta proporcional de la cantidad demandada ante un cambio de 1% en el precio de un bien. La demanda del mercado también se caracteriza por ser elástica ($e_{Q,P} < -1$) o inelástica ($0 > e_{Q,P} > -1$). Muchos de los conceptos que vimos en el capítulo 5, como la elasticidad de precios cruzados de la demanda o la elasticidad ingreso de la demanda también se aplican directamente en el contexto de los mercados:[3]

$$\textbf{Elasticidad-precio cruzada de la demanda} = \frac{\partial Q_D(P, P', I)}{\partial P'} \cdot \frac{P'}{Q_D} \tag{10.12}$$

y

$$\textbf{Elasticidad-ingreso de la demanda} = \frac{\partial Q_D(P, P', I)}{\partial I} \cdot \frac{I}{Q_D}.$$

Dadas estas convenciones acerca de la demanda del mercado, pasaremos a un examen amplio de la oferta y el equilibrio del mercado en el modelo de competencia perfecta.

Tiempo de respuesta de la oferta

En el análisis de los precios en competencia perfecta es importante decidir cuánto durará el tiempo que se deje para que la *oferta responda* a los cambios de condiciones de la demanda. Los precios de equilibrio serán distintos si analizamos un periodo muy corto, en el cual la mayor parte de los factores son fijos, o si consideramos un proceso a muy largo plazo, en el cual es posible que nuevas empresas entren en una industria. Por esta razón, en economía, la fijación de precios se suele plantear en tres periodos: 1) el muy corto plazo, 2) el corto plazo y 3) el largo plazo. Si bien es imposible presentar una definición cronológica exacta de estos términos, la diferencia esencial que señalan se refiere a la naturaleza de la respuesta de la oferta que suponemos como posible. En el *muy corto plazo,* no hay respuesta de la oferta; es decir, la cantidad ofrecida es fija y no responde a las variaciones de la demanda. En el *corto plazo,* las empresas existentes pueden alterar la cantidad que ofrecen, pero ninguna nueva empresa puede entrar en la industria. En el *largo plazo,* las nuevas empresas pueden entrar en la industria, produciendo con ello una respuesta muy flexible de la oferta. En este capítulo se analizará cada una de estas posibilidades.

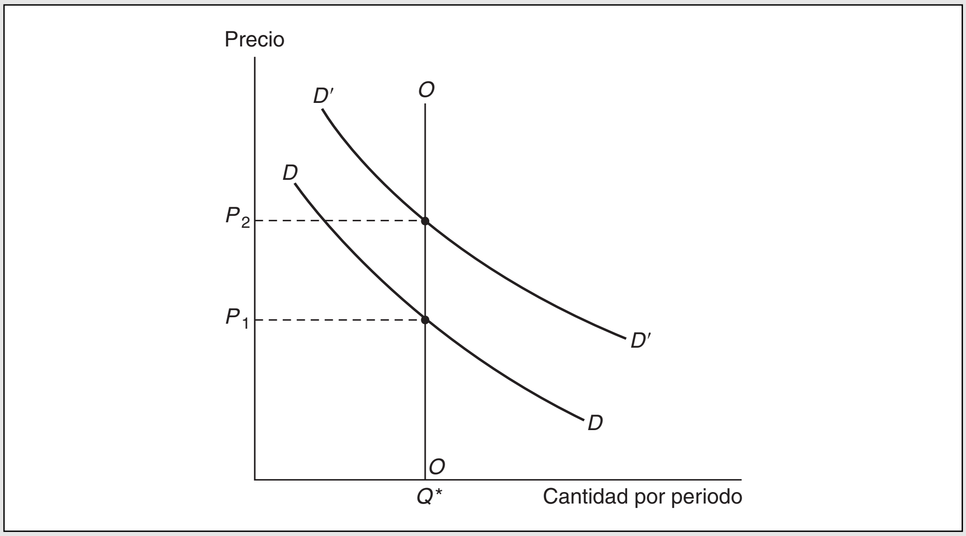
La fijación de precios en el muy corto plazo

En el muy corto plazo, o el *periodo de mercado,* no hay respuesta de la oferta. Los bienes ya están "en" el mercado y se deben vender a un precio que acepte el mercado. En esta situación, el precio sólo actúa como un instrumento para racionar la demanda. El precio se ajustará para vaciar el mercado de la cantidad que se debe vender dentro de dicho periodo. Si bien el precio de mercado puede dar una señal a los productores para periodos futuros, en el periodo corriente no cumple con esa función porque la producción del periodo corriente es fija. La figura 10.2 describe esta situación. La curva D representa la demanda del mercado. La oferta está fija en

[3]En muchas aplicaciones, la demanda de mercado del modelo está en términos per cápita y se considera que se refiere a la "persona típica". En estas aplicaciones también es frecuente emplear muchas de las relaciones entre las elasticidades que vimos en el capítulo 5. En las ampliaciones de este capítulo analizamos brevemente si es aceptable esta agregación de varios individuos.

FIGURA 10.2 **Fijación de precios en el muy corto plazo**

En el muy corto plazo, si la cantidad es fija, entonces el precio sólo actúa como un instrumento para racionar la demanda. Con una cantidad fija en Q^*, el precio P_1 prevalecerá en el mercado si D es la curva de demanda del mercado. A este precio, los individuos están dispuestos a consumir exactamente esa cantidad disponible. Si la demanda se desplazara hacia arriba hasta D', el precio de equilibrio del mercado aumentaría a P_2.



Q^*, y el precio que vacía el mercado es P_1. En P_1 los individuos están dispuestos a comprar todo lo que se ofrece en el mercado. Los vendedores se quieren deshacer de Q^* sea cual fuere el precio (supongamos que el bien en cuestión es perecedero y no valdrá nada si no se vende a muy corto plazo). Por tanto, P_1, Q^* es una combinación de equilibrio del precio-cantidad. Si la demanda se desplazara a D', el precio de equilibrio aumentaría a P_2, pero Q^* seguiría fija porque no es posible una respuesta de la oferta. Por tanto, en esta situación, la *curva de oferta* sería una línea recta vertical en el nivel de producción Q^*.

Para el caso de muchos mercados, el análisis del muy corto plazo no es demasiado útil. Esta teoría puede representar muy bien algunas situaciones en las cuales los bienes son perecederos o se deben vender en un día determinado, como en el caso de las subastas. De hecho, el estudio de las subastas saca a la luz algunos problemas de información que entraña llegar a los precios de equilibrio, mismos que se abordarán en el capítulo 15. Empero, las subastas son casos inusuales porque la oferta es fija. El caso mucho más habitual implica cierto grado de respuesta de la oferta ante cambios de la demanda. Cabe suponer que un aumento del precio aportará una cantidad adicional al mercado. En la parte restante de este capítulo se analizará este proceso.

Antes de iniciar nuestro análisis es necesario destacar que los aumentos de la cantidad ofrecida no provienen necesariamente de un incremento en la producción. En un mundo donde algunos bienes son duraderos (es decir, duran más de un periodo), los propietarios actuales de esos bienes los pueden ofrecer al mercado en cantidades que aumentan a medida que aumenta el precio. Por ejemplo, a pesar de que la oferta de los cuadros de Rembrandt es fija, no dibujaríamos la curva de oferta del mercado de estos cuadros como una recta vertical, como la que muestra la figura 10.2. A medida que el precio de los Rembrandt aumente, los individuos y los museos estarán cada vez más dispuestos a deshacerse de sus cuadros. Por tanto, desde el punto de vista del mercado, la curva de oferta de cuadros de Rembrandt tendrá una pendiente positiva, a pesar de que no se produzcan nuevos cuadros. Aplicaríamos un análisis similar en el caso de muchos tipos de bienes duraderos, como las antigüedades, los vehículos usados, los números pasados de la revista *National Geographic,* o las acciones de empresas, porque todos ellos tienen una oferta nominal "fija". Dado que nuestro mayor interés está en analizar cómo se relacionan la demanda y la producción, nos ocuparemos de estos casos brevemente en el capítulo 13.

Determinación de los precios a corto plazo

En el análisis del corto plazo, la cantidad de empresas que hay en una industria es fija. Estas empresas son capaces de ajustar la cantidad que producen para responder a los cambios de condiciones. Lo harán modificando los niveles en que emplean factores productivos que pueden alterar a corto plazo, por lo que aquí nos ocuparemos de esta decisión de oferta. Antes de iniciar el análisis, será conveniente que enunciemos explícitamente los supuestos de este modelo de competencia perfecta:

DEFINICIÓN

Competencia perfecta. Una *industria en competencia perfecta* es aquella que cumple los siguientes supuestos:

1. Hay una gran cantidad de empresas y cada una de ellas produce el mismo producto homogéneo.
2. Cada empresa intenta maximizar las utilidades.
3. Cada empresa toma el precio como dado; es decir, supone que sus actos no tienen efecto alguno en el precio de mercado.
4. Se supone que todos los agentes del mercado conocen los precios; es decir, la información es perfecta.
5. Las transacciones no tienen costo; los compradores y los vendedores no incurren en un costo por realizar los intercambios (para un análisis más exhaustivo de este supuesto y del anterior, véase el capítulo 19).

Ahora emplearemos estos supuestos para analizar cómo se determinan los precios a corto plazo.

La curva de oferta del mercado a corto plazo

En el capítulo 9 vimos cómo se construye la curva de oferta a corto plazo para una sola empresa que maximiza las utilidades. Para construir la curva de oferta del mercado, empezamos por reconocer que la cantidad de producto ofrecida a todo el mercado en el corto plazo es la suma de las cantidades ofrecidas por cada empresa. Dado que cada empresa utiliza el mismo precio de mercado para determinar cuánto producirá, la cantidad total que ofrecen al mercado todas las empresas dependerá, evidentemente, del precio. Se dice que esta relación entre precio y cantidad ofrecida es la *curva de oferta del mercado a corto plazo*. La figura 10.3 ilustra la construcción de la curva. En aras de la sencillez, supondremos que sólo hay dos empresas: A y B. Las figuras 10.3a y 10.3b ilustran las curvas de oferta a corto plazo (es decir, el costo marginal) de las empresas A y B. La curva de oferta del mercado que muestra la figura 10.3c es la suma horizontal de estas dos curvas. Por ejemplo, a un precio de P_1, la empresa A ofrece q_1^A, mientras que la empresa B está dispuesta a ofrecer q_1^B. Por tanto, a este precio, la oferta total del mercado está dada por Q_1, que es igual a $q_1^A + q_1^B$. Construimos los demás puntos de la curva de esta misma forma. Dado que la curva de oferta de cada empresa tiene pendiente positiva, la curva de oferta del mercado también tendrá pendiente positiva. La pendiente positiva refleja el hecho de que los costos marginales a corto plazo aumentarán a medida que las empresas intenten incrementar su producción.

Oferta del mercado a corto plazo

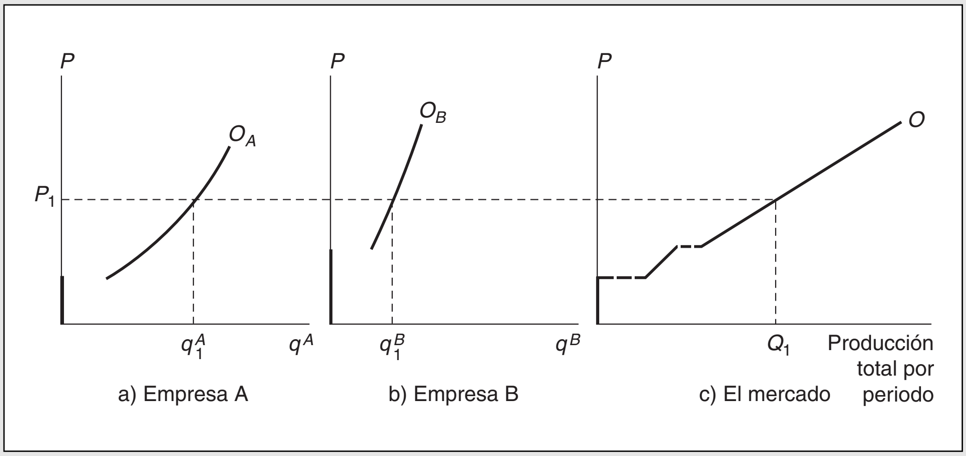
Por lo general, si $q_i\,(P, v, w)$ representa la función de oferta a corto plazo de cada una de las n empresas que hay en la industria, podremos definir así la función de oferta del mercado a corto plazo:

Función de oferta del mercado a corto plazo. La *función de oferta del mercado a corto plazo* muestra la cantidad total que cada empresa ofrece a un mercado:

$$Q_S(P, v, w) = \sum_{i=1}^{n} q_i(P, v, w). \qquad \textbf{(10.13)}$$

FIGURA 10.3 **La curva de oferta del mercado a corto plazo**

La sección (a) y (b) muestran las curvas de oferta (costo marginal) de dos empresas. La curva de oferta del mercado (c) es la suma horizontal de estas curvas. Por ejemplo, en P_1 la empresa A ofrece q_1^A, la empresa B ofrece q_1^B, y la oferta total del mercado está determinada por $Q_1 = q_1^A + q_1^B$.



Nótese que suponemos que las empresas de la industria afrontan el mismo precio de mercado y los mismos precios para sus factores.[4] La *curva de oferta del mercado a corto plazo* muestra la relación bidimensional entre Q y P, manteniendo constantes v y w (y la tecnología básica de cada empresa). Esta notación deja en claro que si v, w, o la tecnología cambiaran, entonces la curva de oferta se desplazaría a otra ubicación.

Elasticidad de la oferta a corto plazo

La forma de resumir la capacidad de respuesta de la producción de las empresas de una industria ante precios más altos consiste en utilizar la *elasticidad de la oferta a corto plazo*. Este indicador muestra como los cambios en el precio del mercado llevan a cambios porcentuales en la producción. De acuerdo con los conceptos de elasticidad que desarrollamos en el capítulo 5, ésta se define de la manera siguiente:

DEFINICIÓN

Elasticidad de la oferta a corto plazo ($e_{S,P}$).

$$e_{S,P} = \frac{\text{cambio porcentual de } Q \text{ ofertada}}{\text{cambio porcentual de } P} = \frac{\partial Q_S}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_S}. \qquad (10.14)$$

Dado que la cantidad ofertada está en función creciente del precio ($\partial Q_S/\partial P > 0$), la elasticidad de la oferta es positiva. Los valores altos de $e_{S,P}$ implican que pequeños aumentos en el precio de mercado llevan a las empresas a responder con una oferta relativamente grande, porque los costos marginales no aumentan pronunciadamente y los efectos de interacción en los precios de los factores son pequeños. Por otra parte, un valor bajo de $e_{S,P}$ implica que se necesita de cambios en el precio relativamente grandes para inducir a las empresas a modificar sus niveles de producción, porque los costos marginales aumentan con rapidez. Nótese que, como ocurre con todos los conceptos de elasticidad, para calcular $e_{S,P}$ es preciso mantener constantes los precios de los factores y la tecnología. Para que el concepto tenga sentido como una respuesta del mercado, también es necesario que todas las empresas afronten el mismo precio para sus productos. Si las empresas vendieran sus productos a precios diferentes, entonces tendríamos que definir la elasticidad de la oferta de cada una de ellas.

[4]Más adelante, en este mismo capítulo, mostramos cómo podemos relajar este supuesto.

EJEMPLO 10.2

Una función de oferta a corto plazo

En el ejemplo 9.3 calculamos la función general de oferta a corto plazo para una sola empresa con una función de producción Cobb-Douglas de dos factores como

$$q_i(P, v, w) = \left(\frac{w}{\beta}\right)^{-\beta/(1-\beta)} k_1^{\alpha/(1-\beta)} P^{\beta/(1-\beta)}. \qquad (10.15)$$

Si $\alpha = \beta = 0.5$, $v = 3$, $w = 12$, $k_1 = 80$, tendremos una función de oferta simple de una sola empresa

$$q_i(P, v, w = 12) = \frac{10P}{3}. \qquad (10.16)$$

Ahora supongamos que hay 100 empresas idénticas y que cada una afronta los mismos precios de mercado para su producción y la contratación de factores. Dados estos supuestos, la función de oferta del mercado a corto plazo estará determinada por

$$Q_S(P, v, w = 12) = \sum_{i=1}^{100} q_i = \sum_{i=1}^{100} \frac{10P}{3} = \frac{1000P}{3}. \qquad (10.17)$$

Por tanto, a un precio, por decir, de $P = 12$, la oferta total del mercado será 4000 y cada una de las 100 empresas ofrecerá 40 unidades. Podemos calcular la elasticidad de la oferta a corto plazo en esta situación como

$$e_{S,P} = \frac{\partial Q_S(P, v, w)}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_S} = \frac{1000}{3} \cdot \frac{P}{1000P/3} = 1 \qquad (10.18)$$

como era de esperar dado el exponente de P en la función de oferta.

Efecto de un incremento en w. Si todas las empresas que hay en este mercado registraran un aumento del salario que deben pagar por su factor trabajo, entonces la curva de oferta a corto plazo se desplazaría a otra posición. Para calcular el cambio, debemos regresar a la función de oferta de una sola empresa (ecuación 10.15) y utilizar el nuevo salario, por decir $w = 15$. Si ninguno de los otros parámetros del problema ha cambiado (la función de producción de la empresa y el nivel del factor capital que tiene a corto plazo), entonces la función de oferta será

$$q_i(P, v, w = 15) = \frac{8P}{3} \qquad (10.19)$$

y la función de oferta del mercado será

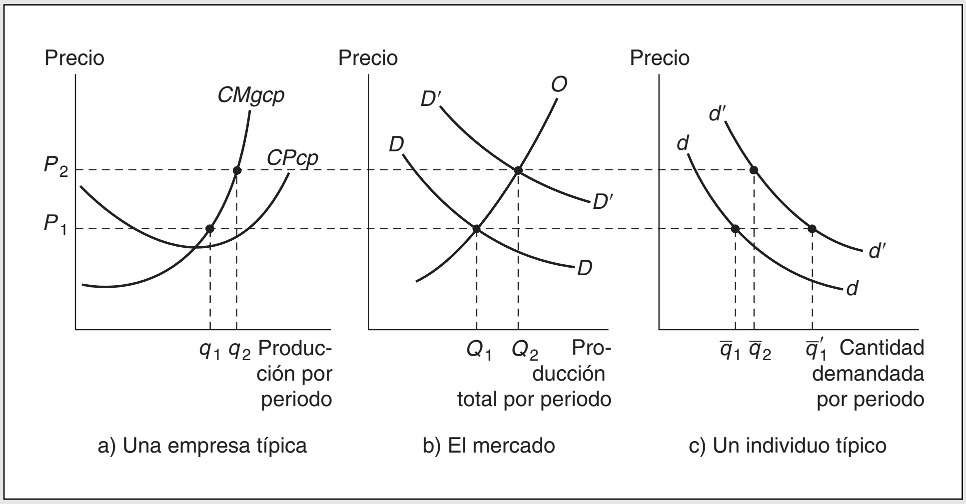
$$Q_S(P, v, w = 15) = \sum_{i=1}^{100} \frac{8P}{3} = \frac{800P}{3}. \qquad (10.20)$$

Por tanto, al precio de $P = 12$, esta industria ahora ofrecerá tan sólo $Q_S = 3200$, y cada empresa producirá $q_i = 32$. Es decir, la curva de oferta se ha desplazado hacia la izquierda debido al aumento del salario. Sin embargo, nótese que la elasticidad precio de la oferta no ha cambiado, pues sigue siendo $e_{S,P} = 1$.

Pregunta: ¿Los resultados de este ejemplo cómo cambiarían si tomáramos diferentes valores para el peso del trabajo en la función de producción (es decir, para α y β)?

FIGURA 10.4 **Las relaciones entre muchos individuos y empresas determinan el precio de mercado a corto plazo**

Las curvas de oferta y de demanda del mercado son cada una la suma horizontal de numerosos componentes. La sección (b) muestra estas curvas del mercado. Una vez que el precio ha sido determinado en el mercado, cada empresa y cada individuo lo consideran un parámetro fijo para tomar sus decisiones. Si bien las empresas y los individuos son importantes para determinar el precio, su interacción como un todo es el único determinante del precio. El desplazamiento de la curva de demanda de un individuo a d' ilustra lo anterior. Si sólo un individuo reacciona de esta manera, entonces el precio de mercado no se verá afectado. Sin embargo, si todos ellos incrementan su demanda, entonces la demanda del mercado se desplazará a D'; y, a corto plazo, el precio aumentará a P_2.



Determinación del precio de equilibrio

Ahora ya podemos combinar las curvas de oferta y de demanda para mostrar cómo se fijan los precios de equilibrio en el mercado. La figura 10.4 muestra este proceso. Si observamos primero la sección 10.4b, veremos la curva de demanda del mercado D (de momento ignore D') y la curva de oferta a corto plazo O. Las dos curvas se cortan a un precio de P_1 y una cantidad de Q_1. Esta combinación de precio-cantidad representa un *equilibrio* entre las demandas de los individuos y los costos de las empresas. El precio de equilibrio P_1 tiene dos funciones importantes. En primer término, este precio actúa como una señal para los productores porque les ofrece información para decidir cuánto deberían producir. Para poder maximizar las utilidades, las empresas producirán el nivel de producción en el cual los costos marginales sean iguales a P_1. Por tanto, la producción agregada será Q_1. La otra función del precio es racionar la demanda. Dado el precio de mercado P_1, los individuos que maximizan su utilidad decidirán qué tanto de sus ingresos limitados dedicarán a comprar ese bien. A un precio de P_1, la cantidad total demandada será Q_1, y ésta será, precisamente, la cantidad producida. En consecuencia, se define el precio de equilibrio de la manera siguiente:

DEFINICIÓN

Precio de equilibrio. Un *precio de equilibrio* es aquel donde la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. A este precio, ni los demandantes ni los oferentes tienen incentivo alguno para modificar sus decisiones económicas. Matemáticamente, un precio de equilibrio, P^*, resuelve la ecuación:

$$Q_D(P^*, P', I) = Q_S(P^*, v, w) \qquad \textbf{(10.21)}$$

o, de forma más compacta,

$$Q_D(P^*) = Q_S(P^*) \qquad \textbf{(10.22)}$$

La definición de la ecuación 10.22 deja en claro que un precio de equilibrio depende de los valores de muchos factores externos, como los ingresos o los precios de otros bienes y de los factores productivos de las empresas. Como se verá en la próxima sección, los cambios de uno de estos factores probablemente derivarán en un cambio en el precio de equilibrio necesario para igualar la cantidad ofrecida con la cantidad demandada.

Las figuras 10.4a y 10.4c muestran, respectivamente, las consecuencias del precio de equilibrio (P_1) para una empresa típica y para un individuo típico. En el caso de la empresa típica, el precio P_1 provocará que se reduzca el nivel de producción q_1. La empresa obtiene una pequeña utilidad con este precio particular porque el costo promedio total a corto plazo queda cubierto. La figura 10.4c presenta la curva de demanda d (por el momento ignore d') de un individuo típico. A un precio de P_1, este individuo demanda $\bar{q}_1$. Si sumamos las cantidades demandadas por cada individuo a P_1 y las cantidades que ofrece cada empresa, podremos ver que el mercado se encuentra en equilibrio. Las curvas de oferta y de demanda del mercado ofrecen una forma cómoda de hacer esta suma.

Reacción del mercado ante un desplazamiento de la demanda

Podemos utilizar las tres secciones de la figura 10.4 para mostrar dos hechos importantes sobre el equilibrio del mercado a corto plazo: la "impotencia" del individuo en el mercado y la naturaleza de la respuesta de la oferta a corto plazo. Primero, supongamos que la curva de demanda de un solo individuo se desplazará hacia la derecha a d', como muestra la figura 10.4c. Dado que el modelo de la competencia supone que hay muchos demandantes, este desplazamiento no tendrá efecto alguno en la curva de demanda del mercado. Por tanto, el precio de mercado no se verá afectado por el desplazamiento a d'; es decir, el precio se mantendrá en P_1. Por supuesto que, a este precio, la persona cuya curva de demanda se ha desplazado consumirá ligeramente más ($\bar{q}_1'$) como muestra la figura 10.4c, pero esta cantidad es apenas una parte ínfima del mercado.

Si las curvas de demanda de muchos individuos registran desplazamientos hacia fuera, la curva de demanda del mercado completo se desplazaría. La figura 10.4b muestra la nueva curva de demanda D'. El nuevo punto de equilibrio se encontrará en P_2, Q_2 y, en este punto, se restablece el equilibrio de la oferta y la demanda. El precio ha aumentado de P_1 a P_2 en respuesta al desplazamiento de la demanda. Nótese también que la cantidad intercambiada en el mercado ha aumentado de Q_1 a Q_2. El incremento en el precio tiene dos funciones. En primer término, como en nuestro análisis anterior del muy corto plazo, ha actuado para racionar la demanda. Mientras que en P_1 el individuo típico demandaba $\bar{q}_1'$, en P_2 sólo demanda $\bar{q}_2$. El incremento del precio también ha actuado como una señal para que la empresa típica aumente su producción. En la figura 10.4a el nivel de producción de la empresa que maximiza sus utilidades ha aumentado de q_1 a q_2 en respuesta al incremento en el precio. Esto es lo que quiere decir ***respuesta de la oferta a corto plazo:*** un incremento en el precio de mercado actúa como una motivación para aumentar la producción. Las empresas están dispuestas a aumentar la producción (y a contraer costos marginales más altos) porque el precio ha aumentado. Si no se hubiera permitido que el precio de mercado aumentara (supongamos que el gobierno ha impuesto el control de precios), las empresas no habrían aumentado su producción. A P_1 ahora habría un exceso (sin satisfacer) de demanda del bien en cuestión. Si permitimos que el precio de mercado aumente, se restablecerá el equilibrio de la oferta y la demanda, de suerte que lo que las empresas producen de nuevo es igual a lo que los individuos demandan al precio de mercado existente. Nótese también que al nuevo precio de P_2, la empresa típica ha aumentado sus utilidades. Esta creciente rentabilidad a corto plazo será importante para el análisis de los precios a largo plazo que veremos más adelante en este mismo capítulo.

Desplazamientos de las curvas de oferta y de demanda: un análisis gráfico

En los capítulos anteriores hemos expuesto muchas razones que explican por qué una curva de oferta o una curva de demanda se desplazarían. La tabla 10.1 resume brevemente estas razones. Si bien la mayor parte de ellas no requieren mayor explicación, es importante señalar que una variación de la cantidad de empresas desplazará la curva de oferta del mercado a corto plazo (porque la suma de la ecuación 10.3 incluirá otra cantidad de empresas). Esta observación permite vincular el análisis del corto y largo plazos.

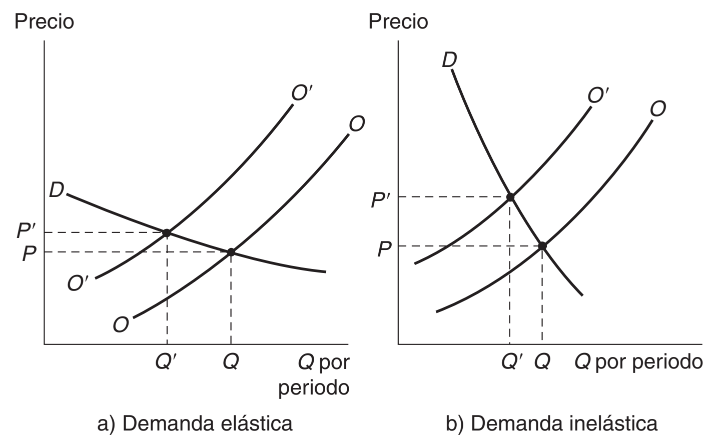
Al parecer, los tipos de cambios descritos en la tabla 10.1 se producen continuamente en los mercados del mundo real. Cuando se desplaza una curva, ya sea de oferta o de demanda, el precio

TABLA 10.1 **Razones por las que se desplazan las curvas de oferta o de demanda**

Las curvas de demanda se desplazan porque	Las curvas de oferta se desplazan porque
• Cambian los ingresos • Cambian los precios de los sustitutos o los complementos • Cambian las preferencias	• Cambian los precios de los factores productivos • Cambia la tecnología • Cambia la cantidad de productores

FIGURA 10.5 **El efecto de un desplazamiento de la curva de oferta a corto plazo depende de la forma de la curva de demanda**

En la sección (a), el desplazamiento hacia la izquierda de la curva de oferta hace que el precio aumente tan sólo un poco, mientras que la cantidad disminuye de manera pronunciada. Esto se debe a la forma elástica de la curva de demanda. En la sección (b), la curva de demanda es inelástica y el precio aumenta sustancialmente, pero la cantidad sólo disminuye un poco.



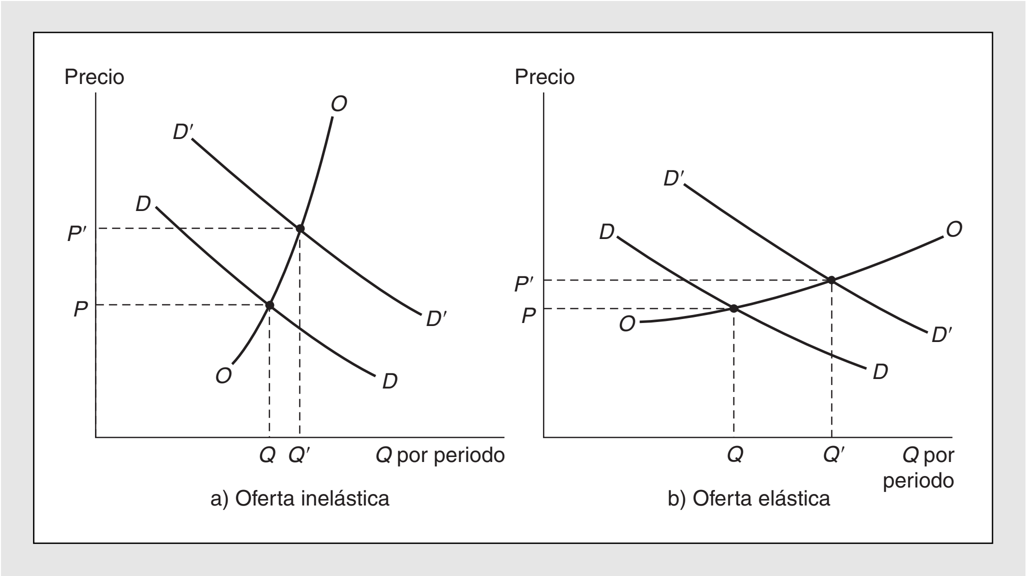
y la cantidad de equilibrio cambiarán. En esta sección se analizarán gráficamente las magnitudes relativas de estos cambios y, en la siguiente, se demostrará el resultado final matemáticamente.

Desplazamientos de las curvas de oferta: importancia de la forma de la curva de demanda

Considérese primero un desplazamiento hacia la izquierda de la curva de oferta de un bien a corto plazo. Al igual que en el ejemplo 10.2, este desplazamiento podría ser resultado de un aumento del precio de los factores utilizados por las empresas para producir el bien. Independientemente de la causa que provoque el desplazamiento, es importante reconocer que el efecto que el desplazamiento tiene en el nivel de equilibrio de P y Q dependerá de la forma de la curva de demanda del producto. La figura 10.5 ilustra dos situaciones posibles. La curva de demanda de la figura 10.5a es relativamente elástica al precio; es decir, una variación en el precio afecta sustancialmente la cantidad demandada. En este caso, un desplazamiento de la curva de oferta de O a O' hará que el precio de equilibrio aumente tan sólo un poco (de P a P'), mientras que la cantidad disminuye de manera pronunciada (de Q a Q'). Las empresas, en vez de "trasladar" los aumentos de costos de los factores en forma de precios más altos, los afrontan principalmente con una reducción de la cantidad (un movimiento hacia abajo a lo largo de la curva del costo marginal de cada empresa) y tan sólo un ligero aumento de precio.

FIGURA 10.6 **El efecto de un desplazamiento de la curva de demanda depende de la forma de la curva de oferta a corto plazo**

En la sección (a), la oferta es inelástica; es decir, un desplazamiento de la demanda provoca que el precio aumente sustancialmente, pero el aumento de la cantidad es pequeño. Por otra parte, en la sección (b), la oferta es elástica; es decir, el precio tan sólo aumenta ligeramente en respuesta a un desplazamiento de la demanda.



Esta situación se revierte cuando la curva de demanda del mercado es inelástica. En la figura 10.5b, un desplazamiento de la curva de oferta provoca que el precio de equilibrio aumente sustancialmente, mientras que la cantidad cambia poco. Esto se debe a que las demandas de los individuos no disminuyen mucho si aumenta el precio. Por tanto, el desplazamiento hacia arriba de la curva de oferta es trasladado casi por completo a los demandantes en forma de precios más altos.

Desplazamientos de las curvas de demanda: importancia de la forma de la curva de oferta

Asimismo, las consecuencias de un desplazamiento de la curva de demanda del mercado para P y Q, serán distintas, dependiendo de la forma de la curva de oferta a corto plazo. La figura 10.6 ilustra dos ejemplos. En la sección 10.6a la curva de oferta del bien en cuestión es inelástica. En tal caso, un desplazamiento hacia la derecha de la curva de demanda del mercado provocará que el precio aumente sustancialmente. Por otra parte, la cantidad intercambiada tan sólo aumenta un poco. Por intuición sabemos que lo que ha ocurrido es que el incremento de la demanda (y de Q) ha provocado que las empresas se muevan hacia arriba a lo largo de la curva de su costo marginal, cuya pendiente es muy pronunciada. El notable aumento del precio sirve para racionar la demanda.

La sección 10.6b muestra una curva de oferta a corto plazo relativamente elástica. Esta curva se presentaría en una industria en la cual los costos marginales no aumentan en forma pronunciada en respuesta a los incrementos de producción. En este caso, un incremento de la demanda provoca un aumento sustancial de Q. Sin embargo, dada la forma de la curva de oferta, este incremento no va acompañado de grandes aumentos de costos. Por tanto, el precio sólo aumenta moderadamente.

Estos ejemplos vuelven a demostrar la observación de Marshall en el sentido de que la oferta y la demanda determinan simultáneamente el precio y la cantidad. Recuerde que en el capítulo 1 vimos su analogía: así como no podemos saber cuál de las dos hojas de una tijera es la que corta, así tampoco podemos atribuir el precio exclusivamente a las características de la oferta o de la demanda. Por el contrario, el efecto que tendrá un desplazamiento de la curva de oferta o de la de demanda dependerá de la forma de estas dos curvas. El ejemplo 10.3 ilustra algunos de estos puntos.

EJEMPLO 10.3

Equilibrios del mercado a corto plazo

Podemos ilustrar estos puntos numéricamente recurriendo a la función de la oferta a corto plazo del ejemplo 10.2 y suponiendo que es válido para, por decir, las toallas para playa marca Gucci. Además, suponemos que la fórmula de la función de demanda del mercado de estas toallas de lujo es:

$$Q_D(P, P', I) = 4000 - 500P + 200P' + 0.1I, \qquad (10.23)$$

donde P' representa el precio de un sustituto de la toalla Gucci (por decir, una toalla Polo) e I representa el ingreso anual promedio de los posibles consumidores de toallas. A efecto de estudiar un equilibrio específico de la oferta y la demanda en este mercado, debemos suponer los valores de otros componentes de la demanda, además del precio de mercado. Por tanto, inicialmente, consideraremos que $P' = 10$, $I = 40\,000$. Por ende, la función de demanda será

$$Q_D = 4000 + 200(10) + 0.1(40\,000) - 500P = 10\,000 - 500P. \qquad (10.24)$$

Ahora, con una oferta igual a la demanda tendremos

$$Q_S = 1000P/3 = Q_D = 10\,000 - 500P$$

o $\qquad (10.25)$

$$2500P = 30\,000$$

por tanto, el equilibrio de mercado está determinado por

$$P^* = 12$$
$$Q^* = Q_D = Q_S = 4000 \qquad (10.26)$$

y cada empresa producirá 40 toallas.

Un cambio en la demanda. Un incremento en el precio de las toallas Polo (a $P' = 22.50$) desplazaría la demanda de las toallas Gucci hacia la derecha $Q'_D = 12\,500 - 500P$ y el nuevo equilibrio del mercado sería

$$Q_S = 1000P/3 = Q'_D = 12\,500 - 500P$$

o $\qquad (10.27)$

$$P^* = 15,\ Q^* = 5000.$$

En consecuencia, el aumento del precio del sustituto Polo provoca que aumenten el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de las toallas Gucci. Si el precio hubiera permanecido en $P = 12$ habría habido un exceso de demanda de $Q_D(P = 12) - Q_S(P = 12) = 6500 - 4000 = 2500$. El aumento de precio de 12 a 15 llevará a las empresas a producir 1000 toallas más y disminuirá la demanda en 1500 toallas, eliminando así el exceso de demanda.[5]

Un cambio en la oferta. Un aumento, por decir, de los salarios de los cortadores de toallas también alteraría el equilibrio inicial del mercado que calculamos en la ecuación 10.26. Si el salario aumentara a $w = 15$, el ejemplo 10.2 nos dice que la función de la oferta a corto plazo cambiaría a $Q_S = 800P/3$ y, dada la situación inicial de demanda, el equilibrio del mercado sería

$$Q_S = 800P/3 = Q_D = 10\,000 - 500P$$

por lo cual $\qquad (10.28)$

$$P^* = 300/23 = 13.04,\ Q^* = 3480.$$

El desplazamiento de la oferta hacia la izquierda provoca que el precio de equilibrio aumente y que la cantidad disminuya.

Pregunta: ¿Cómo cambiaría usted la función de demanda de este problema de modo que produjera un aumento más pequeño del precio y un aumento más grande de la cantidad como resultado de un cambio de la oferta que presenta la ecuación 10.28?

[5] Nótese que estos resultados confirman que la elasticidad de la oferta a corto plazo es 1. Un aumento de precio del 25% es igualado por un aumento del 25% en la cantidad ofrecida.

Modelo matemático del equilibrio de mercado

Un modelo matemático general del proceso de oferta y de demanda ilustraría incluso más las comparativas estáticas de un cambio en los precios y las cantidades de equilibrio. Supongamos que la función de demanda está representada por

$$Q_D = D(P, \alpha), \tag{10.29}$$

donde α es un parámetro que permite modificar la curva de demanda. El cambio puede representar el ingreso del consumidor, los precios de otros bienes (lo cual permitiría vincular la oferta y la demanda de varios mercados relacionados) o un cambio de las preferencias. Por lo general, esperamos que $\partial D/\partial P = D_P < 0$, pero $\partial D/\partial \alpha = D_\alpha$ puede tener un signo cualquiera, dependiendo precisamente del significado que tenga el parámetro α. Si empleamos este mismo procedimiento, podremos escribir la relación de oferta como

$$Q_S = S(P, \beta), \tag{10.30}$$

donde β es un parámetro que desplaza la curva de oferta y que podría incluir factores como los precios de los factores productivos, los cambios tecnológicos o (en el caso de una empresa que fabrica varios productos) los precios de otras posibles producciones. Aquí, $\partial S/\partial P = S_P > 0$, pero $\partial S/\partial \beta = S_\beta$ puede tener un signo cualquiera. Cerramos el modelo exigiendo que, en equilibrio,[6]

$$Q_D = Q_S. \tag{10.31}$$

Para analizar las repercusiones comparativas de este modelo del equilibrio, escribimos los diferenciales totales de las funciones de oferta y de demanda como

$$dQ_D = D_P dP + D_\alpha d\alpha \tag{10.32}$$

y

$$dQ_S = S_P dP + S_\beta d\beta.$$

Porque para conservar el equilibrio es necesario que

$$dQ_D = dQ_S, \tag{10.33}$$

podamos resolver estas ecuaciones para la variación del precio de equilibrio en una combinación cualquiera de desplazamientos de la demanda (α) o de la oferta (β). Por ejemplo, supongamos que cambiara el parámetro de la demanda α mientras que β se mantiene constante. Entonces, si utilizamos la condición de equilibrio, se obtendrá

$$D_P dP + D_\alpha d\alpha = S_P dP, \tag{10.34}$$

o, haciendo algunas operaciones,

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{D_\alpha}{S_P - D_P}. \tag{10.35}$$

Dado que el denominador de esta fórmula es positivo, el signo de $\partial P/\partial \alpha$ será igual al de D_α. Si α representa el ingreso del consumidor (y si el bien en cuestión es normal), entonces D_α sería positivo, y un aumento del ingreso desplazaría hacia la derecha a la demanda. Esto, como también indica la ecuación 10.35, provocará que aumente el precio de equilibrio; el mismo resultado que representa gráficamente la figura 10.6.

[6]Podríamos modificar más el modelo para que mostrara cómo la cantidad de equilibrio ofertada quedará asignada entre las empresas de la industria. Por ejemplo, si la industria está compuesta por empresas idénticas, entonces la producción de cualquiera de ellas estaría dada por

$$q = \frac{Q}{n}.$$

Al corto plazo, cuando n es una cantidad fija, esto no añadiría gran cosa a nuestro análisis. No obstante, al largo plazo, el modelo también tendría que determinar n, como demostraremos más adelante en este mismo capítulo.

Una interpretación de la elasticidad

Si realizamos más operaciones algebraicas en la ecuación 10.35 se obtendrá un resultado más útil de las comparativas estáticas. Si se multiplican los dos lados de la ecuación por α/P se obtendrá

$$\begin{aligned} e_{P,)} &= \frac{\partial P}{\partial \alpha} \quad \frac{\alpha}{P} = \frac{D_\alpha}{O_P - D_P} \quad \frac{\alpha}{P} \\ &= \frac{D_\alpha \dfrac{\alpha}{Q}}{(O_P - D_P) \quad \dfrac{P}{Q}} = \frac{e_{Q,\alpha}}{e_{S,P} - e_{Q,P}}. \end{aligned} \tag{10.36}$$

Dado que los estudios empíricos permiten obtener todas las elasticidades de esta ecuación con enorme facilidad, esta ecuación puede representar un camino cómodo para hacer cálculos aproximados de los efectos que diversos hechos tienen en los precios de equilibrio. Por ejemplo, supongamos de nuevo que α representa el ingreso del consumidor y que nos interesa prever cómo un incremento del ingreso afectará al precio de equilibrio de, por decir, los automóviles. Supongamos que los datos empíricos sugieren que $e_{Q,I} = e_{Q,\alpha} = 3.0$, $e_{Q,P} = -1.2$ (estas cifras han sido tomadas de la tabla 10.3) y supongamos que $e_{O,P} = 1.0$. Si se sustituyen estas cifras en la ecuación 10.36 se obtendrá

$$\begin{aligned} e_{P,\alpha} &= \frac{e_{Q,\alpha}}{e_{O,P} - e_{Q,P}} = \frac{3.0}{1.0 - (-1.2)} \\ &= \frac{3.0}{2.2} = 1.36. \end{aligned} \tag{10.37}$$

Por tanto, los cálculos empíricos de las elasticidades sugieren que cada aumento del 1% en el ingreso del consumidor dará lugar a un aumento de 1.36% en el precio de equilibrio de los automóviles. Podemos utilizar modelos similares para calcular otros tipos de cambios de la oferta o de la demanda haciendo las operaciones de las ecuaciones 10.32 y 10.33 y obteniendo los cálculos empíricos de los parámetros necesarios.

Equilibrios con funciones de elasticidad constante

Si empleamos formas específicas de las funciones podemos obtener un análisis incluso más completo del equilibrio de la oferta y la demanda. Las funciones con elasticidades constantes son especialmente útiles para este fin. Supongamos que la demanda de automóviles está determinada por

$$Q_D(P, I) = 0.1\ P^{-1.2}\ I^3, \tag{10.38}$$

donde el precio *(P)* está medido en dólares, al igual que el ingreso familiar real *(I)*. La función de oferta de los automóviles es

$$Q_S(P, w) = 6400\ Pw^{-0.5}, \tag{10.39}$$

donde w es el salario por hora de los trabajadores de la industria automotriz. Nótese que las elasticidades que hemos supuesto aquí son las mismas que hemos utilizado anteriormente en el texto ($e_{Q,P} = -1.2$, $e_{Q,I} = 3.0$ y $e_{O,P} = 1$). Si los valores de las variables "exógenas" I y w fueran \$20 000 y \$25, respectivamente, el equilibrio de la oferta y la demanda exigirá que

$$\begin{aligned} Q_D &= 0.1\ P^{-1.2}\ I^3 = 8 \times 10^{11}\ P^{-1.2} \\ &= Q_O = 6400\ Pw^{-0.5} = 1280\ P \end{aligned} \tag{10.40}$$

o

$$P^{2.2} = 8 \times 10^{11}/1280 = 6.25 \times 10^8$$

o

$$\begin{aligned} P^* &= 9957 \\ Q^* &= 1280 \cdot P^* = 12\,745\,000. \end{aligned} \tag{10.41}$$

Por tanto, el equilibrio inicial del mercado automotriz tiene un precio del orden de 10 000 dólares y vende unos 13 millones de vehículos.

Un cambio en la demanda. Un aumento en el ingreso real de las familias del 10 por ciento, manteniendo constantes todos los demás factores, desplazará la función de demanda a

$$Q_D = 1.06 \times 10^{12}\ P^{-1.2} \tag{10.42}$$

y, procediendo igual que antes,

$$P^{2.2} = 1.06 \times 10^{12}/1280 = 8.32 \times 10^8 \tag{10.43}$$

o

$$\begin{aligned} P^* &= 11\,339 \\ Q^* &= 14\,514\,000. \end{aligned} \tag{10.44}$$

Como previmos antes, el aumento del 10 por ciento del ingreso real incrementa el precio de los vehículos casi 14 por ciento. En el proceso, la cantidad vendida aumentó cerca de 1.77 millones de automóviles.

Un cambio en la oferta. Un cambio exógeno de la oferta de automóviles debido a, por decir, una variación del salario de los trabajadores del sector, también afectaría al equilibrio del mercado. Si los salarios aumentaran a 30 dólares por hora, la función de oferta cambiaría a

$$Q_o\,(P, w) = 6400\ P(30)^{-0.5} = 1168\ P \tag{10.45}$$

y si volvemos a la función original de la demanda (donde I = $20 000) tendríamos

$$P^{2.2} = 8 \times 10^{11}/1168 = 6.85 \times 10^8 \tag{10.46}$$

o

$$\begin{aligned} P^* &= 10\,381 \\ Q^* &= 12\,125\,000. \end{aligned} \tag{10.47}$$

Por tanto, un incremento en el salario de 20 por ciento ha provocado un aumento de 4.3 por ciento en el precio de los automóviles y una disminución de las ventas de más de 600 000 unidades. Podemos calcular aproximadamente el cambio del equilibrio de muchos tipos de mercados utilizando este planteamiento general y estimaciones empíricas de las elasticidades correspondientes.

Pregunta: ¿Los resultados del cambio de los salarios de los trabajadores de la industria automotriz coinciden con lo que habríamos previsto empleando una ecuación similar a la ecuación 10.36?

Análisis de largo plazo

En el capítulo 8 vimos que, a largo plazo, una empresa puede modificar todos sus factores productivos para ceñirse a las condiciones del mercado. Por tanto, para un análisis del largo plazo debemos emplear las curvas de costos a largo plazo de la empresa. Una empresa que maximiza sus utilidades y considera el precio como dado, generará el nivel de producción en el cual el precio sea igual al costo marginal de largo plazo (*CMg*). Sin embargo, debemos considerar una segunda influencia que, al final de cuentas, es más importante para el precio de largo plazo: el ingreso a la industria de empresas totalmente nuevas o la salida de empresas ya existentes. En términos matemáticos, debemos permitir que la cantidad de empresas, n, varíe en respuesta a los incentivos económicos. El modelo de competencia perfecta supone que no hay costos especiales por entrar o salir de una industria. Por tanto, habrá nuevas empresas que se sientan atraídas por un mercado cualquiera en el cual el beneficio (económico) sea positivo. Por otra parte, las empresas abandonarán una industria en la cual el beneficio sea negativo. La entrada de nuevas empresas provocará que la curva de oferta de la industria a corto plazo se desplace hacia la derecha, porque la cantidad de empresas que hay produciendo ahora es superior a la que había anteriormente. Este desplazamiento hará que el precio de mercado (y los beneficios de la industria) disminuyan. El proceso continuará hasta que no haya posibilidad de que una empresa que esté contemplando entrar en la industria pueda obtener beneficio alguno.[7] En este punto, no habrá más entradas y la industria tendrá la cantidad de empresas de equilibrio. Podemos presentar un argumento análogo cuando las empresas de la industria están registrando pérdidas a corto plazo. Algunas decidirán abandonar la industria y ello provocará que la curva de oferta se desplace hacia la izquierda. El precio de mercado aumentará, restaurando así la rentabilidad de aquellas empresas que permanezcan en la industria.

Condiciones de equilibrio

Para efectos de este capítulo, supondremos que todas las empresas de una industria tienen las mismas curvas de costos; es decir, ninguna de las empresas controla recurso o tecnología[8] especial alguno. Dado que todas las empresas son idénticas, la posición de equilibrio de largo plazo exige que cada empresa obtenga exactamente un beneficio económico nulo. En términos gráficos, el precio de equilibrio de largo plazo se debe establecer en el punto mínimo de la curva del costo total promedio de largo plazo de cada una de las empresas. Éste es el único punto donde se cumplen las dos condiciones de equilibrio $P = CMg$ (necesaria para maximizar las ganancias) y $P = CP$ (necesaria para que los beneficios sean nulos). Sin embargo, es importante subrayar que estas dos condiciones de equilibrio tienen orígenes bastante distintos. Maximizar las ganancias es un objetivo de las empresas. Por tanto, la regla de que $P = CMg$ se deriva de los supuestos planteados respecto al comportamiento de las empresas y es similar a la regla de la decisión de producción utilizada para el corto plazo. La condición de que los beneficios sean nulos no es un objetivo de las empresas. Es evidente que las empresas preferirían tener un enorme beneficio positivo. Sin embargo, el funcionamiento del mercado a largo plazo obliga a todas las empresas a aceptar un nivel de beneficio económico nulo ($P = CP$) debido a que las empresas entran o salen a voluntad de una industria en respuesta a la posibilidad de obtener beneficios superiores a los normales. A pesar de que las empresas de una industria en competencia perfecta pueden obtener una ganancia positiva o negativa a corto plazo, a largo plazo prevalecerá el nivel de un beneficio nulo. Por tanto, podemos resumir este análisis con la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Equilibrio de largo plazo en competencia perfecta. Una *industria en competencia perfecta* estará en *equilibrio de largo plazo* si no hay incentivos para que las empresas que maximizan sus ganancias entren o salgan de la industria. Esto se producirá cuando la cantidad de empresas sea tal que $P = CMg = CP$ y cada empresa opere en el punto mínimo de su curva de costo promedio de largo plazo.

Equilibrio de largo plazo: el caso de los costos constantes

Para explicar los precios de largo plazo con detalle, debemos partir de un supuesto sobre el efecto que la entrada de nuevas empresas en una industria tiene en los precios de los factores de las empresas. El supuesto más sencillo que podemos plantear es que la entrada no tiene efecto alguno en los precios de estos factores; tal vez porque la industria es un empleador relativamente pequeño dentro de los diversos mercados de sus factores productivos. Según este supuesto, independientemente de la cantidad de empresas que entren o salgan de una industria,

[7]Recuerde que estamos empleando la definición de beneficio de los economistas. Este beneficio representa un rendimiento para el propietario de un negocio que excede a la cantidad que es estrictamente necesaria para que continúe con sus actividades. Por tanto, cuando decimos que una empresa obtiene un beneficio “nulo”, queremos decir que no está percibiendo un beneficio superior al que podría obtener de otras inversiones.

[8]Si las empresas tienen costos diferentes, entonces las que tienen costos muy bajos obtendrán un beneficio positivo a largo plazo y este beneficio adicional se vería reflejado en el precio del recurso que explica que la empresa tenga costos bajos. En este sentido, el supuesto de costos idénticos no es muy restrictivo, porque un mercado activo de los factores productivos de la empresa garantizará que los costos promedio (que incluyen los costos de oportunidad) sean los mismos para todas las empresas. Véase también el análisis de la utilidad ricardiana que presentamos más adelante en este capítulo.

cada una de ellas conservará el mismo conjunto de curvas de costos que tenía al principio. Este supuesto de precios constantes de los factores no es sostenible en muchos casos importantes, mismos que se analizarán en la próxima sección. Sin embargo, por el momento, queremos analizar las condiciones de equilibrio de una *industria con costos constantes.*

Equilibrio inicial

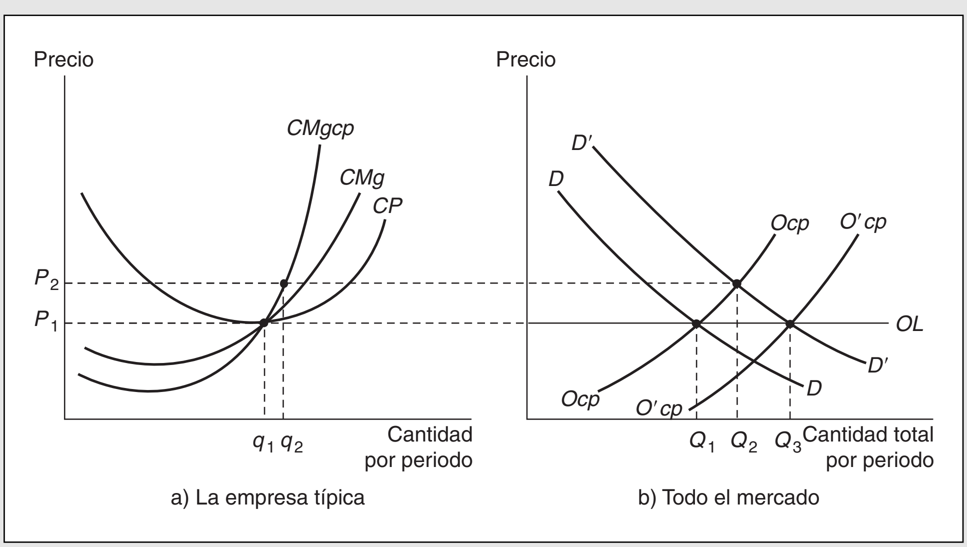
La figura 10.7 muestra el equilibrio de largo plazo de una industria. En el caso del mercado completo (figura 10.7b), la curva de demanda está dada por D y la curva de oferta a corto plazo por *Ocp*. Por tanto, el precio de equilibrio de corto plazo es P_1. La empresa típica (figura 10.7a) fabricará un nivel de producción q_1, porque, en este nivel de producción, el precio es igual al costo marginal a corto plazo (*CMgcp*). Además, con un precio de mercado de P_1, el nivel de producción q_1 también es la posición de equilibrio a largo plazo de la empresa. La empresa está maximizando sus ganancias, porque el precio es igual al costo marginal de largo plazo (*CMg*). La figura 10.7a también implica nuestra segunda propiedad del equilibrio de largo plazo: el precio es igual al costo promedio de largo plazo (CP_{LP}). Por tanto, el beneficio económico es nulo y no hay incentivo alguno para que las empresas entren o salgan de la industria. Por tanto, el mercado descrito en la figura 10.7 está en equilibrio de corto y largo plazos. Las empresas se encuentran en equilibrio porque están maximizando las ganancias y la cantidad de empresas es estable porque los beneficios económicos son nulos. Este equilibrio tenderá a persistir hasta que cambien las condiciones de la oferta o la demanda.

Respuestas a un incremento en la demanda

Supongamos ahora que la curva de demanda del mercado de la figura 10.7b se desplaza hacia la derecha a D'. Si *OC* es la curva de oferta a corto plazo correspondiente a la industria, entonces, a corto plazo, el precio aumentará hasta P_2. La empresa típica, a corto plazo, decidirá producir q_2 y obtendrá ganancias con este nivel de producción. A largo plazo, estas ganancias atraerán a nuevas empresas al mercado. Debido al supuesto de los costos constantes, esta entrada de nuevas empresas no tendrá efecto alguno en los costos de los factores productivos. Las nuevas em-

FIGURA 10.7 **Equilibrio de largo plazo de una industria en competencia perfecta: el caso de los costos constantes**

Un incremento en la demanda de D a D' provocará que el precio aumente de P_1 a P_2 a corto plazo. El precio más alto generará ganancias en la industria y, por ello, nuevas empresas serán atraídas por el mercado. Si suponemos que la entrada de estas nuevas empresas no tiene efecto alguno en las curvas de costos de las empresas de la industria, entonces nuevas empresas seguirán entrando hasta que el precio vuelva a disminuir a P_1. A este precio, el beneficio económico es nulo. Por tanto, la curva de oferta a largo plazo (*OL*) será una línea horizontal al nivel de P_1. A lo largo de *OL*, la producción aumenta debido al aumento de la cantidad de empresas, y cada una produce q_1.



presas seguirán entrando en el mercado hasta obligar a que el precio disminuya el nivel en el cual, de nuevo, no existe beneficio económico. Por tanto, la entrada de nuevas empresas desplazará la curva de oferta a corto plazo hasta $O'cp$, donde se restablece el precio de equilibrio (P_1). En este nuevo equilibrio de largo plazo, la combinación precio-cantidad P_1, Q_3 prevalecerá en el mercado. La empresa típica volverá a producir el nivel de producción q_1, pero ahora habrá más empresas que en la situación inicial.

Oferta infinitamente elástica

Hemos demostrado que la *curva de oferta a largo plazo* para una industria con costos constantes será una línea recta horizontal al precio P_1. En la figura 10.7b, esta curva está señalada con *OL*. Independientemente de lo que ocurra con la demanda, las dos condiciones de equilibrio, el beneficio nulo de largo plazo (porque suponemos la libre entrada) y la maximización de ganancias garantizan que, en el largo plazo, el único precio que prevalezca sea P_1.[9] Por tal motivo, cabe considerar que, P_1 es el precio "normal" de este bien. Sin embargo, si abandonamos el supuesto de los costos constantes, la curva de oferta de largo plazo no tiene por qué tener esta forma infinitamente elástica, como veremos en la próxima sección.

EJEMPLO 10.5

Oferta infinitamente elástica a largo plazo

Los marcos de bicicleta hechos a mano son producidos por una serie de empresas de idéntico tamaño. Los costos mensuales totales (de largo plazo) de la empresa típica están determinados por

$$CT(q) = q^3 - 20q^2 + 100q + 8000, \qquad (10.48)$$

donde q es la cantidad de marcos producidos por mes. La demanda de marcos de bicicleta está determinada por

$$Q_D = 2500 - 3P, \qquad (10.49)$$

donde Q_D es la cantidad demandada al mes y P es el precio por marco. Para determinar el equilibrio a largo plazo en este mercado, debemos determinar el punto mínimo de la curva de costo promedio de la empresa típica. Porque

$$CP = \frac{CT(q)}{q} = q^2 - 20q + 100 + \frac{8000}{q} \qquad (10.50)$$

y

$$CMg = \frac{\partial CT(q)}{\partial q} = 3q^2 - 40q + 100, \qquad (10.51)$$

y sabemos que este mínimo se produce en el punto en el cual $CP = CMg$, podremos resolver este sistema para el nivel de producción:

$$q^2 - 20q + 100 + \frac{8000}{q} = 3q^2 - 40q + 100$$

o

$$2q^2 - 20q = \frac{8000}{q}, \qquad (10.52)$$

que tiene una cómoda solución de $q = 20$. Con una producción mensual de 20 marcos, cada productor tiene un costo promedio y un costo marginal a largo plazo de 500 dólares. Por tanto, éste es el precio de equilibrio de largo plazo de los marcos de bicicleta (los marcos de bicicleta hechos a mano cuestan una barbaridad, como bien sabe cualquier ciclista). Con $P = \$500$, la

[9] Estas condiciones de equilibrio también indican, con cierta imprecisión, lo que parece ser un aspecto "eficiente" del equilibrio a largo plazo en los mercados en competencia perfecta; es decir, el bien analizado será producido al costo promedio mínimo. En el capítulo 12 hablaremos más extensamente de la eficiencia.

ecuación 10.49 muestra que $Q_D = 1000$. Por tanto, la cantidad de empresas para el equilibrio es 50. Cuando cada una de estas 50 empresas fabrica 20 marcos por mes, la oferta será exactamente igual a la demanda a un precio de 500 dólares.

Si la demanda de este problema aumentara a

$$Q_D = 3000 - 3P, \tag{10.53}$$

cabría esperar un aumento de la producción en el largo plazo, así como de la cantidad de empresas. Suponiendo que la entrada en este mercado es libre y que no altera los costos del fabricante de bicicletas típico, el precio de equilibrio de largo plazo permanecerá en 500 dólares, con una demanda total de 1 500 marcos al mes. Ésta exigirá que haya 75 fabricantes de marcos, por lo cual 25 nuevas empresas entrarán en el mercado en respuesta al aumento de demanda.

Pregunta: Presuntamente, la entrada de fabricantes de marcos a largo plazo es motivada por la rentabilidad de la industria a corto plazo, en respuesta al incremento de la demanda. Supongamos que los costos a corto plazo de cada empresa están determinados por $CTcp = 50q^2 - 1500q + 20\,000$. Demuestre que no hay ganancias en el corto plazo es nula cuando la industria se encuentra en equilibrio de largo plazo. ¿Cuál es la ganancia de corto plazo de la industria debida al incremento de la demanda?

Forma de la curva de oferta a largo plazo

A diferencia de la situación a corto plazo, el análisis del largo plazo tiene muy poco que ver con la forma de la curva del costo marginal (de largo plazo). Por el contrario, la condición del beneficio nulo centra la atención en el punto mínimo de la curva del costo promedio de largo plazo por ser el factor más importante para determinar el precio a largo plazo. En el caso de los costos constantes, la posición de este punto mínimo no cambia cuando nuevas empresas entran en la industria. Por tanto, si los precios de los factores no cambian, entonces sólo puede prevalecer un precio a largo plazo, independientemente de cómo cambie la demanda; es decir, la curva de oferta a largo plazo es una línea horizontal en el nivel de este precio. Si abandonamos el supuesto de los costos constantes, las cosas cambian. Si la entrada de nuevas empresas provoca que el costo promedio aumente, entonces la curva de oferta a largo plazo tendrá una pendiente ascendente. Por otra parte, si la entrada provoca que el costo promedio disminuya, entonces la curva de oferta de largo plazo incluso podría tener pendiente negativa. A continuación se analizarán estas posibilidades.

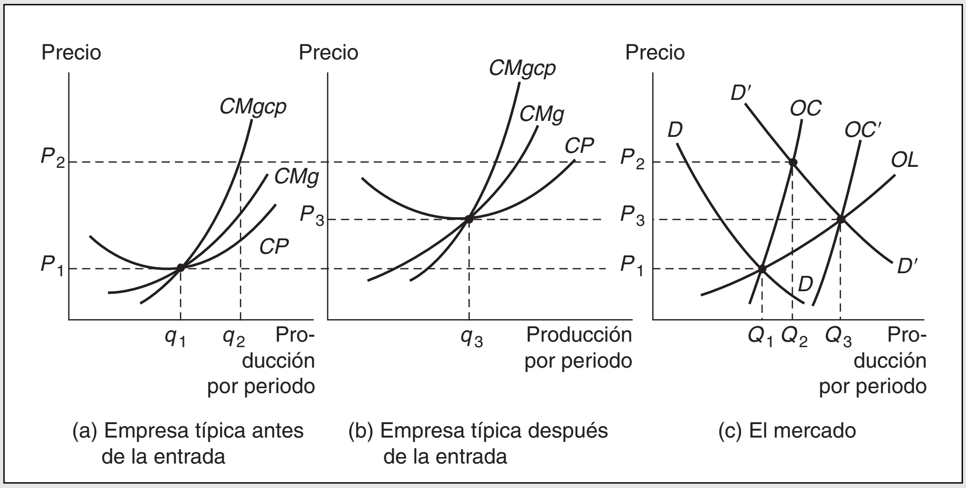
Industria con costos crecientes

La entrada de nuevas empresas en una industria puede provocar que el costo promedio de todas las empresas aumente por diversas razones. Las nuevas empresas y las que ya existían podrían competir por los factores productivos escasos, incrementando así sus precios. Las nuevas empresas podrían imponer "costos externos" a las empresas existentes (y a ellas mismas) en forma de contaminación del agua o del aire, y las nuevas empresas podrían aumentar la demanda de servicios financiados mediante impuestos (policía, plantas de tratamiento de residuos, etc.), por lo cual los impuestos requeridos se traducirían en costos más altos para todas las empresas. La figura 10.8 muestra los dos equilibrios del mercado en una *industria con costos crecientes.* El precio de equilibrio inicial es P_1. A este precio, la empresa típica produce q_1, y la producción total de la industria es Q_1. Supongamos ahora que la curva de demanda de esta industria se desplaza hacia la derecha a D'. A corto plazo, el precio aumentará a P_2, porque ese es el punto de intersección de la curva de oferta de corto plazo de la industria (OC) y D'. A este precio, la empresa típica producirá q_2 y obtendrá una ganancia sustancial. A continuación, esta ganancia atraerá a nuevas entrantes al mercado y desplazará hacia la derecha a la curva de oferta a corto plazo.

Supongamos que la entrada de estas nuevas empresas provoca que las curvas de costos de todas las empresas aumenten. Las nuevas empresas podrían competir por factores productivos escasos, incrementando con ello el precio de esos factores. La figura 10.8b muestra el nuevo conjunto

FIGURA 10.8 **Una industria con costos crecientes tiene una curva de oferta a largo plazo de pendiente positiva**

Al principio, el mercado está en equilibrio en P_1, Q_1. Un incremento en la demanda (a D') provoca que el precio aumente a P_2 a corto plazo y la empresa típica produzca q_2 con ganancias. Esta ganancia atrae a nuevas empresas a la industria. La entrada de estas nuevas empresas hace que los costos de la empresa típica aumenten hasta los niveles que se muestran en la sección (b). Con este nuevo conjunto de curvas, el equilibrio se restablece en el mercado en P_3, Q_3. Si consideramos muchos de los posibles desplazamientos de la demanda y si conectamos todos los puntos de equilibrio resultantes, podremos derivar la curva de oferta a largo plazo (*OL*).



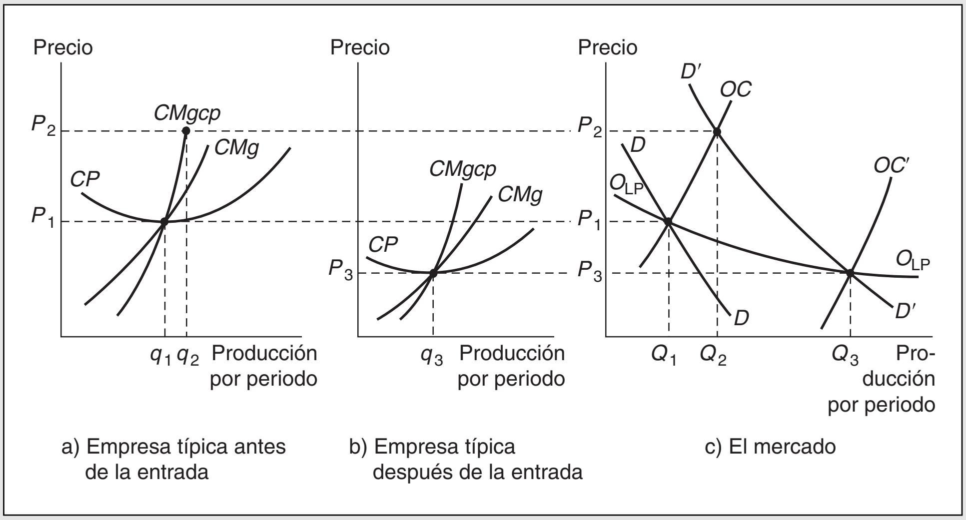
de curvas de costos (más altos) de la empresa típica. El nuevo precio de equilibrio a largo plazo de la industria es P_3 (aquí $P_3 = CMg = CP$), y, a este precio, la demanda es Q_3. Ahora tenemos dos puntos (P_1, Q_1 y P_3, Q_3) en la curva de oferta a largo plazo. Podremos encontrar todos los demás puntos de la curva de forma similar, considerando todos los desplazamientos posibles de la curva de demanda. Estos desplazamientos permitirán derivar la curva de oferta a largo plazo *OL*. Aquí, *OL* tiene una pendiente positiva debido a que la naturaleza de la industria es de costos crecientes. Nótese que la curva *OL* es algo más plana (más elástica) que las curvas de oferta a corto plazo. Esto indica la mayor flexibilidad de la respuesta de la oferta que es posible a largo plazo. Aun así, la curva tiene pendiente positiva, por lo cual el precio aumentará con el incremento en la demanda. Es probable que esta situación sea muy frecuente y en secciones posteriores hablaremos más a este respecto.

Industria con costos decrecientes

No todas las industrias tienen costos constantes o crecientes. En algunos casos, la entrada de nuevas empresas puede reducir los costos de las empresas de una industria. Por ejemplo, la entrada de nuevas empresas podría proporcionar un cúmulo más grande de mano de obra calificada del cual obtener trabajadores que el que había previamente, reduciendo así los costos derivados de la contratación de nuevos trabajadores. Asimismo, la entrada de nuevas empresas podría ofrecer una "masa crítica" de industrialización, la cual permitirá el desarrollo de redes de transporte y de comunicaciones más eficientes. Sea cual fuere la causa exacta de esta reducción de costos, el resultado final es el que presentan las tres secciones de la figura 10.9. El equilibrio inicial del mercado está representado por la combinación precio-cantidad P_1, Q_1 de la sección 10.9c. A este precio, la empresa típica produce q_1 y obtiene exactamente una utilidad económica nula. Supongamos ahora que la demanda del mercado se desplaza hacia fuera a D'. A corto plazo, el precio aumentará hasta P_2 y la empresa típica producirá q_2. En este nivel de precios obtiene una ganancia positiva. Esta ganancia provocará que entren nuevas empresas al mercado. Si esta entrada provoca que disminuyan los costos, el nuevo conjunto de curvas de costos de la empresa típica será similar al que presenta la figura 10.9b. Ahora, el nuevo precio de equilibrio es P_3; a este precio la demanda es Q_3. Si consideramos todos los desplazamientos posibles de la demanda, podremos derivar la curva de oferta a largo plazo, *OL*. Esta curva tiene una pendiente

FIGURA 10.9 **Una industria con costos decrecientes tiene una curva de oferta a largo plazo de pendiente negativa**

Al principio, el mercado se encuentra en equilibrio en P_1, Q_1. Un incremento en la demanda a D' provoca que el precio aumente a P_2 a corto plazo y la empresa típica produce q_2 con una ganancia, la cual atrae a nuevas empresas a la industria. Si la entrada de estas nuevas empresas provoca que los costos de la empresa típica disminuyan, el nuevo conjunto de curvas de costos podría ser como el que muestra la sección (b). Con este nuevo conjunto de curvas, el equilibrio se restablece en el mercado en P_3, Q_3. Si conectamos todos estos puntos de equilibrio, derivaremos una curva de oferta a largo plazo (OL) con pendiente negativa.



negativa debido a que la naturaleza de la industria es de costos decrecientes. Por tanto, a medida que aumenta la producción, el precio disminuye. Esta posibilidad ha sido utilizada como una justificación de los aranceles proteccionistas utilizados para proteger a las nuevas industrias de la competencia extranjera. Se supone (aun cuando sólo a veces es correcto) que al proteger a la "industria naciente" se permitirá que ésta crezca y, al final de cuentas, que compita con los precios mundiales más bajos.

Clasificación de las curvas de oferta a largo plazo

Así pues, hemos demostrado que la curva de oferta a largo plazo de una industria en competencia perfecta puede tener diversas formas. El principal determinante de la forma de esta curva a largo plazo es la forma en que la entrada de empresas en la industria afecta los costos de todas las empresas. Las siguientes definiciones cubren las distintas posibilidades:

DEFINICIÓN

Industrias con costos constantes, crecientes y decrecientes. Una curva de oferta de una industria puede tener una de las siguientes tres formas:

Costos constantes: La entrada de empresas en la industria no afecta los costos de los factores; la curva de oferta a largo plazo es una línea recta horizontal en el nivel del precio de equilibrio a largo plazo.

Costos crecientes: La entrada hace que aumenten los costos de los factores; la curva de oferta a largo plazo tiene pendiente positiva.

Costos decrecientes: La entrada disminuye el costo de los factores; la curva de oferta a largo plazo tiene pendiente negativa.

Ahora veremos cómo podemos cuantificar con más precisión la forma de la curva de oferta a largo plazo.

Elasticidad de la oferta a largo plazo

La curva de oferta a largo plazo de una industria incorpora la información sobre los ajustes internos de la empresa ante variaciones en los precios, la cantidad de empresas y el costo de los factores en respuesta a las oportunidades para obtener ganancias. Todas estas respuestas de la oferta quedan resumidas en el siguiente concepto de elasticidad:

DEFINICIÓN

Elasticidad de la oferta a largo plazo. La *elasticidad de la oferta a largo plazo* (e_{LP}) registra el cambio porcentual de la producción de la industria a largo plazo en respuesta a una variación porcentual del precio del producto. En términos matemáticos,

$$e_{LP} = \frac{\text{cambio porcentual de } Q}{\text{cambio porcentual de } P} = \frac{\partial Q_{LP}}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_{LP}}. \tag{10.54}$$

El valor de esta elasticidad puede ser positivo o negativo, dependiendo de que la industria tenga costos crecientes o decrecientes. Como hemos visto, en el caso de costos constantes, e_{LP} es infinita, porque las expansiones o contracciones de la industria se producen sin tener efecto alguno en los precios de los productos.

Estimaciones empíricas

Evidentemente, es importante disponer de buenas estimaciones empíricas de las elasticidades de la oferta a largo plazo. Estas elasticidades indican si podemos expandir la producción tan sólo con un ligero aumento del precio relativo (es decir, la oferta es elástica a variaciones en el precio) o si la expansión de la producción sólo se puede dar si los precios relativos aumentan de manera pronunciada (es decir, la oferta es inelástica al precio). Podemos utilizar esta información para determinar el efecto que probablemente tendrán los desplazamientos de la demanda en los precios a largo plazo y para evaluar otras propuestas de políticas económicas diseñadas para incrementar la oferta. La tabla 10.2 presenta varias estimaciones de la elasticidad de la oferta a largo plazo. Estas estimaciones son fundamentalmente (aun cuando no exclusivamente)

TABLA 10.2 **Algunas estimaciones de las elasticidades de la oferta a largo plazo**

Cultivos agrícolas	
Maíz	0.18
Algodón	0.67
Trigo	0.93
Aluminio	casi infinita
Cromo	0–3.0
Carbón (reservas orientales)	15.0–30.0
Gas natural (reservas estadounidenses)	0.20
Petróleo (reservas estadounidenses)	0.76
Vivienda urbana	
Densidad	5.3
Calidad	3.8

FUENTES: Cultivos agrícolas: M. Nerlove, “Estimates of the Elasticities of Supply of Selected Agricultural Commodities”, *Journal of Farm Economics* 38, mayo de 1956, pp. 496-509. Aluminio y cromo-estimado de U.S. Department of Interior, *Critical Materials Commodity Action Analysis*, U.S. Government Printing Office, Washington, DC, 1975. Carbón-estimado de M. B. Zimmerman, “The Supply of Coal in the Long Run: The Case of Eastern Deep Coal”, MIT Energy Laboratory Report No. MITEL 75-021, septiembre de 1975. Gas natural—basado en estimado de petróleo (véase texto) y J. D. Khazzoom, “The FPC Staff’s Econometric Model of Natural Gas Supply in the United States”, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, primavera de 1971, pp. 103-117. Petróleo: E. W. Erickson, S. W. Millsaps y R. M. Spann, “Oil Supply and Tax Incentives”, *Brookings Papers on Economic Activity* 2, 1974, pp. 449-478. Vivienda urbana: B. A. Smith, “The Supply of Urban Housing”, *Journal of Political Economy* 40, agosto de 1976, pp. 389-405.

elasticidades de los recursos naturales porque los economistas han dedicado mucha atención a los efectos que el aumento de la demanda tiene en los precios de estos recursos. Como deja en claro la tabla, estas estimaciones varían mucho dependiendo de las propiedades espaciales o geológicas de los recursos en cuestión. Sin embargo, todas las estimaciones sugieren que la oferta responde a los precios.

Análisis comparativo estático del equilibrio a largo plazo

Antes, en este capítulo, demostramos cómo hacer un análisis comparativo estático simple de los equilibrios a corto plazo en mercados en competencia perfecta. Si se utilizan estimados de las elasticidades de la oferta y la demanda de largo plazo podremos hacer exactamente el mismo tipo de análisis de largo plazo.

Por ejemplo, el modelo hipotético del mercado de los automóviles del ejemplo 10.4 también puede servir para el análisis del largo plazo, aun cuando requeriría establecer algunas diferencias para su interpretación. De hecho, es frecuente que en los modelos aplicados de oferta y demanda no quede claro si el autor tiene la intención de que sus resultados reflejen el corto o largo plazos, por lo que debemos prestar atención a cómo ha manejado la cuestión de la entrada.

Estructura de la industria

Un aspecto de los cambios de equilibrio a largo plazo en un mercado en competencia perfecta que no queda muy claro cuando hacemos un análisis simple de la oferta y la demanda es cómo varía la cantidad de empresas cuando cambian los equilibrios del mercado. Dado que, en algunos casos, la cantidad de empresas puede afectar el funcionamiento de los mercados (como se verá en la parte 5) y cómo las políticas públicas pueden expresar un interés directo en que entren o salgan empresas de una industria, debemos hacer un poco más de análisis. En esta sección se analizarán con detalle los determinantes de la cantidad de empresas en el caso de los costos constantes. También se hará una breve referencia al caso de los costos crecientes y, en algunos de los problemas correspondientes a este capítulo, se analizará este caso con más detalle.

Desplazamientos de la demanda

Dado que la curva de oferta a largo plazo de una industria con costos constantes es infinitamente elástica, el análisis de los desplazamientos de la demanda del mercado es particularmente fácil. Si en el equilibrio inicial de la industria, la producción es Q_0 y q^* representa el nivel de producción en el cual la empresa típica minimiza su costo promedio de largo plazo, entonces la cantidad de empresas (n_0) del equilibrio inicial estará determinado por

$$n_0 = \frac{Q_0}{q^*}. \tag{10.55}$$

Un desplazamiento de la demanda que modifique la producción de equilibrio a Q_1 provocará que, a largo plazo, la cantidad de empresas de equilibrio cambie a

$$n_1 = \frac{Q_1}{q^*}, \tag{10.56}$$

y el cambio de la cantidad de empresas estará determinado por

$$n_1 - n_0 = \frac{Q_1 - Q_0}{q^*}. \tag{10.57}$$

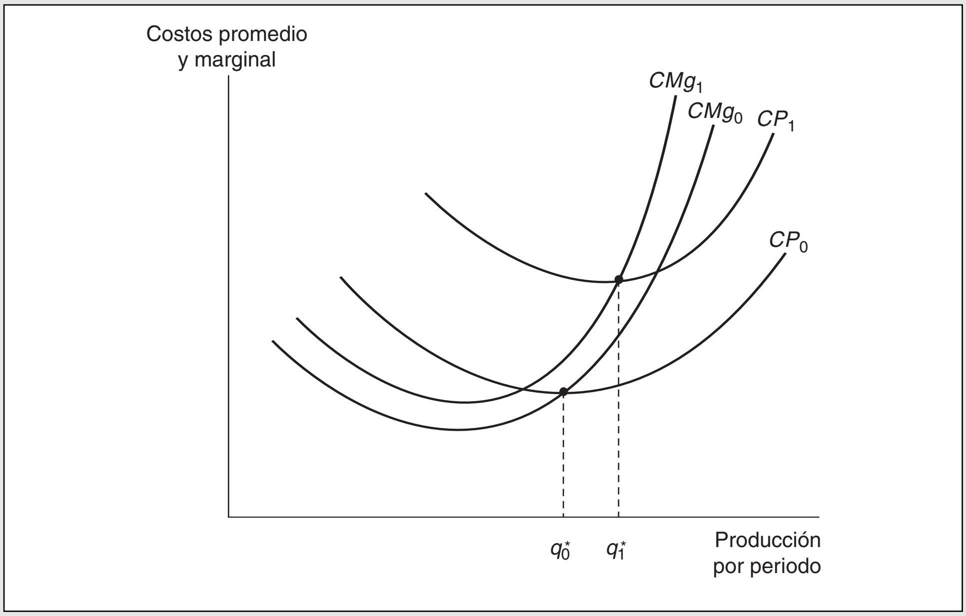
Es decir, la magnitud del desplazamiento de la demanda y el nivel de producción óptimo de la empresa típica determinarán por completo la variación de la cantidad de empresas del equilibrio.

Cambios en los costos de los factores

Incluso en el caso simple de la industria con costos constantes, analizar el efecto de un incremento en el precio de un factor productivo (y, por tanto, de un desplazamiento hacia la izquierda de la curva de oferta a largo plazo infinitamente elástica) es relativamente complicado. Primero, para poder calcular la caída de la producción de la industria, se debe conocer la magni-

FIGURA 10.10 **Un incremento en el precio de un factor puede alterar la producción de equilibrio a largo plazo de la empresa típica**

Un incremento en el precio de un factor productivo desplazará hacia arriba las curvas de costo marginal y de costo promedio. El efecto exacto que estos desplazamientos tienen en el nivel de producción óptimo de la empresa típica (q^*) dependerá de las magnitudes relativas de los desplazamientos.



tud del incremento del costo promedio mínimo debido al incremento en el precio del factor y también el efecto que este incremento en el precio de equilibrio a largo plazo tiene en la cantidad total demandada. Al conocer la función del costo promedio de la empresa típica y de la elasticidad precio de la demanda podremos hacer este cálculo sin problema. Sin embargo, el incremento en el precio de un factor productivo también puede modificar el nivel de producción que tiene el costo promedio mínimo para la empresa típica. La figura 10.10 ilustra esta posibilidad. El incremento en el precio de los factores ha desplazado hacia la izquierda al costo promedio y al costo marginal, pero como el costo promedio se ha desplazado hacia la izquierda más que el costo marginal, el nivel óptimo de producción de la empresa típica ha aumentado de q_0^* a q_1^*. No obstante, si invirtiéramos la magnitud relativa de los desplazamientos de las curvas de costos, el nivel de producción óptimo de la empresa típica habría disminuido.[10] Teniendo en cuenta esta variación en la escala óptima, la ecuación 10.57 pasa a ser

$$n_1 - n_0 = \frac{Q_1}{q_1^*} - \frac{Q_0}{q_0^*}, \tag{10.58}$$

y de ahí surgen varias posibilidades.

[10]La comprobación matemática sería la siguiente. Definimos la producción óptima, q^*, de modo que

$$CP(v, w, q^*) = CMg(v, w, q^*).$$

Si derivamos ambos lados de esta expresión con respecto a, por decir, v, tendremos

$$\frac{\partial CP}{\partial v} + \frac{\partial CP}{\partial q^*} \cdot \frac{\partial q^*}{\partial v} = \frac{\partial CMg}{\partial v} + \frac{\partial CMg}{\partial q^*} \cdot \frac{\partial q^*}{\partial v};$$

pero $\partial CP/\partial q^* = 0$, porque los costos promedio se minimizan. Si realizamos algunas operaciones obtendremos

$$\frac{\partial q^*}{\partial v} = \left\{\frac{\partial CMg}{\partial q^*}\right\}^{-1} \cdot \left[\frac{\partial CP}{\partial v} - \frac{\partial CMg}{\partial v}\right].$$

Dado que $\partial CMg/\partial q > 0$ en el CP mínimo, entonces CP, $\partial q^*/\partial v$ será positiva o negativa dependiendo de los desplazamientos relativos de las curvas del CP y del CMg.

Si $q_1^* \geq q_0^*$, la disminución de la cantidad que provoca el incremento en el precio de mercado hará que disminuya, sin duda alguna, la cantidad de empresas. Sin embargo, si $q_1^* < q_0^*$, el resultado será indeterminado. La producción de la industria se reducirá, pero el tamaño óptimo de la empresa también disminuirá, por lo cual el efecto último en la cantidad de empresas dependerá de la magnitud relativa de estos cambios. Una disminución en la cantidad de empresas sigue pareciendo el resultado más probable cuando un aumento en el precio de un factor productivo provoca que la producción de la industria disminuya, pero un incremento de n es posible, al menos desde el punto de vista teórico.

EJEMPLO 10.6

Costos crecientes de los factores y estructura de la industria

Un incremento de los costos para los fabricantes de marcos de bicicleta alterará el equilibrio descrito en el ejemplo 10.5, pero su efecto exacto en la estructura del mercado dependerá de cómo aumenten los costos. Los efectos de un incremento en los costos fijos son bastante claros; es decir, el precio de equilibrio de largo plazo aumentará y el tamaño de la empresa típica también aumentará. Este segundo efecto se produce porque un incremento de los costos fijos hace que aumente el *CP* pero no el *CMg*. Para garantizar que se cumple la condición de equilibrio también debe aumentar. Por ejemplo, si un incremento de los alquileres de los locales hace que los costos del fabricante típico de marcos aumenten a

$$CT(q) = q^3 - 20q^2 + 100q + 11\,616, \qquad (10.59)$$

resulta fácil demostrar que $CMg = CP$ cuando $q = 22$. Por tanto, este aumento del alquiler ha incrementado la escala eficiente de las operaciones de marcos de bicicleta en 2 marcos por mes. Cuando $q = 22$, el costo promedio y el marginal de largo plazo son iguales a 672, y éste será el precio de equilibrio a largo plazo de los marcos. A este precio

$$Q_D = 2500 - 3P = 484, \qquad (10.60)$$

por lo cual ahora sólo cabrán en el mercado 22 (= 484 ÷ 22) empresas. El incremento de los costos fijos no sólo ha dado lugar a un incremento en el precio, sino también a una importante reducción de la cantidad de fabricantes (de 50 a 22).

Sin embargo, el incremento de otros tipos de costos puede tener efectos más complejos. Si bien un análisis exhaustivo exigiría analizar las funciones de producción de los fabricantes de marcos de bicicleta y sus respectivas elecciones de factores, podemos ofrecer una sencilla ilustración suponiendo que un incremento en los precios de algunos factores variables hace que la función del costo total de la empresa típica pase a ser

$$CT(q) = q^3 - 8q^2 + 100q + 4950. \qquad (10.61)$$

Ahora

$$CMg = 3q^2 - 16q + 100$$

y

$$CP = q^2 - 8q + 100 + \frac{4950}{q}. \qquad (10.62)$$

Por tanto, si $CMg = CP$ se

$$2q^2 - 8q = \frac{4950}{q}, \qquad (10.63)$$

(continúa)

EJEMPLO 10.6 *CONTINÚACIÓN*

cuya solución es $q = 15$. Por tanto, este cambio en concreto de la función del costo total ha reducido sustancialmente el tamaño óptimo de estos talleres. Con $q = 15$, las ecuaciones 10.62 demuestran que $CP = CMg = 535$, y con este nuevo precio de equilibrio a largo plazo,

$$Q_D = 2500 - 3P = 895. \qquad (10.64)$$

En equilibrio, estos 895 marcos serán producidos aproximadamente por unas 60 empresas ($895 \div 15 = 59.67$; ¡los problemas no siempre dan resultados exactos!). A pesar de que el aumento de los costos da por resultado un precio más alto, en equilibrio, la cantidad de fabricantes de marcos aumenta de 50 a 60 porque el tamaño óptimo de cada taller ahora es más pequeño.

Pregunta: ¿Las funciones de costos promedio, marginal y total derivadas de la ecuación 10.61 en qué difieren de las del ejemplo 10.5? ¿Los costos (para todos los niveles de q) siempre son más altos en el caso de la anterior curva de costos? ¿El precio de equilibrio a largo plazo por qué es más alto con las anteriores curvas? (En la nota 10 a pie de página encontrará una explicación formal.)

Excedente del productor a largo plazo

En el capítulo 9 hablamos del concepto del excedente del productor a corto plazo, que representa el rendimiento que obtienen los propietarios de la empresa por encima del que obtendrían si la producción fuera nula. Demostramos que este excedente está compuesto por la suma de las utilidades a corto plazo más los costos fijos a corto plazo. Dado que, en el equilibrio de largo plazo, el beneficio es nulo y que no hay costos fijos, todo este excedente a corto plazo desaparece. Para los propietarios de las empresas no hace diferencia estar en un mercado concreto, porque podrían obtener idéntico rendimiento de sus inversiones en otro mercado cualquiera. Sin embargo, para los proveedores de los factores productivos de las empresas sí hará diferencia el nivel de producción de una industria determinada. Por supuesto que en el caso de los costos constantes suponemos que los precios de los factores son independientes del nivel de producción, partiendo del supuesto que los factores obtienen la misma cantidad de ingresos en distintos usos. Sin embargo, en el caso de los costos crecientes la entrada de nuevas empresas hará que aumente el precio de algunos factores, por lo cual los productores de estos factores estarán en mejor situación. El análisis de estos efectos de los precios lleva al concepto del excedente del productor a largo plazo:

DEFINICIÓN

Excedente del productor a largo plazo. El excedente del productor es el rendimiento adicional que ganan los productores realizando transacciones a un precio de mercado, el cual es superior al que ganarían si no produjeran nada. Éste queda ilustrado por el tamaño del área que está por debajo del precio de mercado y por encima de la curva de oferta.

Si bien esta definición es la misma que se presentó en el capítulo 9, ahora el contexto es un poco diferente. Ahora debemos interpretar que el "rendimiento adicional que obtienen los productores" significa "los precios más altos que reciben los factores productivos". En el caso del excedente del productor a corto plazo, las empresas que ganan con las transacciones de mercado son aquellas capaces de cubrir los costos fijos y de obtener ganancias por encima de sus costos variables. En el caso del excedente del productor a largo plazo, debemos volver a entrar en la cadena de producción para poder identificar a aquellas que serán las ganadoras últimas en las transacciones de mercado.

Tal vez parezca extraño que, gráficamente, podamos representar el excedente del productor a largo plazo de forma muy similar a la que se utiliza para el excedente del productor a corto plazo, el cual está dado por el área que se encuentra por encima de la curva de oferta a *largo plazo* y por debajo del precio de equilibrio del mercado. En el caso de los costos constantes, la oferta a largo plazo es infinitamente elástica y esta área será igual a cero, demostrando que los rendimientos de los factores son independientes del nivel de producción. Sin embargo, en el caso de costos crecientes, la oferta a largo plazo tendrá pendiente positiva y los precios de los factores aumentarán a medida que se expanda la producción de la industria. Dado que este concepto del excedente del productor a largo plazo se utiliza mucho en los análisis aplicados (véase el capítulo 11), a continuación se presenta una explicación formal.

Renta ricardiana

David Ricardo fue el primero en describir, a principios del siglo XIX,[11] una situación que permite representar el excedente del productor a largo plazo mucho más fácilmente. Supongamos que hay muchas parcelas en las que se cultiva determinada cosecha. Estas parcelas van desde tierras muy fértiles (con costos de producción muy bajos) hasta tierras muy pobres y secas (costos altos). Construimos la curva de oferta a largo plazo de esta cosecha de la manera siguiente. Cuando los precios son bajos sólo se utilizan las mejores tierras. A medida que aumenta la producción, se empiezan a explotar terrenos que entrañan costos más altos, porque los precios más altos hacen que usar estas tierras resulte rentable. La curva de oferta a largo plazo tiene pendiente positiva debido a los costos crecientes asociados al uso de tierras menos fértiles.

La figura 10.11 presenta el equilibrio del mercado en esta situación. A un precio de equilibrio de P^*, los propietarios de las empresas que tienen costos bajos y medios obtienen beneficios (a largo plazo). La "empresa marginal" obtiene exactamente un beneficio económico nulo. Las empresas que tienen costos todavía más altos no entran en el mercado porque al precio de P^* registrarían pérdidas. Sin embargo, las ganancias que obtienen las empresas entre estos márgenes persisten a largo plazo, porque reflejan el rendimiento de un recurso único: las tierras que tienen costos bajos. La libre entrada no puede erosionar estos beneficios ni siquiera a largo plazo. La suma de estas utilidades a largo plazo constituye el excedente del productor a largo plazo, tal como está dado por el área P^*EB de la sección (d) de la figura 10.11. Podemos demostrar la equivalencia de estas áreas reconociendo que cada punto de la curva de oferta de la sección (d) representa el costo promedio mínimo de alguna empresa. Para esta empresa, $P - CP$ representa la utilidad por unidad de producto. A continuación, podemos calcular la utilidad total a largo plazo sumando todas estas unidades de producción.[12]

Capitalización de las rentas

Los beneficios a largo plazo de las empresas de la figura 10.11 que tienen de costos bajos, muchas veces se verán reflejados en los precios de los recursos exclusivos propiedad de esas empresas. Por ejemplo, en el análisis inicial de Ricardo, cabe esperar que un terreno fértil se venda más caro que un terreno rocoso inservible. Dado que estos precios reflejarán el valor presente de todos los beneficios futuros, se dice que tales beneficios son los precios de los factores "capitalizados". Algunos ejemplos de capitalización incluyen fenómenos tan dispares como los precios altos de las casas bonitas con cómodo acceso a las redes de transporte, el alto valor de los contratos de las estrellas del rock y del deporte y el escaso valor de las tierras cercanas a los vertederos de sustancias tóxicas. Nótese que, en todos estos casos, la demanda del mercado es la que determina las rentas; es decir, estas rentas no son costos de factores tradicionales que indican la existencia de oportunidades no aprovechadas.

---

[11]Véase, David Ricardo, *The Principles of Political Economy and Taxation*, 1817; reimpresión de J. M. Dente e hijo, Londres, 1965, capítulos 2 y 32.

[12]En términos más formales, supongamos que las empresas están indexadas con i ($i = 1, \ldots n$) del costo más bajo al más alto y que cada empresa produce q^*. En el equilibrio a largo plazo, $Q^* = n^* q^*$ (donde n^* es la cantidad de empresas de equilibrio y Q^* es la producción total de la industria). Supongamos también que la inversa de la función de oferta (el precio competitivo en función de la cantidad ofrecida) está dada por $P = P(Q)$. Dada la indexación de las empresas, el precio está determinado por la empresa que tiene costos más altos en el mercado, $P = P(iq^*) = CP_i$ y $P^* = P(Q^*) = P(n^* q^*)$. Ahora, en el equilibrio a largo plazo, la utilidad de la empresa i está dada por

$$\pi_i = (P^* - CP_i)q^*,$$

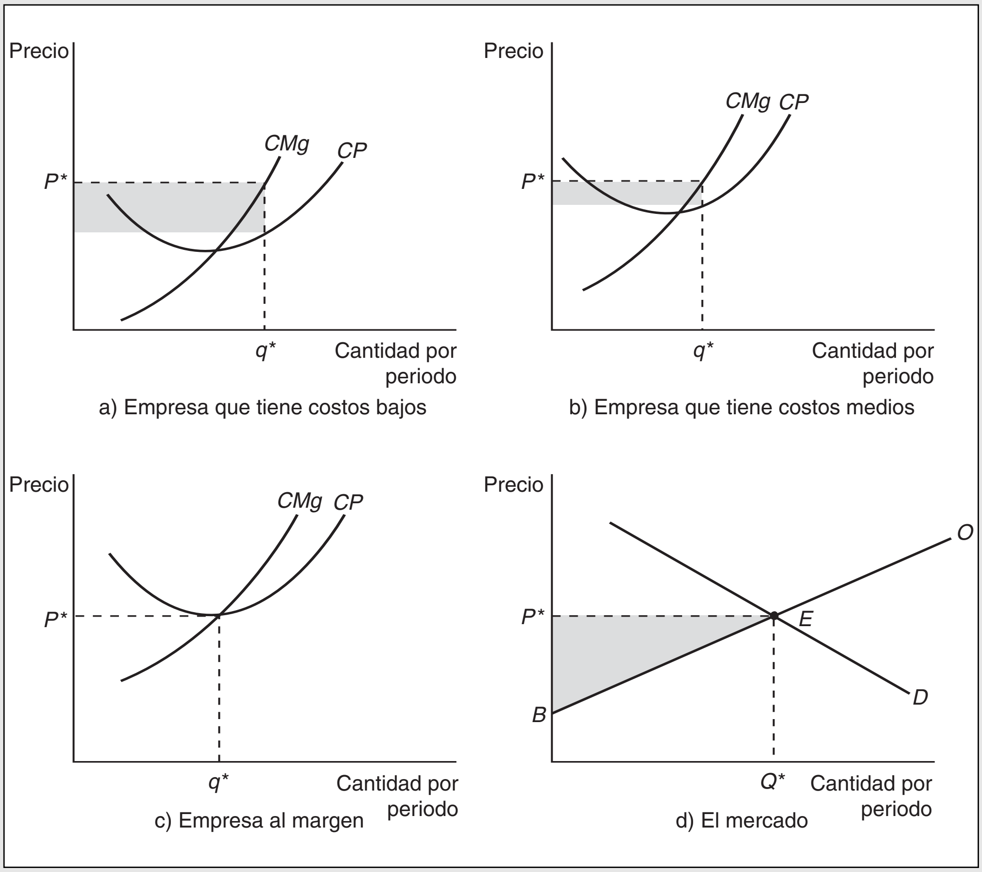
y la utilidad total está dada por

$$\begin{aligned}
\pi &= \int_0^{n^*} \pi_i di = \int_0^{n^*} (P^* - CP_i)q^* \; di \\
&= \int_0^{n^*} P^* \; q^* \; di - \int_0^{n^*} CP_i q^* \; di \\
&= P^* n^* \; q^* - \int_0^{n^*} P(iq^*)q^* \; di \\
&= P^* \; Q^* - \int_0^{Q^*} P(Q)dQ,
\end{aligned}$$

que es el área sombreada de la sección (d) de la figura 10.11.

FIGURA 10.11 **Renta ricardiana**

Los propietarios de los terrenos que tienen costos bajos y promedios obtendrán beneficios a largo plazo. El excedente de los productores a largo plazo representa la suma de todas estas rentas; es decir, el área *P*EB* de la sección (d). Normalmente, las rentas ricardianas se capitalizarán en los precios de los factores.



Oferta de factores y el excedente del productor a largo plazo

La escasez de factores de costos bajos es la que crea la posibilidad de que exista una renta ricardiana. Si una oferta infinitamente elástica de terrenos de costos bajos estuviera disponible, entonces no habría tal renta. En un sentido más general, todo factor productivo que sea "escaso" (en el sentido de que tiene una curva de oferta con pendiente positiva para una industria en particular) obtendrá rentas porque generará un rendimiento superior al que se obtendría si la producción de la industria fuera nula. En estos casos, los incrementos en la producción no sólo incrementan los costos de las empresas (y, por tanto, el precio al cual se venderá la producción), sino que también generan rentas de los factores. De nueva cuenta, la suma de todas estas rentas se mide según el área por encima de la curva de oferta a largo plazo y por debajo del precio de equilibrio. El cambio del tamaño de esta área del excedente del productor a largo plazo indica el cambio de las rentas de los factores de esta industria. Nótese que, a pesar de que medimos el excedente del productor de largo plazo empleando la curva de oferta del mercado, los factores de esta industria son los que, de hecho, reciben este excedente. Los cálculos empíricos de los cambios del excedente del productor a largo plazo se utilizan con mucha frecuencia en los análisis aplicados del bienestar para indicar cómo se ven afectados los productores de diversos factores productivos a medida que cambian las condiciones. El problema 10.7 y varios problemas del capítulo 11 ofrecen algunos ejemplos numéricos de las relaciones entre las rentas de los factores y el excedente del productor de largo plazo.

RESUMEN

En este capítulo hemos desarrollado un modelo detallado de cómo se determinan los precios en competencia en un solo mercado. Alfred Marshall fue el primero en desarrollar este modelo de oferta y demanda en la segunda mitad del siglo XIX, el cual está en el centro de gran parte de los análisis microeconómicos. Algunas de sus principales propiedades son las siguientes:

- En el corto plazo, los precios de equilibrio son establecidos por lo que los demandantes están dispuestos a pagar (reflejado por la curva de demanda) y lo que las empresas están dispuestas a producir (reflejado por la curva de oferta a corto plazo). En el proceso de toma de decisiones, los demandantes y los oferentes consideran que estos precios son fijos.
- Un desplazamiento de la demanda o de la oferta provocará que modifique el precio de equilibrio. La magnitud de este cambio dependerá de las pendientes de las diversas curvas y podemos hacer un modelo empleando técnicas bastante sencillas de su estática comparada.
- Las empresas pueden obtener ganancias positivas a corto plazo. Dado que las empresas siempre deben cubrir los costos fijos, éstas optarán por una producción positiva que proporcione ingresos que exceden a los costos variables.
- A largo plazo, la cantidad de empresas es variable en respuesta a las oportunidades de obtener ganancias. El supuesto de la libre entrada y salida de una industria implica que las empresas de una industria en competencia perfecta obtendrán beneficios económicos nulos a largo plazo ($P = CP$). Dado que las empresas también intentan maximizar sus utilidades, la igualdad $P = CMg = CP$ implica que las empresas operarán en el punto mínimo de su curva de costo promedio a largo plazo.
- La forma de la curva de oferta a largo plazo depende de cómo la entrada y la salida de empresas afecten los costos de los factores de las mismas. En el caso de costos constantes, los precios de los factores no cambian y la curva de oferta a largo plazo es horizontal. Si las entradas incrementan el costo de los factores, la curva de oferta a largo plazo tendrá una pendiente positiva.
- Las variaciones del equilibrio del mercado a largo plazo también modificarán la cantidad de empresas. La posibilidad de que los cambios de los costos de los factores o el progreso técnico puedan afectar el nivel de producción que implica el costo promedio mínimo dificulta la posibilidad de prever con exactitud la magnitud de estos cambios.
- Si las variaciones del equilibrio a largo plazo en un mercado afectan el precio de los factores en ese mercado, este cambio de precios afectará al bienestar de los proveedores de dichos factores productivos. Podemos medir estos cambios considerando la variación del valor del excedente del productor a largo plazo.

PROBLEMAS

10.1

Supongamos que hay 100 empresas idénticas en una industria en competencia perfecta. Cada empresa tiene una función de costos totales a corto plazo de forma

$$CT(q) = \frac{1}{300}q^3 + 0.2q^2 + 4q + 10.$$

a. Calcule la curva de oferta a corto plazo de la empresa con q en función del precio de mercado (P).

b. Partiendo del supuesto de que no hay efectos entre los costos de las empresas de la industria, calcule la curva de oferta a corto plazo de la industria.

c. Supongamos que la demanda del mercado está dada por $Q = -200P + 8000$. ¿Cuál será la combinación de precio-cantidad de equilibrio a corto plazo?

10.2

Supongamos que hay mil empresas idénticas que producen diamantes y que la función del costo total de cada empresa está determinada por

$$CT(q) = q^2 + wq,$$

donde q es el nivel de producción de la empresa y w el salario de los cortadores de diamantes.

a. Si $w = 10$, ¿cuál será la curva de oferta (a corto plazo) de la empresa? ¿Cuál es la curva de oferta de la industria? ¿Cuántos diamantes se producirán a un precio de 20 cada uno? ¿Cuántos diamantes adicionales se producirán a un precio de 21?

b. Supongamos que los salarios de los cortadores de diamantes dependen de la cantidad total de diamantes que produzcan y que la forma de esta relación está determinada por

$$w = 0.002Q,$$

donde Q representa la producción total de la industria que es la producción de la empresa típica multiplicada por mil.

En esta situación, demuestre que la curva del costo marginal de la empresa (y la oferta a corto plazo) depende de Q. ¿Cuál es la curva de oferta de la industria? ¿Cuántos diamantes serán producidos a un precio de 20 cada uno? ¿Cuántos diamantes más serán producidos a un precio de 21? ¿Qué concluye usted respecto a la forma de la curva de oferta a corto plazo?

10.3

Un mercado en competencia perfecta tiene mil empresas. En el muy corto plazo, cada una de ellas tiene una oferta fija de 100 unidades. La demanda del mercado está determinada por

$$Q = 160\,000 - 10\,000P.$$

a. Calcule el precio de equilibrio en el muy corto plazo.

b. Calcule la curva de demanda de una empresa de esta industria.

c. Calcule cuál sería el precio de equilibrio si uno de los vendedores decidiera no vender nada o si un vendedor decidiera vender 200 unidades.

d. En el punto de equilibrio inicial, calcule la elasticidad de la curva de demanda de la industria y la elasticidad de la curva de demanda de un vendedor cualquiera.

Supongamos ahora que, a corto plazo, cada empresa tiene una curva de oferta que muestra la cantidad que ofertará una empresa (q_i) en función del precio de mercado. La forma específica de esta curva de oferta está dada por

$$q_i = -200 + 50P.$$

Utilizando la respuesta de la oferta a corto plazo, responda los cuatro incisos que anteceden.

10.4

Supongamos que la demanda de frisbees está dada por

$$Q = 100 - 2P$$

y la oferta por

$$Q = 20 + 6P.$$

a. ¿Cuáles serán las cantidades y el precio de equilibrio de los frisbees?

b. Supongamos que el gobierno impone un impuesto de 4 dólares por frisbee. Ahora, ¿cuál será la cantidad de equilibrio, el precio que pagarán los consumidores y el precio que recibirán las empresas? ¿Cómo comparten la carga del impuesto los compradores y los vendedores?

c. ¿Cómo cambiarán sus respuestas a los incisos a y b si la curva de oferta fuera

$$Q = 70 + P?$$

¿Qué concluye al comparar estos dos casos? (Véase el capítulo 11 para una explicación más amplia de la teoría de la incidencia de los impuestos.)

10.5

El trigo es producido en condiciones de competencia perfecta. Los agricultores individuales tienen curvas de costos medios a largo plazo con forma de "U", que alcanzan un costo medio mínimo de 3 dólares por fanega cuando producen 1000 fanegas.

a. Si la curva de demanda del mercado de trigo está dada por

$$Q_D = 2\,600\,000 - 200\,000P,$$

donde Q_D es el número de fanegas demandadas por año y P es el precio por fanega, ¿cuál será el precio del trigo en el equilibrio a largo plazo, cuánto trigo se demandará en total y cuántas granjas cultivarán trigo?

b. Supongamos que la demanda se desplaza hacia fuera a

$$Q_D = 3\,200\,000 - 200\,000P.$$

Si los agricultores no pueden ajustar su producción a corto plazo, ¿cuál será el precio de mercado con esta nueva curva de demanda? ¿Cuáles serán las utilidades de la empresa típica?

c. Dada la nueva curva de demanda descrita en el inciso b, ¿cuál será el nuevo equilibrio a largo plazo? (Es decir, calcule el precio de mercado, la cantidad de trigo producida y la nueva cantidad de granjas de equilibrio en esta nueva situación.)

d. Dibuje sus resultados.

10.6

Una industria en competencia perfecta tiene una gran cantidad de entrantes en potencia. Cada empresa tiene la misma estructura de costos, de forma que el costo promedio a largo plazo se minimiza a un nivel de producción de 20 unidades ($q_i = 20$). El costo promedio mínimo es de 10 dólares por unidad. La demanda total del mercado está dada por

$$Q = 1500 - 50P.$$

a. ¿Cuál es la curva de oferta a largo plazo de la industria?

b. ¿Cuál es el precio de equilibrio a largo plazo (P^*)? ¿Y la producción total de la industria (Q^*)? ¿Y la cantidad de empresas? ¿Y las utilidades de cada empresa?

c. La función del costo total a corto plazo asociada con la producción de equilibrio a largo plazo de cada empresa está dada por

$$CT(q) = 0.5q^2 - 10q + 200.$$

Calcule la función del costo marginal y el costo promedio a corto plazo. ¿El costo promedio a corto plazo en qué nivel de producción llega al mínimo?

d. Calcule la función del costo promedio y el costo marginal a corto plazo de cada empresa y la función de oferta a corto plazo de la industria.

e. Supongamos ahora que la función de demanda del mercado se desplaza hacia arriba a $Q = 2000 - 50P$. Utilizando esta nueva curva de demanda, responda el inciso b para el muy corto plazo cuando las empresas no pueden alterar su nivel de producción.

f. En el corto plazo, utilice la curva de oferta a corto plazo de la industria para volver a calcular sus respuestas al inciso b.

g. ¿Cuál es el nuevo equilibrio a largo plazo de esta industria?

10.7

Supongamos que la demanda de cigüeñales está dada por

$$Q = 1500 - 50P$$

y que los costos operativos totales a largo plazo de cada empresa fabricante de cigüeñales en una industria en competencia están dados por

$$CT(q) = 0.5q^2 - 10q.$$

El talento empresarial para la fabricación de cigüeñales es escaso. La curva de oferta de empresarios está dada por

$$Q_S = 0.25w,$$

donde w es el salario anual pagado.

Supongamos también que cada empresa fabricante de cigüeñales necesita un empresario —y sólo uno— (por tanto, la cantidad de empresarios contratados es igual a la cantidad de empresas). Por tanto, los costos totales a largo plazo de cada empresa están dados por

$$CT(q,w) = 0.5q^2 - 10q + w.$$

a. ¿Cuál es la cantidad de equilibrio a largo plazo de los cigüeñales producidos? ¿Cuántos cigüeñales son producidos por cada empresa? ¿Cuál es el precio de equilibrio a largo plazo de los cigüeñales? ¿Cuántas empresas habrá? ¿Cuántos empresarios serán contratados y a qué salario?

b. Supongamos que la demanda de cigüeñales se desplaza hacia fuera a

$$Q = 2428 - 50P.$$

Vuelva a responder a las preguntas del inciso a.

c. Dado que los empresarios que fabrican cigüeñales son la causa de que la curva de oferta a largo plazo tenga pendiente positiva en este problema, ellos recibirán todas las rentas generadas a medida que se expanda la producción de la industria. Calcule el incremento de las rentas entre el inciso a y el b. Demuestre que este valor es idéntico al cambio del excedente del productor a largo plazo, tal y como se mide a lo largo de la curva de oferta de cigüeñales.

10.8

Supongamos que la función del costo total a largo plazo del productor típico de champiñones está dada por

$$CT(q,w) = wq^2 - 10q + 100,$$

donde q es la producción de la empresa típica y w representa el salario por hora de los recolectores de champiñones. Supongamos también que la demanda de champiñones está dada por

$$Q = -1000P + 40\,000,$$

donde Q es la cantidad total demandada y P es el precio de mercado de los champiñones.

a. Si el salario de los recolectores es de un dólar, ¿cuál será la producción de equilibrio a largo plazo del recolector típico?

b. Supongamos que la industria del champiñón tiene costos constantes y que todas las empresas son idénticas, ¿cuál será el precio de equilibrio a largo plazo de los champiñones y cuántas empresas habrá en la industria?

c. Supongamos que el gobierno impone un impuesto de 3 dólares por cada recolector contratado (incrementando los costos salariales totales, w a 4 dólares). Suponiendo que la empresa típica sigue teniendo una función de costos dada por

$$C(q,w) = wq^2 - 10q + 100,$$

¿cómo cambiarán sus respuestas a los incisos a y b que anteceden con este nuevo salario más alto?

d. ¿Cómo cambiarán sus respuestas a los incisos a, b y c que anteceden si la demanda del mercado estuviera dada por

$$Q = -1000P + 60\,000?$$

LECTURAS RECOMENDADAS

Knight, F. H. *Risk, Uncertainty and Profit,* Houghton, Mifflin, Boston, 1921, caps. 5 y 6, 1921.
Tratamiento clásico de la función que los hechos económicos desempeñan para motivar el comportamiento de la industria a largo plazo.

Marshall, A. *Principles of Economics,* 8a. ed., Crowell-Collier and Macmillan, Nueva York, 1920, libro 5, caps. 1, 2 y 3.
Desarrollo clásico del mecanismo de la oferta y la demanda.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory,* Oxford University Press, Nueva York, 1995, cap. 10.
Presenta un análisis compacto con un grado considerable de precisión teórica. Contiene una muy buena explicación de una situación en la cual los mercados en competencia no pueden llegar al equilibrio.

Reynolds, L. G. “Cut-Throat Competition”, *American Economic Review 30*, diciembre de 1940, pp. 736-747.
Critica la noción de que puede haber “demasiada competencia” en una industria.

Robinson, J. “What Is Perfect Competition?”, *Quarterly Journal of Economics 49*, 1934, pp. 104-120.
Planteamiento crítico de los supuestos de la competencia perfecta.

Stigler, G. J. “Perfect Competition, Historically Contemplated”, *Journal of Political Economy 65*, 1957, pp. 1-17.
Fascinante planteamiento del desarrollo histórico del modelo de la competencia.

Varian, H. R. *Microeconomic Analysis,* 3a. ed., W. W. Norton, Nueva York, 1995, cap. 13.
Abarca, en forma ilustrativa y tersa, muchos de los temas de este capítulo. Hace hincapié en la importancia de las entradas, pero la índole precisa de la curva de oferta a largo plazo no está muy clara.

AMPLIACIONES

Agregación y estimación de la demanda

Del capítulo 4 al 6 se demostró que el supuesto de la maximización de la utilidad implica varias propiedades para las funciones de demanda de los individuos:

- Las funciones son continuas;
- Las funciones son homogéneas o de grado cero en todos los precios y el ingreso;
- Los efectos de sustitución del ingreso compensado son negativos, y
- Los efectos de sustitución de los precios cruzados son simétricos.

En esta extensión se analizará la medida en que podríamos esperar que estas propiedades fueran válidas en el caso de funciones agregadas de la demanda del mercado y qué restricciones, en su caso, deberíamos aplicar a dichas funciones. Además, se ilustrarán otras cuestiones que surgen cuando estimamos estas funciones agregadas y algunos resultados de tales estimaciones.

A10.1 Continuidad

La continuidad de las funciones de demanda individuales implica, claramente, la continuidad de las funciones de demanda del mercado. Sin embargo, existen situaciones en las cuales las funciones de demanda del mercado pueden ser continuas, mientras que las funciones de los individuos no lo son. Supongamos un caso en el cual los bienes (por ejemplo, un automóvil) deben ser adquiridos en unidades grandes y discretas. En este caso, la demanda de los individuos puede ser discontinua, pero las demandas agregadas de muchas personas puede ser (casi) continua.

A10.2 Homogeneidad y agregación de los ingresos

Dado que la función de demanda de cada individuo es homogénea de grado cero para todos los precios e ingresos, las funciones de demanda también son homogéneas de grado cero para todos los precios y los ingresos de *los individuos.* No obstante, las funciones de demanda del mercado no son, necesariamente, homogéneas de grado cero para todos los precios y el ingreso *total.*

Para ver cuándo la demanda podría depender tan sólo del ingreso total, supongamos que la demanda del individuo (i) para X está dada por

$$x_i = a_i(P) + b(P)y_i \qquad i = 1, n, \tag{i}$$

donde $\boldsymbol{P}$ es el vector de todos los precios de mercado, $a_i(\boldsymbol{P})$ es un conjunto de efectos de precios específicos en los individuos y $b(\boldsymbol{P})$ es la función marginal de la propensión a gastar que es igual para todos los individuos (si bien este parámetro podría depender de los precios de mercado). En este caso, las funciones de demanda del mercado dependerán de $\boldsymbol{P}$ y del ingreso total.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{ii}$$

Esto demuestra que la demanda del mercado refleja el comportamiento de un solo consumidor "típico". Gorman (1959) demuestra que ésta es la forma más general de función de demanda que representa a un consumidor típico así.

A10.3 Limitaciones de ecuaciones cruzadas

Supongamos que un individuo típico compra k artículos y que lo que gasta en cada uno de ellos está dado por

$$p_j x_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i + b_j y \qquad j = 1, k. \tag{iii}$$

Si los gastos para estos k artículos agotan el ingreso total, es decir si,

$$\sum_{j=1}^{k} p_j x_j = y, \tag{iv}$$

entonces la suma de todos los bienes demuestra que

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} = 0 \text{ (para todos los } i) \tag{v}$$

y que

$$\sum_{j=1}^{k} b_j = 1 \tag{vi}$$

para cada persona. Esto implica que, por lo general, los investigadores no pueden estimar las funciones de gasto para *k* bienes de forma independiente. Por el contrario, deben tomar en cuenta las relaciones entre las funciones de gasto para diversos bienes.

A10.4 Econometría práctica

La medida en que estas consideraciones teóricas se reflejan en la práctica real de los econometristas varía enormemente. En el nivel menos complejo, podrían estimar una ecuación similar a (iii) empleando directamente mínimos cuadrados ordinarios (MCO), y prestando poca atención a la forma en que se violarían los supuestos. Podrían calcular diversas elasticidades directamente a partir de esta ecuación, si bien dada la forma lineal utilizada éstas no serían constantes para los cambios de p_i o y. Una fórmula de la ecuación iii con elasticidad constante sería

$$\ln(p_j x_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} \ln(p_i) + b_j \ln y \qquad j = 1, k, \quad \text{(vii)}$$

y, en este caso, las elasticidades del ingreso y el precio estarían dadas directamente por

$$\begin{aligned} e_{x_j, p_j} &= 1 + a_{ij} \\ e_{x_j, p_i} &= a_{ij} \qquad (i \neq j) \qquad \text{(viii)} \\ e_{y_j, y} &= b_j, \end{aligned}$$

respectivamente. Sin embargo, nótese que no se ha prestado atención específica a los sesgos que introduce el uso del ingreso agregado ni al hecho de no tomar en cuenta las posibles restricciones de las ecuaciones cruzadas, como las de las ecuaciones v y vi. La homogeneidad de cada una de las funciones de la demanda $\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij} + b_j = -1 \right)$, implica otras restricciones, si bien dicha restricción con frecuencia no es tomada en cuenta para hacer estimaciones econométricas simples.

Algunos estudios más complejos de las ecuaciones de la demanda agregada pretenden remediar estos problemas considerando explícitamente los posibles efectos de la distribución del ingreso y estimando el sistema completo de la ecuación de la demanda. Theil (1971, 1975) ofrece una buena introducción a algunos de los procedimientos empleados.

Resultados econométricos

La tabla 10.3 presenta una serie de estimados económicos de elasticidades representativas del precio y el ingreso obtenidos de distintas fuentes. Es necesario consultar las fuentes originales de estos estimados para determinar la medida en que los autores han prestado atención a las restricciones teóricas que acabamos de exponer. En general, estos estimados coinciden bastante con la intuición; por ejemplo, la demanda de vuelos trasatlánticos tiene precios más clásicos que la demanda de servicios médicos. Las altas elasticidades del precio y el ingreso de la vivienda ocupada por su dueño podría resultar un tanto más inesperada, porque el "abrigo" suele ser considerado en todas las discusiones como una necesidad básica. El muy alto estimado de la elasticidad ingreso de la demanda de automóviles muy probablemente combina la medición de la cantidad y la calidad demandadas. Sin embargo, no sugiere por qué la industria es tan sensible al ciclo de la actividad económica.

Referencias

Gorman, W. M. "Separable Utility and Aggregation", *Econometrica*, noviembre de 1959, pp. 469-481.

Shafer, W. y H. Sonnenschein. "Market Demand and Excess Demand Functions", en K. J. Arrow y M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, vol II. North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 671-693.

Stoker, T. M. "Empirical Approaches to the Problem of Aggregation over Individuals", *Journal of Economic Literature*, diciembre de 1993, pp. 1827-1874.

Theil, H. *Principles of Econometrics*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1971, pp. 326-346.

———. *Theory and Measurement of Consumer Demand*, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1975, caps. 5 y 6.

TABLA 10.3 **Elasticidades representativas del precio y del ingreso a la demanda**

	Elasticidad del precio	Elasticidad del ingreso
Alimentos	–0.21	+0.28
Servicios médicos	–0.18	+0.22
Vivienda		
Alquilada	–0.18	+1.00
Propia	–1.20	+1.20
Electricidad	–1.14	+0.61
Automóviles	–1.20	+3.00
Gasolina	–0.55	+1.60
Cerveza	–0.26	+0.38
Vino	–0.88	+0.97
Marihuana	–1.50	0.00
Cigarrillos	–0.35	+0.50
Abortos	–0.81	+0.79
Vuelos trasatlánticos	–1.30	+1.40
Importaciones	–0.58	+2.73
Dinero	–0.40	+1.00

FUENTES: Alimentos: H. Wold y L. Jureen, *Demand Anlysis*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1953, p. 203. Servicios médicos: elasticidad del ingreso tomada de R. Andersen y L. Benham, "Factors Affecting the Relationship Between Family Income and Medical Care Consumption", en Herbert Klarman, Ed., *Empirical Studies in Health Economics*, Johns Hopkins Press, Baltimore, 1970. Elasticidad del precio tomada de W. C. Manning *et al.*, "Health Insurance and the Demand for Medical Care: Evidence from a Randomized Experiment", *American Economic Review*, junio de 1987, pp. 251-277.Vivienda: elasticidades del ingreso tomadas de F. De Leeuw, "The Demand for Housing", *Review for Economics and Statistics*, febrero de 1971; elasticidades del precio tomadas de H. S. Houthakker y L. D. Taylor, *Consumer Demand in the United States*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1970, pp. 166-167. Electricidad: R. F. Halvorsen, "Residential Demand for Electricity", tesis inédita de doctorado, Harvard University, diciembre de 1972. Automóviles: Gregory C. Chow, *Demand for Automobiles in the United States*, North Holland, Amsterdam, 1957. Gasolina: C. Dahl, "Gasoline Demand Survey", *Energy Journal* 7, 1986, pp. 67-82. Cerveza y vino: J. A. Johnson, E. H. Oksanen, M. R. Veall, D. Fritz, "Short-Run and Long-Run Elasticities for Candian Consumption of Alcoholic Beverages", *Review of Economics and Statistics*, febrero de 1992, pp. 64-74. Marihuana: T. C. Misket y F. Vakil, "Some Estimate of Price and Expenditure Elasticities Among UCLA Students", *Review of Economics and Statistics*, noviembre de 1972, pp. 474-475. Cigarrillos: F. Chalemaker, "Rational Addictive Behavior and Cigarette Smoking", *Journal of Political Economy*, agosto de 1991, pp. 722-742. Abortos: M. H. Medoff, "An Economic Analysis of the Demand for Abortions", *Economic Inquiry*, abril de 1988, pp. 253-259. Vuelos trasatlánticos: J. M. Cigliano, "Price and Income Elasticities for Airline Travel", *Business Economics*, septiembre de 1980, pp. 17-21. Importaciones: M. D. Chinn, "Beware of Econometricians Bearing Estimates", *Journal of Policy Analysis and Management*, otoño de 1991, pp. 546-567. Dinero: "Long Run Income and Interest Elasticities of Money Demand in the United States", *Review of Economics and Statistics*, noviembre de 1991, pp. 665-674. Elasticidad precio se entiende como elasticidad de la tasa de interés.

Capítulo 11

ANÁLISIS APLICADO DE LA COMPETENCIA

El mercado en competencia perfecta que se desarrolló en el capítulo anterior establece las bases para una parte considerable del análisis microeconómico aplicado. Se ha demostrado que estos principios de la oferta y la demanda representan un buen punto de partida para el análisis de muchos mercados del mundo real. En este capítulo ofrecemos una breve descripción de algunas de estas aplicaciones. Antes de empezar, es conveniente hacer dos advertencias. La primera es que, aquí, el análisis sólo se centrará en un solo mercado; es decir, se aplicará el planteamiento de un equilibrio parcial. En el capítulo 12 se analizará una serie de modelos de equilibrio general que permiten un análisis de las repercusiones simultáneas en muchos mercados. En estos modelos, algunos de los resultados sencillos del análisis de oferta y demanda podrían no ser válidos. Asimismo, debemos tener en mente una advertencia sobre los supuestos básicos estrictos del modelo de la competencia. El más importante de estos supuestos es que los proveedores y los demandantes toman el precio como determinado. Cuando los agentes económicos tienen cierta influencia en el precio de mercado es necesario emplear modelos alternativos. En la parte 5 de este libro se analizarán algunos de esos modelos.

Eficiencia económica y análisis del bienestar

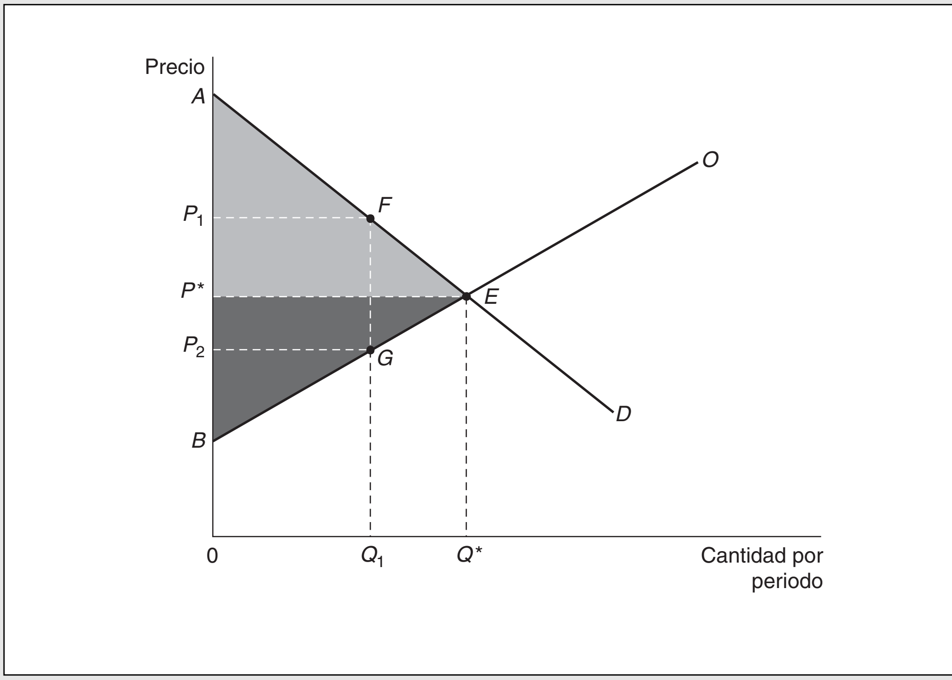
Los equilibrios competitivos de largo plazo pueden tener la deseable propiedad de asignar los recursos con "eficiencia". En el capítulo 12 se hablará más sobre este concepto en el contexto de un equilibrio general, pero aquí ofreceremos una descripción del equilibrio parcial que explica por qué el resultado podría ser válido. Recuerde que en el capítulo 5 vimos que el área por debajo de la curva de demanda y por encima del precio de mercado representa el excedente del consumidor; es decir, la utilidad extra que obtienen los consumidores al optar, voluntariamente, por comprar un bien, en lugar de verse obligados a renunciar a dicho bien. Asimismo, como vimos en el capítulo 10, sabemos que el área por debajo del precio de mercado y por encima de la curva de oferta a largo plazo mide el excedente del productor, y representa el rendimiento adicional que los factores productivos reciben, en lugar de no realizar transacciones con ese bien. Por tanto, en términos globales, el área entre la curva de demanda y la curva de oferta representa la suma del excedente del consumidor y del productor. Mide el valor adicional total que obtienen los agentes del mercado al poder realizar transacciones con este bien en el mercado. Al parecer, queda claro que esta área total se maximiza habiendo equilibrio en un mercado en competencia.

Una demostración gráfica

La figura 11.1 contiene una demostración simplificada. Dada la curva de demanda (D) y la curva de oferta a largo plazo (O), la suma del excedente del productor y del consumidor está determinada por la distancia AB para la primera unidad producida. El excedente total sigue aumentando

FIGURA 11.1 **Equilibrio en competencia y el excedente del productor y el consumidor**

En el equilibrio en competencia (Q^*) la suma del excedente del consumidor (sombreado en tono claro) y del excedente del productor (sombreado en tono oscuro) se maximiza. Para un nivel de producción inferior a Q^*, por ejemplo Q_1, hay una pérdida de eficiencia económica o de peso muerto, que se refleja en la pérdida del excedente del productor y del consumidor determinada por el área *FEG*.



a medida que se produce más hasta llegar al nivel de equilibrio en competencia, Q^*. Este nivel de producción se alcanzará cuando el precio se encuentra en el nivel de competencia, P^*. El excedente total del consumidor está representado por el área de la figura sombreada en tono más claro y el excedente del productor total por el área en tono más oscuro. Es evidente que, para niveles de producción por debajo de Q^* (por decir, Q_1), el excedente total sería menor. Una señal de esta mala asignación es que en Q_1, los demandantes valorarían una unidad adicional de producto en P_1, mientras que los costos marginales estarían determinados por P_2. Dado que $P_1 > P_2$, el bienestar total aumentaría claramente si se produjera una unidad más de producto. Una transacción que implicara el intercambio de esta unidad adicional a un precio cualquiera entre P_1 y P_2 sería beneficiosa para las dos partes; es decir, ambas saldrían ganando.

La pérdida total de bienestar que se produce en el nivel de producción Q_1 está determinada por el área *FEG*. La distribución del excedente en el nivel de producción Q_1 dependerá del precio exacto (que no es el de equilibrio) que prevalezca en el mercado. A un precio de P_1 el excedente del consumidor quedaría sustancialmente reducido al área AFP_1, mientras que los productores podrían salir ganando, de hecho, porque el excedente del productor ahora es igual a P_1FGB. A un precio bajo como P_2 la situación se revertiría, quedando los productores en una situación mucho peor que la que tenían inicialmente. Por tanto, la distribución de las pérdidas de bienestar derivadas de producir una cantidad inferior a Q^* dependerá del precio al que se realicen las transacciones. Sin embargo, la cuantía de la pérdida total estará determinada por *FEG*, independientemente del precio.[1]

[1]Los aumentos de la producción por encima del nivel Q^* también disminuyen claramente el bienestar. Véase el problema 11.1.

Una demostración matemática

Matemáticamente, queremos maximizar

excedente del consumidor + excedente del productor

$$= [U(Q) - PQ] + [PQ - \int_0^Q P(Q)\,dQ] = U(Q) - \int_0^Q P(Q)\,dQ, \quad (11.1)$$

donde $U(Q)$ es la función de utilidad del consumidor representativo y $P(Q)$ es la relación de oferta a largo plazo. En los equilibrios a largo plazo a lo largo de la curva de oferta a largo plazo, $P(Q) = CP = CMg$. La maximización de la ecuación 11.1 respecto a Q da por resultado

$$U'(Q) = P(Q) = CP = CMg, \quad (11.2)$$

por lo cual la maximización se produce donde el valor marginal de Q para el consumidor representativo es igual al precio de mercado. Pero este punto es precisamente el equilibrio de la oferta y la demanda en competencia, porque la curva de demanda representa las valoraciones marginales de los consumidores, mientras que la curva de oferta refleja el costo marginal (y, en el equilibrio a largo plazo, el costo promedio).

Análisis aplicado del bienestar

La conclusión de que el equilibrio en competencia maximiza la suma del excedente del productor y del consumidor refleja una serie de "teoremas" más generales sobre la eficiencia económica que analizaremos en el capítulo 12. Por ahora, es mejor dejar la descripción de las principales consideraciones ligadas a estos teoremas hasta que presentemos ese análisis más amplio. Aquí nos interesa más mostrar cómo usamos el modelo de la competencia para analizar las consecuencias que el cambio de las condiciones económicas tiene en el bienestar de los agentes del mercado. Normalmente, medimos estos cambios del bienestar fijándonos en las variaciones del excedente del productor y del consumidor.

Cálculos de las pérdidas de bienestar

La aplicación de los conceptos del excedente del productor y del consumidor permite calcular de forma explícita las pérdidas de bienestar debidas a las restricciones para las transacciones voluntarias. En el caso de las curvas lineales de la oferta y la demanda, este cálculo resulta especialmente sencillo porque las áreas de las pérdidas suelen ser triangulares. Por ejemplo, si la demanda está determinada por

$$Q_D = 10 - P \quad (11.3)$$

y la oferta por

$$Q_O = P - 2, \quad (11.4)$$

el equilibrio del mercado se produce en el punto $P^* = 6$, $Q^* = 4$. Si restringimos la producción a $\bar{Q} = 3$ se crearía una diferencia entre la cantidad que los demandantes están dispuestos a pagar ($P_D = 10 - Q = 7$) y la que los oferentes piden ($P_O = 2 + \bar{Q} = 5$). La pérdida de bienestar debido a la restricción de las transacciones está determinada por un triángulo con una base de 2 ($= P_D - P_O = 7 - 5$) y una altura de 1 (la diferencia entre Q^* y $\bar{Q}$). Por tanto, la pérdida de bienestar es un dólar si medimos P en dólares por unidad y Q en unidades. En términos más generales, mediríamos la pérdida en las unidades que usemos para medir $P \cdot Q$.

Cálculos con curvas de elasticidad constante. Por lo normal, podemos obtener resultados más realistas empleando curvas de oferta y demanda de elasticidad constante, basadas en estudios econométricos. En el ejemplo 10.4 analizamos este modelo aplicado al mercado estadounidense de

(continúa)

EJEMPLO 11.1 *CONTINUACIÓN*

automóviles. Podemos simplificar un poco ese ejemplo suponiendo que P es medida en miles de dólares y Q en millones de automóviles, y que la demanda está determinada por

$$Q_D = 200\ P^{-1.2} \tag{11.5}$$

y la oferta por

$$Q_O = 1.3\ P. \tag{11.6}$$

El equilibrio del mercado está determinado por $P^* = 9.87$, $Q^* = 12.8$. Supongamos ahora que la política gubernamental restringe las ventas de automóviles a 11 (millones) para controlar la emisión de contaminantes. El método triangular que usamos antes permitirá hacer una aproximación de la pérdida de bienestar derivada directamente de esta política.

Si $\bar{Q} = 11$, $P_D = (11/200)^{-0.83} = 11.1$, $P_O = 11/1.3 = 8.46$. Luego entonces, el "triángulo" que representa la pérdida de bienestar estará determinado por $0.5(P_D - P_O)(Q^* - \bar{Q}) = 0.5(11.1 - 8.46)(12.8 - 11) = 2.38$. En este caso, las unidades son las que resulten de P por Q: miles de millones de dólares. El valor aproximado[2] de la pérdida de bienestar es, por tanto, de 2400 millones de dólares, cifra que podemos comparar con la ganancia que se espera obtener del control de las emisiones contaminantes.

Distribución de la pérdida. En el caso de los automóviles, la pérdida de bienestar es compartida por los consumidores y los productores, más o menos, en partes iguales. Una aproximación de las pérdidas de los consumidores está determinada por $0.5(P_D - P^*)(Q^* - \bar{Q}) = 0.5(11.1 - 9.87)(12.8 - 11) = 1.11$, y la de los productores por $0.5(9.87 - 8.46)(12.8 - 11) = 1.27$. Dado que la elasticidad precio de la demanda es algo mayor (en valor absoluto) que la elasticidad precio de la oferta, los consumidores sufren poco menos de la mitad de la pérdida y los productores poco más de la mitad de ésta. Con una curva de demanda más elástica a los precios, los consumidores sufrirían una proporción incluso menor de la pérdida.

Pregunta: ¿La magnitud de la pérdida total de bienestar derivada de una restricción en la cantidad, cómo depende de las elasticidades de la oferta y la demanda? ¿Qué determina cómo se repartirá la pérdida?

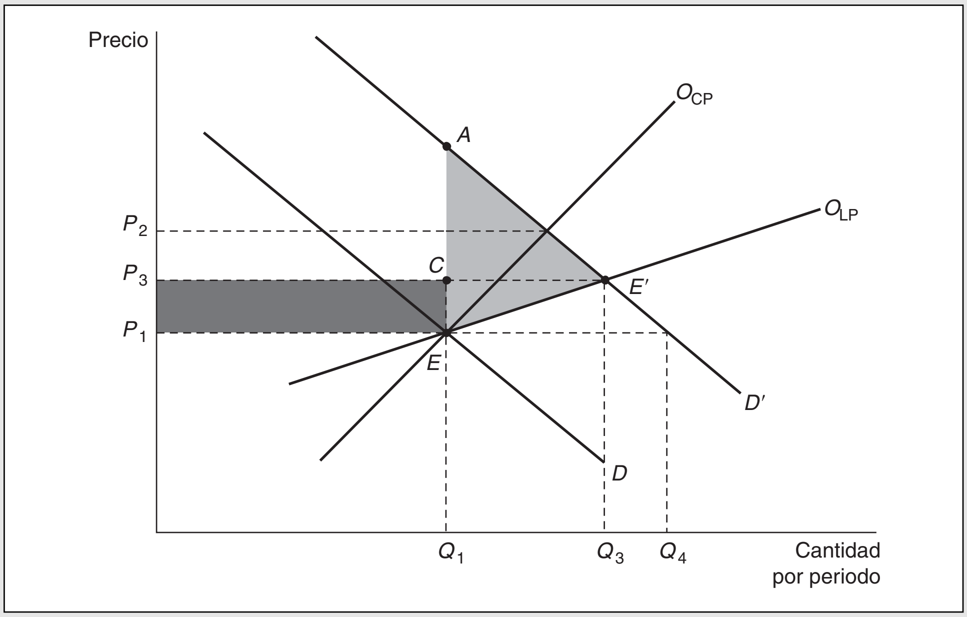
Control de precios y escasez

En ocasiones, los gobiernos podrían tratar de controlar los precios para que permanezcan por debajo de los niveles de equilibrio. Si bien la adopción de estas políticas puede estar fundada en motivos muy nobles, los controles demoran las respuestas de la oferta a largo plazo y producen pérdidas de bienestar para los consumidores y para los productores. La figura 11.2 presenta un sencillo análisis de esta posibilidad. Al principio, el mercado está en equilibrio a largo plazo en P_1, Q_1 (punto E). Un incremento de la demanda de D a D' provocaría que el precio aumentara a P_2 a corto plazo y fomentaría la entrada de nuevas empresas. Suponiendo que este mercado se caracterice por costos crecientes (como representa la curva de oferta a largo plazo, OL), de pendiente positiva), el precio disminuiría un poco como consecuencia de estas entradas y se estabilizaría, finalmente en P_3. Si el gobierno considerara que estas variaciones en el precio no son deseables, entonces, en principio, podría evitarlas imponiendo un precio tope legal de P_1. Esto haría que las empresas siguieran ofreciendo la producción anterior (Q_1) y, como a P_1 los demandantes querrán adquirir Q_4, se presentará una escasez, determinada por $Q_4 - Q_1$.

[2]Podemos obtener una estimación más exacta de la pérdida si integramos $P_D - P_O$ en el intervalo de $Q = 11$ a $Q = 12.8$. Con curvas de oferta y de demanda exponenciales, esta integración suele ser bastante sencilla. En el caso que nos ocupa, la técnica da por resultado una pérdida de bienestar estimada de 2.28, demostrando así que la aproximación triangular no es demasiado mala, incluso para cambios de precios relativamente grandes. Por tanto, en análisis posteriores utilizaremos principalmente estas aproximaciones.

FIGURA 11.2 **Control de precios y escasez**

Un desplazamiento de la demanda de D a D' incrementaría el precio a P_2 a corto plazo. La entrada de empresas a largo plazo daría lugar a un equilibrio final de P_3, Q_3. Controlar el precio en P_1 impediría que se produjeran estas acciones y provocaría una escasez de $Q_4 - Q_1$. En comparación con la situación sin control de precios, el control de precios provoca una transferencia de los productores a los consumidores (área P_3CEP_1) y una pérdida de eficiencia económica debida a las transacciones no realizadas, la cual está determinada por las dos áreas $AE'C$ y $CE'E$.



Evaluación del bienestar

Podemos evaluar las consecuencias que esta política de control de precios tiene para el bienestar si comparamos el excedente del productor y del consumidor bajo esta política con los excedentes que habrían prevalecido en ausencia de estos controles. En primer término, los consumidores de Q_1 obtienen el excedente del consumidor determinado por el área P_3CEP_1 porque pueden comprar este bien a un precio más bajo que él que existiría en un mercado sin control de precios. Esta ganancia refleja una transferencia pura de los productores, que tienen un excedente del productor más bajo que el que existiría sin controles. La cantidad que los consumidores han ganado debido al precio más bajo es la que han perdido los productores. Si bien esta transferencia no representa una pérdida del bienestar global, sí afecta claramente al bienestar relativo de los agentes del mercado.

En segundo término, el área $AE'C$ representa el valor del excedente adicional del consumidor que se habría obtenido sin controles. Por otra parte, el área $CE'E$ refleja el excedente adicional del productor existente en la situación sin controles. Estas dos áreas juntas (es decir, el área $AE'E$) representan el valor total de transacciones beneficiosas para las dos partes que no se producen debido a la política gubernamental de control de precios. Por tanto, se trata de una medida de los costos puros para el bienestar que produce esta política.

Comportamiento en situaciones de desequilibrio

El análisis del bienestar que presenta la figura 11.2 también sugiere algunos de los tipos de comportamiento que cabría esperar como consecuencia de una política de control de precios. Suponiendo que los resultados observados en el mercado son generados por

$$Q(P_1) = \text{mín}\ [Q_D(P_1),\ Q_O(P_1)], \qquad (11.7)$$

los productores estarán satisfechos con este resultado, pero los consumidores no lo estarán porque se verán obligados a aceptar una situación de exceso de demanda. Tienen un incentivo para indicar su descontento a los productores incrementando el precio de sus ofertas. Estas ofertas no sólo podrían tentar a los productores existentes a realizar transacciones ilegales a precios superiores a los permitidos, sino que también podrían animar a que los nuevos entrantes realicen estas transacciones. Es el tipo de actividad que provoca la existencia de mercados negros en la mayor parte de las situaciones en las que hay un control de precios. Hacer un modelo de las transacciones resultantes será difícil por dos razones. En primer lugar, estas transacciones pueden implicar un comportamiento que no acepta el precio de mercado porque es necesario negociar individualmente el precio de cada transacción, en lugar de que lo fije "el mercado". En segundo, las transacciones fuera del punto de equilibrio muchas veces implican una información imperfecta, porque un par de agentes cualquiera del mercado normalmente no sabrá lo que están haciendo los demás agentes, aun cuando estas acciones puedan afectar su propio bienestar porque alteran las opciones disponibles. Se han logrado avances para hacer modelos de este tipo de comportamiento en situaciones de desequilibrio recurriendo a las técnicas de la teoría de juegos (véase el capítulos 15). Sin embargo, aparte de la evidente previsión de que las transacciones se producirán a precios por encima del precio tope, no se han obtenido resultados generalizables.[3] El tipo de transacciones que se realicen en el mercado negro dependerá de los detalles específicos de las instituciones en esa situación.

Análisis de la incidencia de los impuestos

El modelo de equilibrio parcial de los mercados en competencia también ha sido muy utilizado para analizar el efecto de los impuestos. Si bien estas aplicaciones (como señalaremos en su oportunidad) son limitadas por necesidad, dado que no son capaces de analizar los efectos de los impuestos que se extienden a muchos mercados, sí nos ofrecen información importante sobre una serie de cuestiones.

Un modelo matemático

Podemos estudiar el efecto de un impuesto por unidad más fácilmente si empleamos el modelo matemático de la oferta y la demanda que presentamos en el capítulo 10. Sin embargo, ahora tendremos que señalar una diferencia entre el precio pagado por los demandantes (P_D) y el precio que perciben los oferentes (P_O), porque el impuesto por unidad (t) introduce una "brecha" entre estas dos magnitudes de la forma:

$$P_D - P_O = t \tag{11.8}$$

o, en términos de las pequeñas variaciones de precios que queremos analizar,

$$dP_D - dP_O = dt. \tag{11.9}$$

Para mantener el equilibrio en el mercado es necesario que

$$dQ_D = dQ_O,$$

o

$$D_P dP_D = O_P dP_O, \tag{11.10}$$

donde D_P, O_P son, respectivamente, las derivadas del precio de las funciones de la demanda y la oferta. Podemos emplear las ecuaciones 11.9 y 11.10 para resolver el efecto que un impuesto tiene en P_D:

$$D_P dP_D = O_P dP_O = O_P(dP_D - dt). \tag{11.11}$$

Por tanto,

$$\frac{dP_D}{dt} = \frac{O_P}{O_P - D_P} = \frac{e_O}{e_O - e_D}, \tag{11.12}$$

[3]Véase J. Bénassy, "Nonclearing Markets: Microeconomic Concepts and Macroeconomic Applications", *Journal of Economic Literature*, junio de 1993, pp. 732-761.

donde e_O y e_D representan, respectivamente, las elasticidades precio de la oferta y la demanda, y derivamos la ecuación multiplicando el numerador y el denominador por P/Q. Una serie similar de operaciones para la variación del precio de oferta da por resultado

$$\frac{dP_O}{dt} = \frac{e_D}{e_O - e_D}. \tag{11.13}$$

Dado que $e_D \leq 0$, $e_O \geq 0$, estos cálculos darán resultados evidentes

$$\begin{aligned} \frac{dP_D}{dt} &\geq 0 \\ \frac{dP_O}{dt} &\leq 0. \end{aligned} \tag{11.14}$$

Si $e_D = 0$ (la demanda es perfectamente inelástica), $dP_D/dt = 1$ y el impuesto por unidad es asumido totalmente por los demandantes. De otra parte, si $e_D = -\infty$, $dP_O/dt = -1$ y el impuesto es asumido totalmente por los productores. En términos generales, si dividimos la ecuación 11.13 entre la ecuación 11.12 se obtendrá

$$-\frac{dP_O/dt}{dP_D/dt} = -\frac{e_D}{e_O}, \tag{11.15}$$

lo cual demuestra que el agente que tiene la respuesta menos elástica (en valor absoluto) experimentará la mayor parte de la variación del precio provocada por el impuesto.

Un análisis del bienestar

La figura 11.3 permite hacer un análisis simplificado del asunto de la incidencia del impuesto en el bienestar. El gravamen de un impuesto por unidad, t, crea una brecha vertical entre la curva de oferta y la de demanda, y la cantidad intercambiada disminuye a Q^{**}. Los demandantes pierden la cantidad del excedente del bienestar determinada por el área P_DFEP^*, de la cual P_DFHP^* es transferida al gobierno como parte de los ingresos fiscales totales. El resto de los ingresos fiscales totales (P^*HGP_O) es pagado por los productores, quienes pierden la cantidad del total del excedente del productor determinada por el área P^*EGP_O. Nótese que la reducción del excedente del productor y del consumidor combinada es superior a los ingresos fiscales totales recaudados por un monto igual al área FEG. Esta área representa una pérdida "de eficiencia económica" que se presenta porque el impuesto desanima que se realicen algunas transacciones beneficiosas para las dos partes. En general, la magnitud de cada una de las distintas áreas que representa la figura 11.3 se verá afectada por las elasticidades precio en cuestión. Para determinar la incidencia final de la proporción del impuesto asumida por los productores tendríamos que hacer un análisis explícito de los mercados de factores; es decir, el peso del impuesto se vería reflejado en ingresos más bajos para los factores que se caractericen por una oferta relativamente inelástica. En términos más generales, un análisis completo del asunto de la incidencia requeriría de un modelo de equilibrio general que pueda tratar a muchos mercados al mismo tiempo. En el capítulo siguiente se analizan estos modelos.

Pérdida de eficiencia económica y elasticidad

Todos los impuestos que no sean una sola suma implican pérdidas de eficiencia económica porque alteran el comportamiento de los agentes económicos. La magnitud de estas pérdidas dependerá, de forma bastante compleja, de las elasticidades de la oferta y la demanda en el mercado. Una aproximación lineal a la pérdida de eficiencia económica que acompaña a un pequeño impuesto, dt, está determinada por

$$DW = -0.5(dt)\,(dQ). \tag{11.16}$$

Sin embargo, por la definición de elasticidad sabemos que

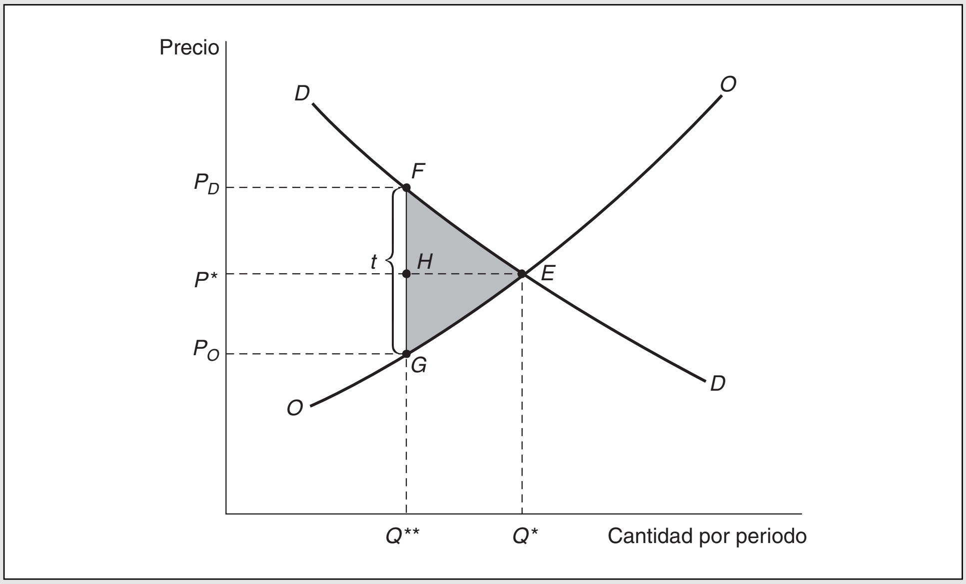
$$dQ = e_D dP_D \cdot Q_0/P_0, \tag{11.17}$$

donde Q_0 y P_0 son los valores antes de impuestos, respectivamente, de la cantidad y el precio. Si combinamos las ecuaciones 11.17 y 11.12 se obtendrá

$$dQ = e_D[e_O/(e_O - e_D)]\; dt\, Q_0/P_0, \tag{11.18}$$

FIGURA 11.3 **Análisis de la incidencia de un impuesto**

La imposición de un impuesto específico por un monto de t por unidad crea una "brecha" entre el precio que pagan los consumidores (P_D) y lo que perciben los productores (P_O). La medida que los consumidores o los productores paguen del impuesto dependerá de las elasticidades precio de la demanda y la oferta.



y la sustitución en la ecuación 15.16 nos dará la expresión final de la pérdida:

$$DW = -0.5\left(\frac{dt}{P_0}\right)^2 [e_D e_O/(e_O - e_D)]P_0 Q_0. \qquad (11.19)$$

Evidentemente, las pérdidas de eficiencia económica son nulas en los casos en que e_D o e_O son iguales a cero porque, en tales casos, el impuesto no cambia la cantidad intercambiada del bien. En términos más generales, las pérdidas de eficiencia económica son menores en aquellas situaciones en las que e_D o e_O son pequeñas. En principio, podemos emplear la ecuación 11.19 para evaluar las pérdidas de eficiencia económica que acompañan a un sistema tributario complejo cualquiera. Esta información puede ofrecer algunas ideas sobre cómo diseñar un sistema fiscal para minimizar el "peso excesivo" global que implica recaudar la cantidad necesaria de ingresos fiscales.

Costos de transacción

Si bien hemos desarrollado este análisis en términos de la teoría de la incidencia de los impuestos, los modelos que incorporan una brecha entre los precios de los consumidores y de los productores tienen toda una serie de aplicaciones más en economía. La más importante de ellas seguramente es la que se refiere a los costos asociados a realizar transacciones en el mercado. En algunos casos, estos costos pueden ser explícitos. Por ejemplo, la mayoría de las transacciones inmobiliarias son realizadas por medio de un intermediario que cobra una comisión por el servicio de juntar al comprador y al vendedor. Este tipo de comisiones explícitas también se presentan en la compraventa de acciones y bonos, de barcos y aviones, y prácticamente de todo lo que se vende por medio de una subasta. En todos estos casos, tanto compradores como vendedores están dispuestos a pagar una comisión explícita al agente o intermediario que facilita la transacción. En otros casos, los costos de transacción pueden ser mayormente implícitos. Por ejemplo, los individuos que quieren comprar un auto usado invertirán bastante tiempo y esfuerzo en leer los

EJEMPLO 11.2

La pérdida de eficiencia económica derivada de los impuestos

En el ejemplo 11.1 se analizó la pérdida del excedente del consumidor y del productor que se produciría si las ventas de automóviles disminuyeran de su nivel de equilibrio de 12.8 (millones) a 11 (millones). Un impuesto sobre los automóviles de 2640 dólares (es decir, de 2.64 miles de dólares) generaría esta disminución de las ventas porque introduciría exactamente la brecha entre el precio de demanda y el de oferta que calculamos antes. Dado que hemos supuesto que $e_D = -1.2$ y $e_O = 1.0$ en el ejemplo 11.1, y que el gasto inicial para los automóviles es de 126 (miles de millones de dólares), la ecuación 11.19 prevé que la pérdida de eficiencia económica generada por el impuesto sobre los automóviles sería

$$DW = 0.5\left(\frac{2.64}{9.87}\right)^2 (1.2/2.2)(126) = 2.46. \qquad (11.20)$$

Esta pérdida de 2.46 miles de millones de dólares es aproximadamente la misma que la pérdida provocada por el control de las emisiones contaminantes que calculamos en el ejemplo 11.1. Podemos compararla con la recaudación total de impuestos, que en este caso asciende a 29 mil millones de dólares ($2640 por automóvil multiplicado por 11 millones de automóviles en el equilibrio después de impuestos). Aquí, la pérdida de eficiencia económica es aproximadamente del 8 por ciento de los ingresos fiscales totales recaudados.

Carga marginal. Un aumento progresivo del impuesto sobre los automóviles sería relativamente más costoso en términos de pérdidas de eficiencia económica. Supongamos que el gobierno decidiera redondear el impuesto sobre los automóviles hacia arriba, a la cifra de 3000 dólares por automóvil. En este caso, las ventas de automóviles disminuirían aproximadamente a 10.7 (millones). La recaudación de impuestos ascendería a 32.1 miles de millones de dólares, con un incremento de 3.1 miles de millones de dólares por arriba de la cantidad que calculamos antes. Podemos usar la ecuación 11.20 para demostrar que las pérdidas de eficiencia económica ahora suman 3.17 miles de millones de dólares, lo que es un incremento de 0.71 miles de millones de dólares por encima de las pérdidas experimentadas con un impuesto menor. Luego entonces, en el margen, las pérdidas de eficiencia económica adicionales representan aproximadamente el 23 por ciento (0.72/3.1) de los ingresos adicionales recaudados. Por tanto, el cálculo del exceso de la carga promedio y la marginal puede diferir significativamente.

Pregunta: ¿Puede explicar intuitivamente por qué la carga marginal de un impuesto es superior a su carga promedio? ¿La carga marginal del impuesto en qué condiciones será superior a los ingresos fiscales adicionales recaudados?

anuncios clasificados y en revisar los vehículos, y estas actividades representan el costo implícito de realizar la transacción.

En la medida que los costos de transacción sean por unidad (como es el caso de los bienes inmuebles, los títulos valores y las subastas), nuestro ejemplo anterior de los impuestos se aplica exactamente de la misma manera. El hecho de que t represente un impuesto por unidad o una comisión por unidad no hace diferencia alguna desde el punto de vista de los consumidores o de los productores, porque el análisis del efecto de la comisión en el mercado será el mismo. Es decir, la comisión será compartida entre consumidores y productores, dependiendo de las elasticidades específicas involucradas. El volumen de intercambio será menor que en ausencia de estas comisiones.[4] Sin embargo, el análisis sería un poco diferente si los costos de transacción fueran por un monto fijo por transacción. En tal caso, los individuos intentarían reducir la cantidad de

[4]Este análisis no toma en cuenta las posibles ventajas obtenidas de los intermediarios. En la medida que estos servicios sean valiosos para las partes de la transacción, las curvas de oferta y de demanda se desplazarán hacia fuera para reflejar este valor. Por tanto, el volumen de intercambios podría aumentar, de hecho, con la disponibilidad de servicios que facilitan las transacciones, aun cuando los costos de estos servicios seguirán creando una brecha entre los precios de los compradores y los vendedores.

transacciones que realizan, pero la existencia de este cargo no afectaría el equilibrio mismo de la oferta y la demanda. Por ejemplo, el costo por llegar en auto al supermercado es, fundamentalmente, un costo de transacción de monto fijo al hacer la compra de víveres. La existencia de este cargo no afectará sustancialmente el precio de los víveres o a la cantidad de alimentos que se consuman (a no ser que anime a las personas a cultivar sus propios alimentos), pero el cargo hará que los individuos vayan de compras con menos frecuencia, y que adquieran cantidades más grandes en cada viaje o que almacenen en sus casas cantidades más grandes, que si no existiera este costo.

Efectos en los atributos de las transacciones

En términos más generales, los impuestos o los costos de transacción pueden afectar a algunos atributos de las transacciones más que a otros. En nuestro modelo formal, supusimos que estos costos dependían únicamente de la cantidad de los bienes que se vendieran. Por tanto, el deseo de los productores y los consumidores de minimizar sus costos les llevaba a disminuir la cantidad intercambiada. Cuando las transacciones incluyen varias dimensiones (como la calidad, el riesgo, o los plazos de tiempo), los impuestos o los costos de transacción pueden afectar algunas de estas dimensiones o a todas ellas, dependiendo de la base exacta que sirva para evaluar los costos. Por ejemplo, un impuesto sobre la cantidad podría llevar a las empresas a mejorar la calidad de sus productos, o los costos de transacción basados en la información podrían animar a las empresas a producir bienes estandarizados con menos riesgo. Por otra parte, un costo por transacción (los costos de desplazamiento para llegar a la tienda) podría llevar a los individuos a realizar menor cantidad de transacciones, pero de mayor volumen (y a tener almacenadas cantidades más grandes). Las posibilidades para hacer distintas sustituciones dependerán, evidentemente, de las circunstancias particulares de la transacción. Analizaremos varios ejemplos de cambios de los atributos de las transacciones inducidas por los costos en capítulos posteriores.[5]

Restricciones al comercio

Las restricciones impuestas al flujo de bienes en el comercio internacional tienen efectos similares a los que acabamos de analizar para el caso de los impuestos. Los obstáculos al libre comercio pueden reducir la cantidad de transacciones beneficiosas para las partes y provocar una serie de transferencias entre las distintas partes involucradas. De nueva cuenta, es frecuente que se use el modelo de la oferta y la demanda en competencia para analizar estos efectos.

Ganancias del comercio internacional

La figura 11.4 ilustra las curvas de oferta y de demanda nacionales de un bien concreto, por ejemplo, los zapatos. En ausencia de comercio internacional, el precio interno de equilibrio de los zapatos sería P^* y la cantidad sería Q^*. Si bien este equilibrio agotaría todas las transacciones, beneficiosas para las partes, entre productores nacionales y consumidores nacionales de zapatos, la apertura al comercio internacional presenta una serie de opciones adicionales. Si los precios mundiales de los zapatos, P_M, estuvieran por debajo del precio existente en el país P^*, la apertura del comercio provocaría que los precios disminuyeran a este nivel mundial.[6] Esta disminución del precio provocará que la cantidad demandada aumente a Q_1, mientras que la cantidad ofrecida por los productores nacionales disminuyera a Q_2. Los zapatos importados ascenderán a $Q_1 - Q_2$. En pocas palabras, los zapatos que no ofrezcan los productores internos al precio mundial serán ofrecidos por fuentes externas.

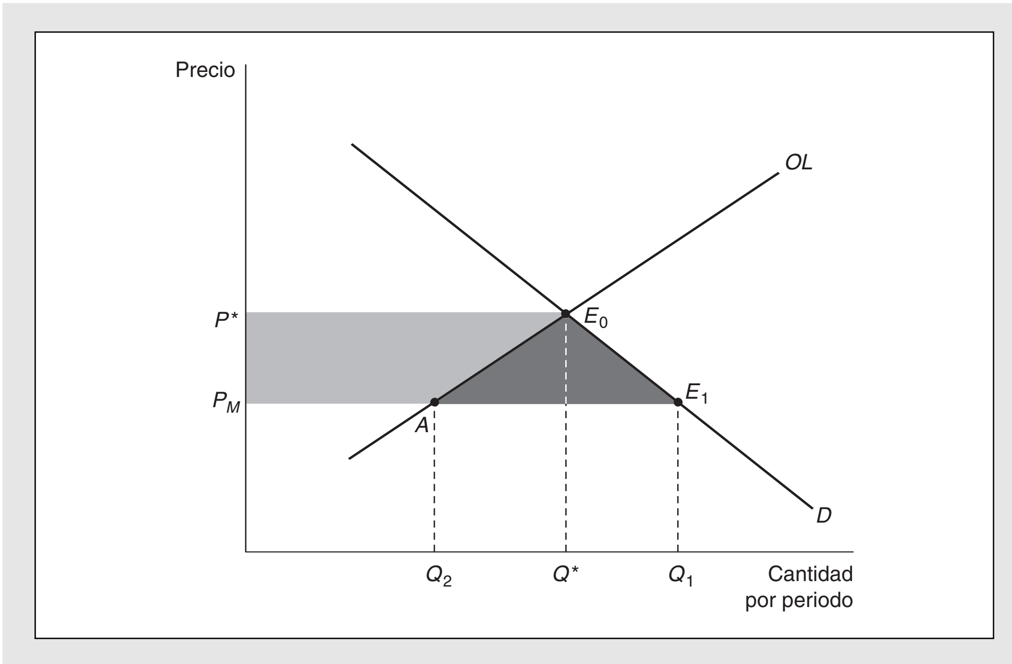
El desplazamiento del equilibrio del mercado de E_0 a E_1 provoca un gran aumento del excedente del consumidor, determinado por el área $P^*E_0E_1P_M$. Parte de esta ganancia refleja una transferencia de los productores internos de zapatos (área $P^*E_0A\ P_M$), y otra parte representa una ganancia inequívoca de bienestar (área E_0E_1A). En este caso, la fuente de ganancias del consumidor es evidente; es decir, los compradores consiguen zapatos a un precio inferior al que imperaba antes en el mercado nacional. Tal como en nuestro análisis de los impuestos, las pérdidas del excedente del productor son originadas por los factores productivos que dan a la curva de

[5]Encontrará un análisis general de este tema en, Y. Barzel, "Alternative Approach to the Analysis of Taxation", *Journal of Political Economy*, diciembre de 1976, pp. 1177-1197.

[6]A lo largo de nuestro análisis supondremos que este país es tomador del precio del mercado mundial y que puede adquirir todas las importaciones que desee sin afectar el precio, P_M. Para un análisis de una curva de oferta de importaciones con pendiente positiva, véase el problema 11.10.

FIGURA 11.4 **La apertura al comercio internacional aumenta el bienestar total**

La apertura al comercio internacional disminuye el precio de P^* a P_M. En P_M los productores nacionales ofertan Q_2 y los demandantes adquieren Q_1. Las importaciones ascienden a $Q_1 - Q_2$. El precio bajo provoca una transferencia de los productores nacionales a los consumidores (área sombreada en tono claro) y una ganancia neta del excedente del consumidor (área sombreada en tono oscuro).



oferta a largo plazo su pendiente positiva. Por ejemplo, la industria nacional del calzado experimenta costos crecientes porque la expansión de la producción de la industria incrementa los salarios de los zapateros, la disminución de la producción de Q^* a Q_2 debida al comercio revertirá este proceso, provocando que los salarios de los trabajadores disminuyan.

Protección arancelaria y política comercial

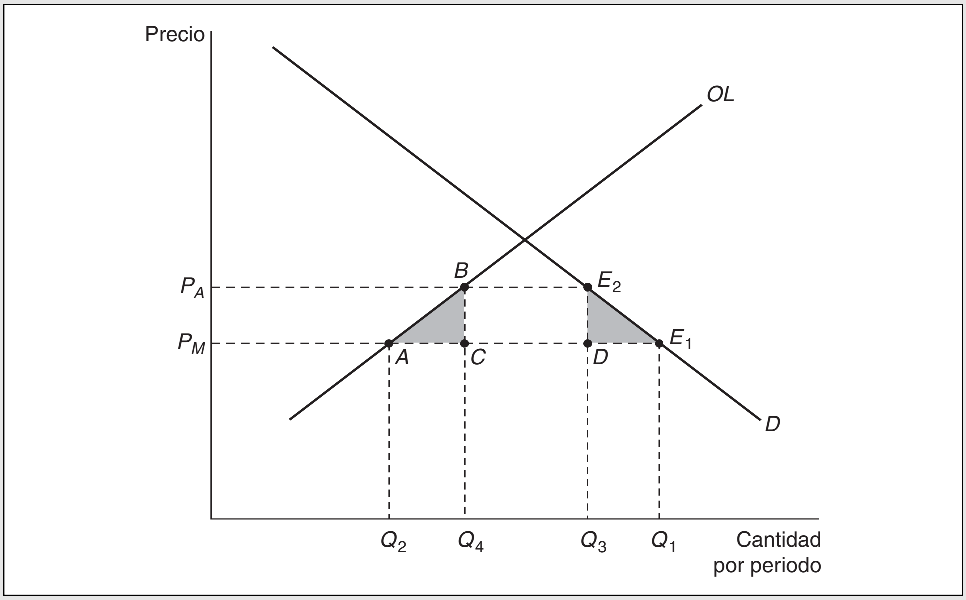
Es poco probable que los zapateros acepten las pérdidas salariales provocadas por las importaciones sin protestar. Por el contrario, presionarán al gobierno para que les proteja de la avalancha de zapatos importados. Dado que son relativamente pocos los individuos que sufren las pérdidas del excedente del productor, mientras que las ganancias de los consumidores derivadas del comercio se reparten entre muchos compradores de zapatos, los zapateros pueden tener muchos más incentivos para organizarse y oponerse a las importaciones que los que tendrían los consumidores para organizarse y defender el libre comercio. El resultado podría ser la adopción de medidas proteccionistas.

Históricamente, el arancel, o sea un impuesto sobre el bien importado, ha sido el tipo más importante de protección que se ha empleado. La figura 11.5 muestra los efectos de este impuesto. Ahora, las comparaciones parten del equilibrio con libre comercio, E_1. La imposición de un arancel de cantidad t por unidad sobre los zapatos que compran los nacionales, aumenta el precio efectivo a $P_M + t = P_A$. Este aumento del precio hace que la cantidad demandada disminuya de Q_1 a Q_3, mientras que la producción nacional aumenta de Q_2 a Q_4. La cantidad total importada de zapatos disminuye de $Q_1 - Q_2$ a $Q_3 - Q_4$. Dado que cada par de zapatos importados ahora está sujeto a un arancel, los ingresos arancelarios totales están determinados por el área BE_2DC, medida por $t(Q_3 - Q_4)$.

La imposición de un arancel sobre los zapatos importados genera una serie de efectos en el bienestar. El excedente total del consumidor disminuye en la cantidad que representa el área $P_AE_2E_1P_M$. Parte de ésta, como hemos visto, es transferida a ingresos arancelarios y parte a un

FIGURA 11.5 **Efectos de un arancel**

La imposición de un arancel de cuantía t aumenta el precio a $P_A = P_M + t$. Esto da lugar a una recaudación de ingresos arancelarios (área BE_2DC), a una transferencia de los consumidores a los productores (área P_ABAP_M), y a los dos triángulos que miden la pérdida de eficiencia económica (sombreados). Una cuota de importaciones tiene efectos análogos, pero en ese caso no se recauda ingreso alguno.



mayor excedente de los productores nacionales (área P_ABAP_M). Los dos triángulos, BCA y E_2E_1D, representan pérdidas del excedente del consumidor que no se transfieren a nadie; se trata de pérdidas de eficiencia económica provocadas por el arancel y son análogas a la carga impuesta por un impuesto cualquiera. Podemos medir todas estas áreas si disponemos de buenas estimaciones empíricas de las elasticidades de oferta y la demanda nacionales de bienes importados, como veremos a continuación.

Estimaciones cuantitativas de la pérdida de eficiencia económica

Podemos estimar fácilmente las dimensiones de los triángulos de pérdidas de bienestar de la figura 11.5. Dado que $P_A = (1 + t)P_M$, el cambio porcentual de la cantidad demandada provocado por este aumento del precio está determinado por

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_1} = \frac{P_A - P_M}{P_M} \cdot e_D = te_D \tag{11.21}$$

y el área del triángulo E_2E_1D está determinada por

$$PEE_1 = 0.5(P_A - P_M)(Q_1 - Q_3) = -0.5t^2e_DP_MQ_1. \tag{11.22}$$

De otra parte, la pérdida del excedente del consumidor representada por el área BCA está determinada por

$$PEE_2 = 0.5(P_A - P_M)(Q_4 - Q_2) = 0.5t^2e_OP_MQ_2. \tag{11.23}$$

Nótese que los valores de PEE_1 y PEE_2 son funciones convexas de la tasa arancelaria *(t)* y cada uno depende del valor inicial de los ingresos totales. Cuando las importaciones representan inicialmente una proporción muy grande del mercado nacional y e_D y e_O son de magnitud similar (en valor absoluto), ello sugiere que la pérdida de eficiencia económica PEE_1 por lo general, será la mayor de las dos pérdidas de eficiencia económica. Estas pérdidas en ocasiones pueden ser muy grandes respecto a las transferencias totales a los productores (área P_ABAP_M), lo cual lleva a estimados bastante grandes de los "costos" de algunos aranceles respecto al valor de los beneficios que generan en la producción.

Otros tipos de protección al comercio

Si se adapta el modelo de los aranceles desarrollado en la figura 11.5, podremos ilustrar muchos otros tipos de restricciones al comercio. Una cuota que limite las importaciones a $Q_3 - Q_4$ tendría efectos muy similares a los que muestra la figura; es decir, el precio de mercado aumentaría a P_A; se producirá una transferencia sustancial de los consumidores a los productores nacionales (área P_ABAP_M); y se registrarían las pérdidas de eficiencia económica que representan los triángulos BCA y E_2E_1D. Sin embargo, con la cuota, el gobierno no recauda ingreso alguno, por tanto la pérdida del excedente del consumidor que representa el área BE_2DC debe ir a parar a otra parte. Podría ser captado por los propietarios de las licencias de importación o por los productores extranjeros, dependiendo de cómo se asignen los derechos de las cuotas. Las restricciones no cuantitativas, como las inspecciones o los requisitos de calidad, también imponen costos y demoras temporales que cabe considerar como un arancel "implícito" sobre las importaciones. Podemos adaptar fácilmente la figura 11.5 para ilustrar los efectos que estos obstáculos tienen en el comercio.

EJEMPLO 11.3

Comercio y aranceles

Podemos ilustrar estos aspectos de la política comercial con nuestro modelo simplificado del mercado de los automóviles. Como se ha demostrado anteriormente, con una función de demanda determinada por

$$Q_D = 200P^{-1.2} \tag{11.24}$$

y la de oferta por

$$Q_A = 1.3P, \tag{11.25}$$

el mercado nacional tiene un equilibrio a largo plazo de

$$P^* = 9.87 \tag{11.26}$$
$$Q^* = 12.8.$$

Si los automóviles estuvieran disponibles al precio mundial de 9 (mil dólares), la demanda se expandiría a $Q_D = 14.3$, mientras que la oferta se contraería a $Q_A = 11.7$. Las importaciones ascenderían a 2.6 (millones) de autos. Como muestra en la figura 11.4, los consumidores ganarían sustancialmente gracias a la disponibilidad de importaciones (el excedente del consumidor se expandiría aproximadamente 11 800 millones de dólares), pero una parte sustancial de esta ganancia (10 700 millones) representaría una transferencia de los productores nacionales a los consumidores.

Efectos de un arancel. Si la presión de los productores nacionales lleva al gobierno a imponer, por ejemplo, un arancel de 500 dólares, el precio mundial de los automóviles aumentaría a 9.5 (miles de dólares), la cantidad demandada se contraería (a 13.4) y la oferta nacional se expandiría (a 12.4). Las importaciones se contraerían a 1.0 (un millón) de autos. Podemos calcular directamente los efectos que estos cambios tienen en el bienestar o podemos calcular una aproximación con las expresiones de las ecuaciones 11.22 y 11.23. Un cálculo directo de PEE_1 daría[7]

$$PEE_1 = 0.5\ (0.5)\ (14.3 - 13.4) = 0.225, \tag{11.27}$$

y, para PEE_2, se obtendrá

$$PEE_2 = 0.5\ (0.5)\ (12.4 - 11.7) = 0.175. \tag{11.28}$$

Por tanto, tenemos que la pérdida de eficiencia económica total provocada por el arancel 0.4 (mil millones) es aproximadamente igual a los ingresos arancelarios totales 0.5 (mil millones).

(*continúa*)

[7]Determinado que, aquí, el arancel es aproximadamente $t = 0.055$, la ecuación 11.22 produce un valor aproximado de la PEE_1 de 0.234, mientras que la ecuación 11.23 demuestra que $PEE_2 = 0.159$. La pérdida de eficiencia económica total estimada es aproximadamente de 0.4 (mil millones).

EJEMPLO 11.3 *CONTINUACIÓN*

Efectos de una cuota. Una cuota a la importación de automóviles por un millón de vehículos tendrá efectos idénticos a los de un arancel de 500 dólares. El precio de equilibrio aumentaría 500 dólares y se produciría una importante transferencia de los consumidores nacionales a los productores nacionales. La pérdida de eficiencia económica de 400 millones de dólares también sería la misma que antes. Sin embargo, ahora no habrá ingresos arancelarios. La pérdida 500 millones de dólares del excedente del consumidor será transferida a quienquiera que se apropie de los derechos de importación de vehículos. Dado que el derecho de importar un automóvil vale 500 dólares, resulta probable que haya gran interés por adquirir estos derechos.

Pregunta: En este problema, ¿cuál es la cantidad total que se transfiere de los consumidores a los productores como consecuencia de un arancel o una cuota? ¿Quién recibirá esta transferencia al final de cuentas?

RESUMEN

En este capítulo hemos demostrado cómo se puede emplear el modelo de la competencia para analizar una amplia gama de actividades y políticas económicas. Algunas lecciones generales de estas aplicaciones incluyen:

- Los conceptos del excedente del productor y del consumidor ofrecen una forma muy útil para analizar los efectos que los cambios económicos tienen en el bienestar de los agentes del mercado. Los cambios del excedente del consumidor representan cambios en la utilidad total que se derivan por consumir determinado bien. Los cambios en el excedente del productor a largo plazo representan cambios de los rendimientos que reciben los factores productivos.
- Los controles de precios implican tanto transferencias entre productores y consumidores como pérdidas de transacciones que podrían beneficiar tanto a consumidores como a productores.
- El análisis de la incidencia de los impuestos es cuestión de determinar cuál agente económico será el que, al final de cuentas, cargue el peso de un impuesto. Por lo general, esta incidencia recaerá principalmente en los agentes que tengan respuestas inelásticas ante las variaciones de precios. Los impuestos también implican una pérdida de eficiencia económica que constituye una carga "excesiva", además de la carga impuesta por los ingresos fiscales reales recaudados.
- En ocasiones, podemos representar los costos de transacción en un modelo como si fueran impuestos. Tanto los impuestos como los costos de transacción pueden afectar los atributos de las transacciones dependiendo de cómo se contraigan los costos.
- Las restricciones al comercio, como los aranceles o las cuotas, provocan transferencias entre consumidores y productores, así como pérdidas de eficiencia económica. Podemos hacer un modelo de los efectos de muchos tipos de restricciones al comercio como si fueran un arancel por unidad.

PROBLEMAS

11.1

Supongamos que la demanda de brócoli está determinada por

$$Q = 1000 - 5P,$$

donde Q es la cantidad anual medida en cientos de fanegas y P es el precio en dólares por 100 fanegas. La curva de oferta a largo plazo está determinada por

$$Q = 4P - 80.$$

a. Demuestre que, en este caso, la cantidad de equilibrio es $Q = 400$. Para este nivel de producción, ¿cuál es el precio de equilibrio? ¿En total, cuánto se gasta en brócoli? ¿Cuál es el excedente del consumidor con este equilibrio? ¿Cuál es el excedente del productor con este equilibrio?

b. ¿Cuánto excedente del productor y del consumidor se perdería si $Q = 300$ en lugar de $Q = 400$?

c. Demuestre cómo la asignación de la pérdida del excedente del productor y del consumidor entre proveedores y demandantes descrita en el inciso anterior depende del precio de venta del brócoli. ¿Cómo compartirían la pérdida si $P = 140$? ¿Qué pasaría si $P = 95$?

d. ¿Cuál sería la pérdida total del excedente del productor y del consumidor si $Q = 450$ en lugar de $Q = 400$? Demuestre que la cuantía de esta pérdida total también es independiente del precio de venta del brócoli.

11.2

La industria de cajas de rapé hechas a mano está compuesta por 100 empresas idénticas y cada una tiene costos totales a corto plazo determinados por

$$CTcp = 0.5q^2 + 10q + 5$$

y por costos marginales a corto plazo determinados por

$$CMgcp = q + 10,$$

donde q es la producción diaria de cajas de rapé.

a. ¿Cuál es la curva de oferta a corto plazo de cada fabricante? ¿Cuál es la curva de oferta a corto plazo del conjunto del mercado?

b. Suponga que la demanda total de cajas de rapé está determinada por

$$Q = 1100 - 50P.$$

¿Cuál será el equilibrio en este mercado? ¿Cuáles serán las utilidades totales a corto plazo de cada empresa?

c. Dibuje el equilibrio del mercado y calcule el excedente del productor a corto plazo en este caso.

d. Demuestre que el excedente del productor que calculó en el inciso anterior es igual a las utilidades totales de la industria más los costos fijos a corto plazo de la industria.

11.3

La industria de reproducción de videos, en competencia perfecta, está compuesta por muchas empresas que pueden copiar cinco cintas por día a un costo promedio de 10 dólares por copia. Cada empresa también debe pagar derechos de autor a los estudios cinematográficos, y la tarifa de regalías por película (r) es una función creciente de la producción total de la industria (Q) determinada por

$$r = 0.002Q.$$

La demanda está determinada por

$$Q = 1050 - 50P.$$

a. Suponiendo que la industria se encuentra en equilibrio a largo plazo, ¿cuál será el precio y la cantidad de equilibrio de cintas copiadas? ¿Cuántas empresas habrá en la industria? ¿A cuánto ascenderán las regalías por película?

b. Supongamos que la demanda de cintas copiadas aumenta a

$$Q = 1600 - 50P.$$

¿Cuál es ahora el precio y la cantidad de equilibrio a largo plazo? ¿Cuántas empresas habrá? ¿A cuánto ascenderán las regalías por película?

c. Dibuje estos equilibrios a largo plazo y calcule el incremento del excedente del productor entre las situaciones descritas en el inciso a y el b.

d. Demuestre que el incremento del excedente del productor es exactamente igual al incremento de las regalías pagadas a medida que incrementa la expansión de Q de su nivel del inciso b al nivel del inciso c.

11.4

Vuelva a analizar el mercado de brócoli descrito en el problema 11.1.

a. Suponga que la demanda de brócoli se desplazara hacia fuera a

$$Q = 1270 - 5P.$$

¿Cuál sería el nuevo precio y la nueva cantidad de equilibrio en este mercado?

b. ¿Cuáles serían los nuevos niveles del excedente del productor y del consumidor en este mercado?

c. Supongamos que el gobierno impidiera que el precio del brócoli aumentara por encima de su nivel de equilibrio del problema 11.1. Describa cómo se reasignaría o se perdería totalmente el excedente del productor y del consumidor medidos en el apartado anterior.

11.5

Volviendo de nuevo al mercado de brócoli descrito en el problema 11.1, supongamos que el gobierno aplicara un impuesto de $45 por 100 fanegas de brócoli.

a. ¿Este impuesto cómo afectaría el equilibrio del mercado?

b. ¿La carga de este impuesto cómo se repartiría entre compradores y vendedores?

c. ¿Cuál es el exceso de la carga de este impuesto?

d. Supongamos ahora que la demanda de brócoli cambiara a

$$Q = 2200 - 15P.$$

Conteste los incisos a y b con esta nueva curva de demanda.

e. Supongamos ahora que el mercado de brócoli se caracteriza por la curva de demanda inicial descrita en el problema 11.1, pero que la curva de oferta es

$$Q = 10P - 800.$$

Conteste los incisos a y b para tal caso.

f. ¿Qué concluye al comparar los tres casos que hemos visto de la incidencia de un impuesto sobre el mercado de brócoli?

11.6

Supongamos que el gobierno gravara un impuesto de $3 sobre las cajas de rapé de la industria descrita en el problema 11.2.

a. ¿Este impuesto cómo alteraría el equilibrio del mercado?

b. ¿Este impuesto cómo se repartiría entre compradores y vendedores?

c. Calcule la pérdida total del excedente del productor debido al gravamen sobre las cajas de rapé. Demuestre que esta pérdida es igual al cambio de las utilidades totales a corto plazo en la industria. ¿Los costos fijos por qué no se incluyen en este cálculo de la variación del excedente del productor a corto plazo?

11.7

Supongamos que el gobierno aplica un impuesto de \$5.50 por unidad en la industria de reproducción de películas descrita en el problema 11.3.

a. Suponiendo que la demanda de películas es la determinada en el inciso a del problema 11.3, ¿este impuesto cómo afectará el equilibrio del mercado?

b. ¿La carga de este impuesto cómo se asignará a consumidores y productores? ¿Cuál será la pérdida del excedente del productor y del consumidor?

c. Demuestre que la pérdida del excedente del productor provocada por este impuesto es asumida totalmente por los estudios cinematográficos. Explique su resultado de manera intuitiva.

11.8

La demanda nacional de radios portátiles está determinada por

$$Q = 5000 - 100P,$$

donde el precio (P) está medido en dólares y la cantidad (Q) en miles de radios al año. La curva de oferta nacional de radios está determinada por

$$Q = 150P.$$

a. ¿Cuál es el equilibrio del mercado nacional de radios portátiles?

b. Supongamos que las radios portátiles se pueden importar a un precio mundial de \$10 por radio. Si no hay obstáculos al comercio, ¿cuál sería el nuevo equilibrio del mercado? ¿Cuántas radios portátiles serían importadas?

c. Si los productores nacionales de radios portátiles consiguieran que se impusiera un arancel de \$5, ¿cómo cambiaría el equilibrio del mercado? ¿Cuánto se recaudaría en ingresos arancelarios? ¿Qué parte del excedente del consumidor sería transferida a los productores nacionales? ¿Cuál sería la pérdida de eficiencia económica del arancel?

d. ¿Cómo cambiarían sus resultados del inciso anterior si el gobierno alcanzara un acuerdo con los oferentes extranjeros para que limitaran "voluntariamente" sus exportaciones de radios portátiles a 1 250 000 radios anuales? Explique en qué difiere este caso del de un arancel.

11.9

En el ejemplo 11.3 se demostró que la pérdida de eficiencia económica de un arancel de \$500 sobre los automóviles importados era aproximadamente igual a la cantidad de ingresos arancelarios recaudados. ¿Cómo aumentaría la carga marginal del impuesto si se incrementara el arancel a \$600 en comparación con los ingresos arancelarios marginales recaudados? Explique sus resultados de forma intuitiva.

11.10

En nuestro análisis de los aranceles hemos supuesto que el país en cuestión tiene una curva de oferta de importaciones perfectamente elástica. Supongamos ahora que la curva de oferta de los bienes importados tiene pendiente positiva.

a. Demuestre gráficamente cómo se determinará el nivel de importaciones.

b. Utilice su gráfico del inciso anterior para mostrar los efectos de un arancel en este mercado.

c. Identifique exactamente las fuentes de diversos cambios en el excedente del productor y del consumidor provocados por el arancel del inciso anterior.

d. Demuestre que, en este caso, las pérdidas de eficiencia económica provocadas por el arancel dependerán de la elasticidad de la demanda y de las elasticidades de la oferta de los bienes nacionales y los importados.

LECTURAS RECOMENDADAS

Arnott, R. "Time for Revision on Rent Control?", *Journal of Economic Perspectives*, invierno de 1995, pp. 99-120.

Presenta una evaluación de las políticas "blandas" reales del control de rentas y las sustenta con un planteamiento racional.

Bosworth, B. y G. Burtless. "Effective Tax Reform in Labor Supply, Investments, and Saving", *Journal of Economic Perspectives*, invierno de 1992, pp. 3-75.

Ilustra cómo podemos hacer modelos del efecto de los impuestos en diversos mercados.

deMelo, J. y D. G. Tarr. "The Welfare Costs of U.S. Quotas in Textiles, Steel, and Autos", *Review of Economics and Statistics*, agosto de 1990, pp. 489-497.

Un buen estudio de la cuestión de las cuotas en el contexto del equilibrio general. Encuentra que las cuotas estudiadas tienen los mismos efectos cuantitativos que un arancel del orden de 20 por ciento.

Salanie, B. *The Economics of Taxation,* Cambridge, MIT Press, Cambridge, MA, 2003.

Presenta un estudio compacto de muchos aspectos de los impuestos. Describe algunos modelos sencillos de su incidencia y desarrolla algunos modelos de equilibrio general de la tributación.

Capítulo 12

EQUILIBRIO GENERAL Y BIENESTAR

Es evidente que los modelos de equilibrio parcial en competencia perfecta que se presentaron en los capítulos 10 y 11 no son adecuados para analizar todos los efectos que se producen cuando los cambios en un mercado tienen repercusiones en otros mercados. Por tanto, tampoco son adecuados para hacer afirmaciones muy generales del bienestar ni de cómo se comportarán las economías de mercado. En su lugar, ahora necesitaremos un modelo económico que permita analizar muchos mercados simultáneamente. En este capítulo se desarrollará una versión muy sencilla de un modelo así y se empleará para explorar una serie de cuestiones relativas al bienestar. Si bien este modelo permitirá avanzar un poco, cabe señalar desde el principio que el análisis del equilibrio general es uno de los temas más complejos de la microeconomía y que sólo estaremos tocándolo de manera superficial. La bibliografía al final de este capítulo sugiere algunas vías que permiten ahondar más en la teoría, y las ampliaciones al final del capítulo muestran cómo podemos aplicar los modelos del equilibrio general al mundo real.

Sistema de precios perfectamente competitivo

El modelo que vamos a desarrollar en este capítulo es, básicamente, una forma más elaborada del modelo de oferta y demanda que presentamos en el capítulo 10. En este caso, supondremos que todos los mercados son del tipo descrito en ese capítulo y nos referiremos a ese conjunto de mercados como un *sistema de precios perfectamente competitivo*. El supuesto es que esta economía sencilla contiene una gran cantidad de bienes homogéneos. Esta lista de bienes no sólo incluye artículos de consumo sino también factores de producción. Cada uno de estos bienes tiene un *precio de equilibrio,* el cual es establecido por la acción de la oferta y la demanda.[1] Con este conjunto de precios, todos los mercados se vacían en el sentido de que los oferentes están dispuestos a ofrecer la cantidad que es demandada y los consumidores demandarán la cantidad que es ofertada. También supondremos que no hay costos de transacción ni de transporte, así como que los individuos y las empresas conocen perfectamente los precios que prevalecen en el mercado.

La ley de un solo precio

Dados los supuestos de que no hay costos de transacción y que hay información perfecta, cada bien obedece a la ley de un solo precio; es decir, un bien homogéneo es intercambiado a un mismo precio, independientemente de qué individuo lo compre o de qué empresa lo venda. Si

[1]Desde el principio debemos dejar en claro un aspecto de esta interacción del mercado. Un mercado en competencia perfecta tan sólo determina los precios relativos (y no los absolutos). En este capítulo nos centramos fundamentalmente en los precios relativos. Por ejemplo, no importa si los precios de las manzanas y las naranjas son, respectivamente, 10 y 20 centavos de dólar o si son 10 y 20 dólares. En ambos casos, lo importante es que, en el mercado, podemos intercambiar dos manzanas por una naranja.

un bien se intercambiara a dos precios distintos, los demandantes se apresurarían a comprar el bien donde fuera más barato y las empresas tratarían de vender su producción ahí donde el bien fuera más caro. En sí, estas acciones tenderían a igualar el precio del bien. Por tanto, en un mercado en competencia perfecta, cada bien debe tener un solo precio. Esto explica por qué podemos hablar, inequívocamente, "*del*" precio de un bien.

Supuestos acerca de la competencia perfecta

El modelo de competencia perfecta supone que las personas y las empresas reaccionan a los precios de formas concretas:

1. Supone que hay una gran cantidad de personas que compran un bien dado. Cada persona toma todos los precios como dados y adapta su comportamiento para poder *maximizar la utilidad,* dados los precios y su restricción presupuestaria. Las personas también pueden ser oferentes de servicios productivos (por ejemplo, el trabajo) y, en estas decisiones, también consideran que los precios están dados.[2]
2. Supone que hay una gran cantidad de empresas que producen cada uno de los bienes y que cada una de ellas tan sólo produce una pequeña parte de la producción total de un bien dado. Además, supone que cuando las empresas toman sus decisiones sobre los factores productivos y la producción piensan en tratar de *maximizar sus beneficios.* Cuando las empresas toman estas decisiones para maximizar sus beneficios, consideran que todos los precios están dados.

Estos supuestos seguramente le resultan conocidos porque se han venido planteando a lo largo del libro. Ahora, nuestro objetivo es mostrar cómo opera todo el sistema económico cuando todos los mercados funcionan de esta manera.

Un modelo gráfico simple del equilibrio general

Iniciamos nuestro análisis con un modelo gráfico muy sencillo del equilibrio general que incluye tan sólo dos bienes, que llamaremos x y y. Este modelo será muy útil porque incorpora varias de las características más complejas del equilibrio general de la economía. Emplearemos mucho este modelo siempre que sea necesario un análisis de varios mercados.

Demanda en el equilibrio general

Al final de cuentas, los patrones de la demanda en una economía son determinados por las preferencias de los individuos. En el caso de nuestro modelo simple, supondremos que todos los individuos tienen preferencias idénticas, que podemos representar con un mapa de curvas de indiferencia,[3] definido para distintas cantidades de los bienes, x y y. Para nuestros fines, la ventaja de este planteamiento es que este mapa de curvas de indiferencia (que es idéntico a los que empleamos del capítulo 3 al 6) muestra cómo los individuos clasifican las combinaciones de consumo de ambos bienes. Esta clasificación es, precisamente, lo que se entiende por "demanda" en el contexto del equilibrio general. Por supuesto que no podremos ilustrar de hecho cuáles combinaciones de bienes serán elegidas mientras no conozcamos la restricción presupuestaria de los demandantes. Dado que los ingresos son generados cuando los individuos ofrecen trabajo, capital y otros recursos para el proceso productivo, tendremos que demorar esta ilustración hasta después de que hayamos analizado las fuerzas de producción y de oferta de nuestro modelo.

Oferta en el equilibrio general

Desarrollar el concepto de la oferta en el equilibrio general de este modelo con dos bienes es un proceso algo más complejo que describir el lado del mercado referente a la demanda, porque hasta ahora no hemos ilustrado la producción y la oferta de dos bienes simultáneamente. Para este fin, nuestro planteamiento consiste en emplear la curva de posibilidades de producción que ya

---

[2]Dado que uno de los precios representa el salario, la restricción correspondiente del presupuesto es, en realidad, una restricción temporal. Encontrará una explicación del tema en el capítulo 16.

[3]Emplear un solo mapa de curvas de indiferencia para representar las preferencias de toda una comunidad de individuos entraña algunos problemas técnicos. En este caso, la tasa marginal de sustitución (es decir, la pendiente de la curva de indiferencia de la comunidad) dependerá de cómo se distribuyen los bienes disponibles entre los individuos; es decir, el incremento del total de y necesario para compensar la reducción de una unidad de x dependerá de quién sea el individuo (o los individuos) al que se le quite x. Aquí no analizaremos esta cuestión en detalle, pero en la literatura sobre el comercio internacional ha sido muy analizada.

conocemos (véase el capítulo 1). Al detallar cómo construimos esta curva, también podremos emplear esta construcción para analizar cómo se relacionan los mercados de productos y de factores productivos.

El diagrama de la caja de Edgeworth

La construcción de la curva de posibilidades de producción de dos bienes (x y y) parte del supuesto de que existen cantidades fijas de los factores capital y trabajo, las cuales deben ser asignadas a la producción de los dos bienes. Un diagrama de la caja de Edgeworth, cuyas dimensiones están determinadas por las cantidades totales disponibles de trabajo y de capital, servirá para ilustrar las posibles asignaciones de estos factores.

En la figura 12.1, la longitud de la caja representa el total de horas de trabajo y la altura el total de horas de capital. La esquina inferior izquierda representa el "origen" para medir el capital y el trabajo dedicados a la producción del bien x. La esquina superior derecha representa el origen de los recursos dedicados a la producción de y. Con estas convenciones, podemos considerar que un punto cualquiera dentro de la caja es una asignación, entre los bienes x y y que emplea plenamente los recursos disponibles. Por ejemplo, el punto A representa una distribución de la cantidad indicada de horas de trabajo y horas de capital que es dedicada a la producción de x. La producción del bien y emplea la cantidad "remanente" que hubiera de trabajo y de capital. Por ejemplo, el punto A de la figura 12.1 también muestra la cantidad exacta de trabajo y de capital empleadas en la producción del bien y. Otro punto cualquiera de la caja tiene una interpretación análoga. Así pues, la caja de Edgeworth muestra todas las formas en las que es posible emplear el trabajo y el capital para producir x y y.

FIGURA 12.1 **Construcción de un diagrama de la caja de Edgeworth para la producción**

Las dimensiones de esta caja están determinadas por la cantidad total de trabajo y de capital disponible. La cantidad de estos recursos dedicada a la producción de x son medidas a partir del origen O_x; y la cantidad dedicada a la producción de y es medida a partir de O_y. Un punto cualquiera de la caja representa una asignación, entre los dos bienes, que emplea plenamente los recursos disponibles.

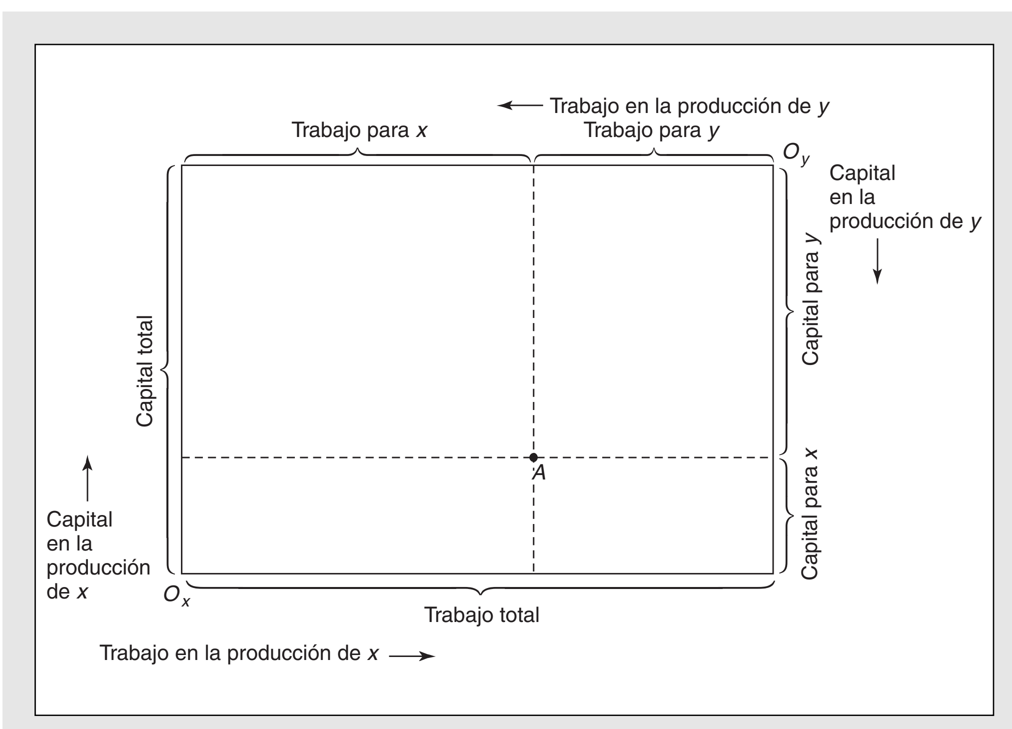
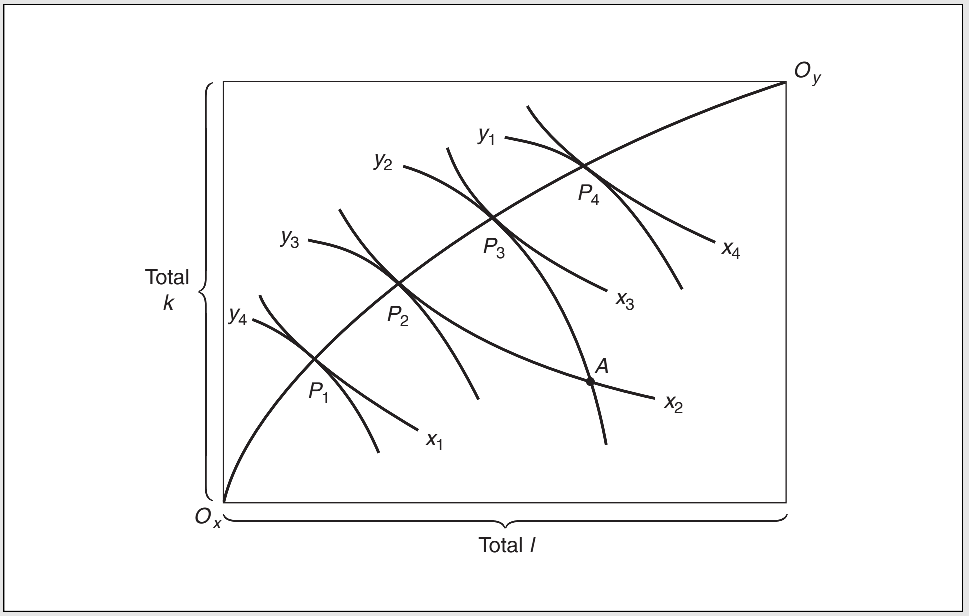


FIGURA 12.2 **El diagrama de la caja de Edgeworth de eficiencia en la producción**

Este gráfico agrega las isocuantas de la producción de x y y a la figura 12.1. Así, muestra las formas técnicamente eficientes para asignar cantidades fijas de k y l entre la producción de los dos bienes. La curva que une O_x y O_y muestra el conjunto de estos puntos eficientes. A lo largo de esta curva, la *TTS* (de l por k) en la producción del bien x es igual a la *TTS* en la producción de y.



Asignaciones eficientes

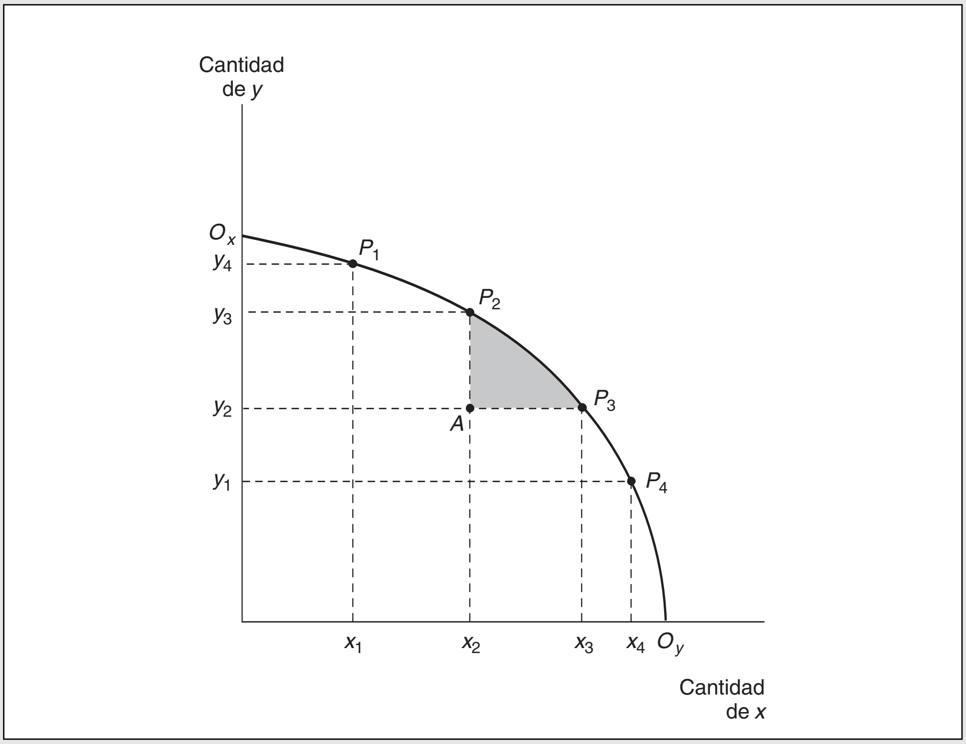
Muchas de las asignaciones que muestra la figura 12.1 son ineficientes técnicamente porque es posible producir más de x y también de y con sólo mover un poco el capital y el trabajo. En nuestro modelo suponemos que los mercados en competencia no exhibirán estas elecciones ineficientes de factores (por motivos que se analizarán con mayor detalle más adelante en este mismo capítulo). Por tanto, en la figura 12.1, queremos encontrar las asignaciones eficientes, porque éstas ilustran los niveles de producción reales de este modelo. Para hacer lo anterior, introducimos los mapas de isocuantas para el bien x (empleando O_x como punto de origen) y para el bien y (empleando como O_y como punto de origen) tal como muestra la figura 12.2. En esta figura queda claro que la asignación A escogida arbitrariamente, es ineficiente. Si reasignamos el capital y el trabajo podríamos producir una cantidad de x superior a x_2 y de y superior a y_2.

En la figura 12.2, las asignaciones eficientes son P_1, P_2, P_3 y P_4, donde las dos isocuantas son tangentes. En otros puntos del diagrama de caja, las dos isocuantas se cortarían y, así, demostraríamos la ineficiencia tal como en el punto A. Sin embargo, en los puntos tangentes, es imposible hacer este tipo de mejora inequívoca. Por ejemplo, al pasar de P_2 a P_3, se estará produciendo mayor cantidad de x pero a costa de producir menos y, por tanto P_3 no será "más eficiente" que P_2, o sea que los dos puntos son eficientes. La tangencia de las isocuantas del bien x y del bien y implica que sus pendientes son iguales. Es decir, la *TTS* de capital por trabajo es igual en la producción de x y de y. Más adelante se demostrará cómo los mercados competitivos de factores llevarán a las empresas a elegir estas eficiencias de los factores.

Por tanto, la curva que une O_x y O_y y que incluye todos estos puntos de tangencia, muestra todas las asignaciones eficientes de trabajo y capital. Los puntos fuera de esta curva son ineficientes porque si hacemos otras combinaciones distintas de los dos factores podremos obtener

FIGURA 12.3 **Frontera de posibilidades de producción**

La frontera de posibilidades de producción muestra distintas combinaciones de x y de y que una empresa puede producir con eficiencia, teniendo recursos fijos. Si variamos los factores para la producción de x o de y al tiempo que se mantienen las condiciones para la eficiencia, podemos derivar la curva de la figura 12.2. La pendiente negativa de la curva de posibilidades de producción se denomina tasa de transformación del producto (*TTP*).



incrementos inequívocos de producción. Sin embargo, todos los puntos en la curva O_xO_y representan asignaciones eficientes porque con sólo reducir la producción de x podremos producir más y y viceversa.

Frontera de posibilidades de producción

El punto de eficiencia de la figura 12.2 muestra la producción máxima de y que es posible producir con una cantidad cualquiera de producción de x asignada previamente. Podemos emplear esta información para construir una *frontera de posibilidades de producción,* la cual muestra los distintos niveles de producción de x y de y que es posible producir con cantidades fijas de los factores trabajo y capital. Los puntos O_xO_y de la figura 12.3 han sido tomados de la figura 12.2 y trasladados a una gráfica que tiene las producciones de x y y en los ejes. Por ejemplo, en O_x, no se dedica recurso alguno a la producción de x, y por tanto, la producción de y es la máxima posible dados los recursos existentes. De otra parte, en O_y, la producción de x es la máxima posible. De esta misma manera, derivamos todos los demás puntos de la frontera de posibilidades de producción (por ejemplo, P_1, P_2, P_3 y P_4) partiendo del punto de eficiencia. Por tanto, hemos generado la siguiente definición:

Frontera de posibilidades de producción. La *frontera de posibilidades de producción* muestra las distintas combinaciones de dos productos que es posible producir con cantidades fijas de factores si éstos son empleados con eficiencia.

Tasa de transformación del producto

La pendiente de la frontera de posibilidades de producción muestra cómo se puede sustituir la producción de x con la de y si se mantienen constantes los recursos totales. Por ejemplo, en el caso de los puntos cerca de O_x en la frontera de posibilidades de producción, la pendiente representa una cifra negativa baja (por decir, $-\frac{1}{4}$, lo cual implica que si reducimos la producción de y en una unidad, aumentaremos la producción de x en 4 unidades. De otra parte, cerca de O_y, la pendiente es una cifra negativa alta (por decir, -5, lo cual implica que se debe reducir la producción de y en 5 unidades para poder producir una unidad más de x. Por tanto, la pendiente de la frontera de posibilidades de producción demuestra con claridad las posibilidades existentes para intercambiar la producción de y por la de x. Esta pendiente negativa se conoce como la *tasa de transformación del producto* (*TTP*):

DEFINICIÓN

Tasa de transformación del producto. La *tasa de transformación del producto (TTP)* en el caso de dos productos es la pendiente con signo negativo de la frontera de posibilidades de producción de esos productos. En términos matemáticos,

$$\begin{aligned} \mathbf{TTP\ (de\ } x \mathbf{\ por\ } y) &= -\textbf{pendiente de la frontera de posibilidades de producción} \\ &= -\frac{dy}{dx} \ \textbf{(a lo largo de } O_xO_y\textbf{)}. \end{aligned} \tag{12.1}$$

La *TTP* muestra la posibilidad técnica de intercambiar x por y al tiempo que seguimos empleando con eficiencia los factores productivos disponibles.

Forma de la frontera de posibilidades de producción

La frontera de posibilidades de producción que ilustra la figura 12.3 muestra una *TTP* creciente. En el caso de niveles de producción cercanos a O_x, es necesario sacrificar relativamente poco de y para obtener una unidad más de x ($-dy/dx$ es pequeña). Por otra parte, cerca de O_y, sólo es posible obtener más de x mediante reducciones sustanciales en la producción de y ($-dy/dx$ es grande). En esta sección se demostrará por qué cabría esperar que esta forma cóncava caracterice la mayor parte de las situaciones de producción.

Un primer paso de este análisis consiste en reconocer que la *TTP* es igual a la proporción del costo marginal de x (CMg_x) ante el costo marginal de y (CMg_y). La intuición nos dice que este resultado es evidente. Por ejemplo, supongamos que sólo se necesita trabajo para producir x y y. Si se necesitan dos horas de trabajo para producir una unidad más de x, cabe decir que el CMg_x es igual a 2. Por otra parte, si sólo se necesita una hora de trabajo para producir una unidad adicional de y, el CMg_y es igual a 1. Sin embargo, en esta situación, es evidente que la *TTP* es 2; es decir, debemos renunciar a dos unidades de y para obtener trabajo bastante para poder aumentar una unidad de x. Por tanto, la *TTP* es, de hecho, igual a la proporción de los costos marginales de los dos bienes.

Supongamos, en términos más formales, que los costos (por ejemplo, en términos de la "ausencia de utilidad" que experimentan los proveedores de factores) de una combinación cualquiera de productos están dados por $CT(x, y)$. La cual será constante a lo largo de la frontera de posibilidades de producción, porque la oferta de factores es fija. En consecuencia, podemos expresar la diferencia total de la función de costos como

$$dCT = \frac{\partial CT}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial CT}{\partial y} \cdot dy = 0 \tag{12.2}$$

para las variaciones de x y y a lo largo de la frontera de posibilidades de producción. Con algunas operaciones en la ecuación 12.2 se obtiene

$$TTP = -\frac{dy}{dx} \ \text{(a lo largo de } O_xO_y\text{)} = \frac{\partial CT/\partial x}{\partial CT/\partial y} = \frac{CMg_x}{CMg_y}, \tag{12.3}$$

que es precisamente lo que se quería demostrar: la *TTP* mide los costos marginales relativos de los dos bienes.

Para demostrar por qué cabe esperar que la *TTP* aumente con movimientos hacia la izquierda a lo largo de la frontera de posibilidades de producción, podemos empezar por demostrar que la proporción de CMg_x ante CMg_y debe aumentar a medida que la producción de x se expande y la de y se contrae. Primero presentamos argumentos relativamente sencillos que sólo se aplican a casos especiales y, a continuación, hablamos de un argumento general más sofisticado.

Rendimientos decrecientes

El razonamiento planteado con más frecuencia para explicar la forma cóncava de la frontera de posibilidades de producción es el supuesto de que los dos bienes son producidos en condiciones de rendimientos decrecientes. Por tanto, el aumento de la producción del bien x incrementará su costo marginal, mientras que la disminución de la producción de y reducirá su costo marginal. Así, la ecuación 12.3 muestra que la *TTP* aumentará en el caso de movimientos a lo largo de la frontera de posibilidades de producción de O_x a O_y. Por supuesto que un problema de esta explicación es que sólo sirve para los casos en que los dos bienes muestran rendimientos decrecientes a escala, y ese supuesto no concuerda con las razones teóricas para preferir el supuesto de rendimientos constantes o incluso crecientes a escala que hemos mencionado en otras partes de este libro.

Factores especializados

Si algunos factores fueran más "adecuados" para producir x que para producir y (y viceversa) se explicaría la forma cóncava de la frontera de posibilidades de producción. En tal caso, el aumento de la producción de x exigiría emplear factores cada vez menos adecuados para la producción de ese bien. Por tanto, los costos marginales de x aumentarían. Por otra parte, los costos marginales de y, disminuirían, ya que un menor nivel de producción de y permitiría emplear únicamente aquellos factores más adecuados para la producción de y. Podemos aplicar este argumento, por ejemplo, en el caso de un agricultor que tiene distintos tipos de tierra para diversos cultivos. Al tratar de aumentar la producción de uno de los cultivos, el agricultor se vería obligado a cultivarlo en terrenos cada vez menos adecuados. Si bien este tipo de supuestos sobre los factores especializados tiene una importancia considerable a la hora de explicar diversos fenómenos del mundo real, no deja de ser contrario a nuestro supuesto general de la homogeneidad de los factores productivos. Por tanto, no puede ser fundamento para explicar la concavidad.

Diferentes intensidades de los factores

Incluso cuando los factores son homogéneos y las funciones de producción tienen rendimientos constantes a escala, la frontera de posibilidades de producción será cóncava si los bienes x y y emplean los factores en distintas proporciones.[4] Por ejemplo, en el diagrama la caja de producción de la figura 12.2, el bien x necesita *capital intensivo* en relación con el bien y. Es decir, en un punto cualquiera a lo largo de la curva de contrato O_xO_y la proporción de k a l en la producción de x es superior a la proporción de k a l para la producción de y; es decir, la curva arqueada O_xO_y siempre estará por encima de la diagonal principal de la caja de Edgeworth. Por otra parte, si el bien y hubiera necesitado capital intensivo, la curva del contrato O_xO_y se habría arqueado hacia abajo, por debajo de la diagonal. Aquí no presentaremos una prueba formal de que las intensidades desiguales de los factores da lugar a una frontera de posibilidades de producción cóncava, pero por intuición podemos sugerir por qué ocurre eso. Consideremos dos puntos sobre la frontera O_xO_y de la figura 12.3; por ejemplo, P_1 (con coordenadas x_1, y_4) y P_3 (con coordenadas x_3, y_2). Una forma de obtener una combinación de productos "entre" P_1 y P_3 sería producir la combinación

$$\frac{x_1 + x_3}{2}, \quad \frac{y_4 + y_2}{2}.$$

Dado el supuesto de rendimientos constantes a escala, esta combinación sería factible y emplearía plenamente ambos factores productivos. La combinación se situaría en el punto medio de una línea recta que uniera los puntos P_1 y P_3. Si bien este punto es factible, no es eficiente, como podemos observar al analizar los puntos P_1 y P_3 del diagrama de la caja de la figura 12.2. Dada la curvatura de la curva de contrato, la producción en un punto intermedio entre P_1 y P_3 quedaría fuera; es decir, producir en un punto como P_2 proporcionaría más cantidad de los dos bienes. Por tanto, la frontera de posibilidades de producción de la figura 12.3 debe ser una "protuberancia" que sale de la línea recta P_1P_3. Dado que podemos construir esta prueba para

---

[4]Si, además de factores homogéneos y rendimientos constantes a escala, cada bien también empleará k y l en iguales proporciones debido a asignaciones óptimas, entonces la frontera de posibilidades de producción sería una línea recta.

dos puntos cualesquier sobre O_xO_y, hemos demostrado que la frontera es cóncava; es decir, la *TTP* aumenta a medida que la producción del bien *X* aumenta. Cuando reasignamos la producción en dirección nordeste a lo largo de la curva del contrato O_xO_y (en la figura 12.3), la proporción de capital a trabajo disminuye en la producción de *x* y *también* en la de *y*. Dado que el bien *x* necesita capital intensivo, este cambio provoca que el CMg_x aumente. Por otra parte, dado que el bien *y* necesita trabajo intensivo, el CMg_y disminuye. Por tanto, el costo marginal relativo de *x* (reflejado por la *TTP*) aumenta.

Costo de oportunidad y oferta

Por consiguiente, la curva de posibilidades de producción muestra que las combinaciones eficientes que se podrían dar de dos bienes son muchas y que para producir mayor cantidad de un bien es necesario reducir la producción de algún otro bien. Esto es precisamente lo que quieren decir los economistas cuando utilizan el término *costo de oportunidad*. Es fácil medir el costo que entraña producir mayor cantidad de *x* a partir de la reducción de la producción de *y*. Por tanto, la mejor forma de medir el costo de una unidad más de *x* consiste en emplear la *TTP* (de *x* por *y*) en el punto pertinente de la frontera de posibilidades de producción. El hecho de que este costo va aumentando a medida que se produce mayor cantidad de *x* será la fórmula de la oferta en el contexto de un equilibrio general.

EJEMPLO 12.1

Concavidad de la frontera de posibilidades de producción

En este ejemplo analizamos dos características de las funciones de producción que podrían provocar que la frontera de posibilidades de producción sea cóncava.

Rendimientos decrecientes. Supongamos que la producción de *x* y de *y* depende exclusivamente del factor trabajo y que las funciones de producción para estos dos bienes son

$$x = f(l_x) = l_x^{0.5}$$
$$y = f(l_y) = l_y^{0.5}. \qquad (12.4)$$

Por tanto, la producción de estos dos bienes exhibe rendimientos decrecientes a escala. Si la oferta total de trabajo está limitada por

$$l_x + l_y = 100, \qquad (12.5)$$

entonces una simple sustitución muestra que la frontera de posibilidades de producción está determinada por

$$x^2 + y^2 = 100 \text{ para } x, y \geq 0. \qquad (12.6)$$

Por tanto, en este caso, la frontera es la cuarta parte de un círculo y es cóncava. Podemos calcular la *TTP* partiendo del diferencial total de la frontera de posibilidades de producción:

$$2xdx + 2ydy = 0 \text{ o } TTP = \frac{-dy}{dx} = \frac{-(-2x)}{2y} = \frac{x}{y}, \qquad (12.7)$$

y la pendiente aumenta a medida que la producción *x* aumenta. Una ilustración numérica de la concavidad empieza por señalar que los puntos (10, 0) y (0, 10) están ambos en la frontera. Una línea recta que uniera estos dos puntos también incluiría el punto (5, 5), pero este punto quedaría por debajo de la frontera. Si dedicamos iguales cantidades de trabajo a los dos bienes, la producción será $x = y = \sqrt{50}$, lo cual rinde mayor cantidad de los dos bienes que el punto medio.

Intensidad de los factores. Para demostrar que las distintas intensidades de los factores dan por resultado una frontera cóncava de las posibilidades de producción, supongamos que los dos bienes son producidos con rendimientos constantes a escala, pero con diferentes funciones de producción Cobb-Douglas:

$$x = f(k, l) = k_x^{0.5} l_x^{0.5}$$
$$y = g(k, l) = k_y^{0.25} l_y^{0.75}. \qquad (12.8)$$

Supongamos también que el total de capital y de trabajo están limitados por

$$k_x + k_y = 100 \qquad l_x + l_y = 100. \tag{12.9}$$

Es fácil demostrar que

$$TTS_x = \frac{k_x}{l_x} = \kappa_x \qquad TTS_y = \frac{3k_y}{l_y} = 3\kappa_y, \tag{12.10}$$

donde $\kappa_i = k_i/l_i$. Para que se sitúe en la frontera de posibilidades de producción es necesario que $TTS_x = TTS_y$ o $\kappa_x = 3\kappa_y$. Es decir, independientemente de la forma en la que el total de recursos sea asignado a la producción, para estar en la frontera de posibilidades de producción se requiere que x sea un bien de capital intensivo (porque, en cierto sentido, el capital es más productivo en la producción de x que en la producción de y). Las proporciones de capital-trabajo en la producción de los dos bienes también están limitadas por los recursos disponibles:

$$\frac{k_x + k_y}{l_x + l_y} = \frac{k_x}{l_x + l_y} + \frac{k_y}{l_x + l_y} = \alpha\kappa_x + (1-\alpha)\kappa_y = \frac{100}{100} = 1, \tag{12.11}$$

donde $\alpha = l_x/(l_x + l_y)$; es decir, α es la proporción del trabajo dedicado a la producción de x. Si se emplea la condición de que $\kappa_x = 3\kappa_y$ podemos encontrar las proporciones de los factores de los dos bienes en términos de la asignación global de trabajo:

$$\kappa_y = \frac{1}{1+2\alpha} \qquad \kappa_x = \frac{3}{1+2\alpha}, \tag{12.12}$$

y ahora, podemos determinar cuál es la frontera de posibilidades de producción en términos de la proporción del trabajo que se dedica a la producción del bien x:

$$\begin{aligned} x &= \kappa_x^{0.5} l_x = \kappa_x^{0.5}\alpha(100) = 100\alpha\left(\frac{3}{1+2\alpha}\right)^{0.5} \\ y &= \kappa_y^{0.25} l_y = \kappa_y^{0.25}(1-\alpha)(100) = 100(1-\alpha)\left(\frac{1}{1+2\alpha}\right)^{0.25}. \end{aligned} \tag{12.13}$$

Podríamos hacer más operaciones algebraicas para eliminar α de estas dos ecuaciones y obtener una forma funcional explícita para la frontera de posibilidades de producción que involucre tan sólo x y y, pero podemos demostrar la concavidad con lo que ya tenemos. Primero, nótese que si $\alpha = 0$, por tanto tendremos $x = 0$, $y = 100$. Con $\alpha = 1$, tendremos $x = 100$, $y = 0$. Por tanto, una frontera de posibilidades de producción lineal incluiría el punto (50, 50). Pero si $\alpha = 0.39$, por decir,

$$\begin{aligned} x &= 100\alpha\left(\frac{3}{1+2\alpha}\right)^{0.5} = 39\left(\frac{3}{1.78}\right)^{0.5} = 50.6 \\ y &= 100(1-\alpha)\left(\frac{1}{1+2\alpha}\right)^{0.25} = 61\left(\frac{1}{1.78}\right)^{0.25} = 52.8, \end{aligned} \tag{12.14}$$

que muestra que la frontera real está arqueada hacia fuera de la frontera lineal. Es preciso repetir que los dos bienes de este ejemplo son producidos con rendimientos constantes a escala y que los dos factores son enteramente homogéneos. Lo que produce la concavidad de la frontera de posibilidades de producción son las diferentes intensidades de los factores.

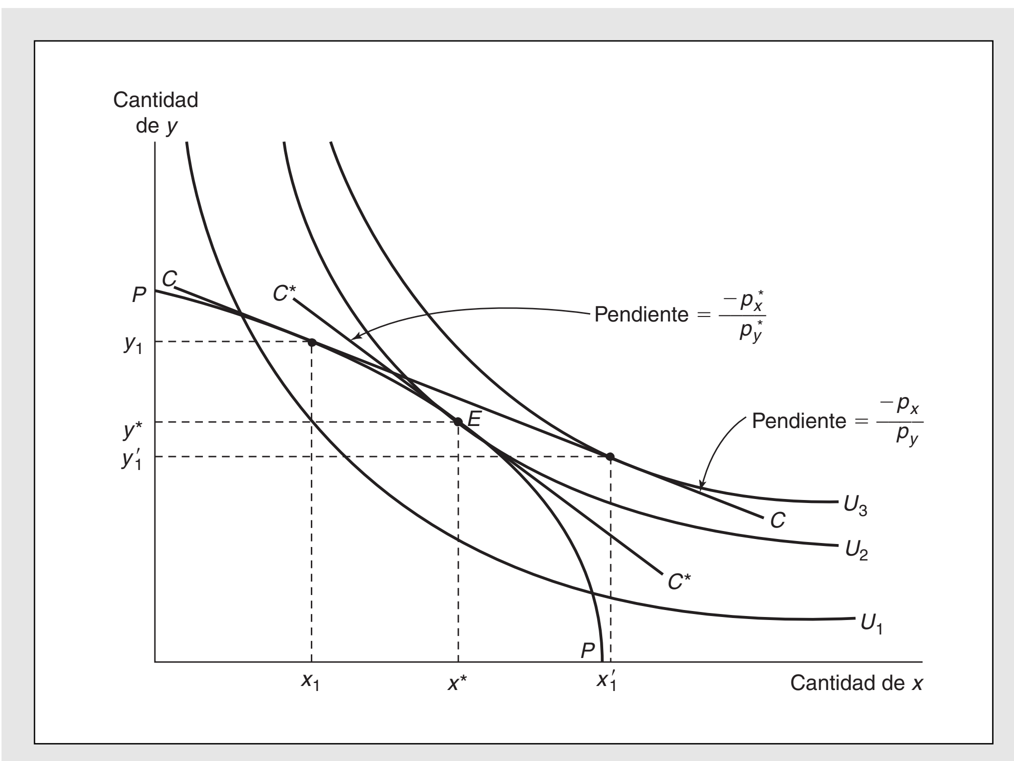
Pregunta: ¿Un incremento en la cantidad total de trabajo disponible cómo cambiaría las fronteras de las posibilidades de producción de este ejemplo?

Determinación de los precios de equilibrio

Dados estos conceptos de la oferta y de la demanda en nuestra sencilla economía con dos bienes, ahora podemos ilustrar cómo se determinan los precios de equilibrio. La figura 12.4 muestra la frontera de posibilidades de producción de la economía (*FPP*), y el conjunto de curvas de indiferencia representa las preferencias de los individuos por estos bienes. Primero, consideremos el precio relativo p_x/p_y. Para esta proporción de precios, las empresas optarán por producir la combinación de productos x_1, y_1. Las empresas que maximizan sus utilidades elegirán el punto más rentable en la *FPP*. En x_1, y_1 la proporción de los precios de estos dos bienes (p_x/p_y) es igual a la proporción de los costos marginales de los bienes (la *TTP*), por lo cual los beneficios se maximizan en este punto. Por otra parte, dada esta restricción presupuestaria (la línea *C*)[5] los individuos demandarán x_1', y_1'. Por tanto, con estos precios, existe un exceso de demanda del bien *x* (los individuos demandan una cantidad superior a la que se está produciendo), mientras que hay un exceso de oferta del bien *y*. El funcionamiento del mercado hará que p_x aumente y p_y disminuya. La proporción de precios p_x/p_y aumentará; la recta de los precios tendrá una pendiente más pronunciada. Las empresas reaccionarán a estas variaciones de los precios moviéndose en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo de la frontera de posibilidades de producción; es decir, aumentarán su producción del bien *x* y reducirán su producción del bien *y*. Por otra parte, los

FIGURA 12.4 **Determinación de los precios de equilibrio**

Con una proporción de precios determinada por p_x/p_y, las empresas producirán x_1, y_1; la restricción presupuestaria de la sociedad estará determinada por la línea *C*. Con esta restricción presupuestaria, los individuos demandan x_1' y y_1'; es decir, hay un exceso de demanda del bien *x*, y un exceso de oferta del bien *y*. El funcionamiento del mercado llevará estos precios hasta sus niveles de equilibrio, p_x^*, p_y^*. A estos precios, la restricción presupuestaria de la sociedad estará determinada por la línea C^*, y la oferta y la demanda estarán en equilibrio. La combinación de bienes elegidos será x^*, y^*.



[5]Es importante entender por qué la restricción presupuestaria se sitúa en este punto. Dado que p_x y p_y están dados, el valor de la producción total es $p_x \cdot x_1 + p_y \cdot y_1$. Éste es el valor del "PIB" en la economía simple de la figura 12.4. Por tanto, también es el ingreso total de las personas de esta sociedad. Luego entonces, la restricción presupuestaria de la sociedad pasa por x_1, y_1 y tiene una pendiente igual a $-p_x/p_y$. Ésta es precisamente la restricción presupuestaria marcada con *C* en la figura.

individuos reaccionarán al cambio de precios sustituyendo y por x en sus elecciones de consumo. Por consiguiente, estas acciones de las empresas y de los individuos sirven para eliminar el exceso de demanda de x y el exceso de oferta de y a medida que cambian los precios de mercado.

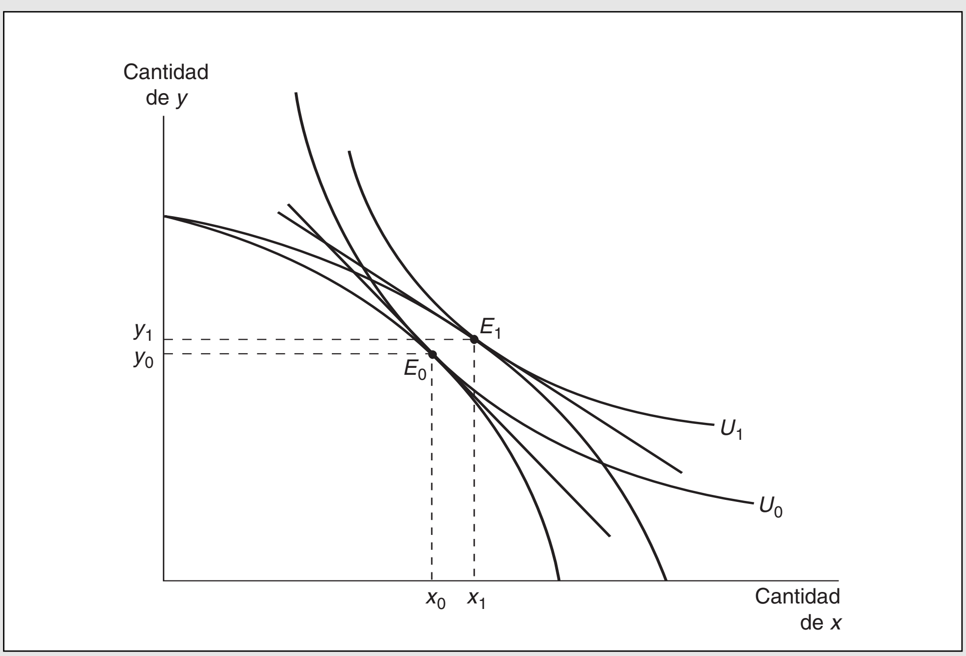
El equilibrio se alcanza en el punto x^*, y^* con una proporción de precios de p_x^*/p_y^*. Con esta proporción de precios,[6] la oferta y la demanda están equilibradas tanto para el bien x como para el bien y. Dado que p_x y p_y, las empresas producirán x^* y y^* para maximizar sus utilidades. Por otra parte, con una restricción presupuestaria determinada por C^*, los individuos demandarán x^* y y^*. El funcionamiento del sistema de precios ha vaciado los mercados de x y de y simultáneamente. Por tanto, esta figura ofrece una visión del "equilibrio general" del proceso de oferta y demanda de dos mercados que funcionan juntos. Por ello, recurriremos mucho esta figura en los análisis siguientes.

Estática comparativa

Al igual que en nuestro análisis del equilibrio parcial, la relación de precios de equilibrio p_x^*/p_y^* que muestra la figura 12.4 tenderá a persistir hasta que cambien las preferencias o las tecnologías productivas. Esta proporción de precios determinada en competencia perfecta, refleja estas dos fuerzas económicas básicas. Si las preferencias cambiaran a favor de, por ejemplo, el bien x, entonces p_x/p_y aumentaría y se establecería un nuevo equilibrio mediante un movimiento en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo de la frontera de posibilidades de producción. Se produciría mayor cantidad de x y menor de y para satisfacer este cambio de preferencias. Asi-

FIGURA 12.5 **Efectos del progreso tecnológico en la producción de *X***

Los adelantos tecnológicos que reducen los costos marginales de la producción de x desplazarán la frontera de posibilidades de producción. Por lo general, esto provocará efectos ingreso y sustitución que harán que aumente la cantidad producida de x (suponiendo que x sea un bien normal). Los efectos en la producción de y son ambiguos porque los efectos ingreso y sustitución operan en sentido contrario.



[6]Nótese, de nueva cuenta, que los mercados en competencia tan sólo determinan el precio relativo de equilibrio. La determinación del nivel de precios absoluto exige que, en este modelo de trueque, introduzcamos el dinero.

mismo, el progreso tecnológico en la producción de x desplazaría hacia fuera la curva de posibilidades de producción, como muestra la figura 12.5. Esto tendería a reducir el precio relativo de x y a aumentar la cantidad consumida de x (suponiendo que x sea un bien normal). En la figura, la cantidad consumida de y también aumenta debido al efecto ingreso que se deriva del adelanto técnico; pero un trazo ligeramente diferente de la figura podría haber revertido este resultado si el efecto sustitución hubiera sido el dominante.

EJEMPLO 12.2

Estática comparativa en un modelo de equilibrio general

Para analizar cómo opera nuestro modelo de equilibrio general, empecemos por un ejemplo sencillo basado en la frontera de posibilidades de producción del ejemplo 12.1. En él, supusimos que la producción de los dos bienes se caracterizaba por los rendimientos decrecientes $x = l_x^{0.5}$ y $y = l_y^{0.5}$ y que el total de trabajo disponible estaba dado por $l_x + l_y = 100$. La frontera de posibilidades de producción resultante estaba determinada por $x^2 + y^2 = 100$ y $TTP = x/y$. Para completar este modelo, supondremos que la función de utilidad del individuo típico está determinada por $U(x, y) = x^{0.5}\, y^{0.5}$, de modo que las funciones de demanda de los dos bienes son

$$\begin{aligned} x &= x(p_x, p_y, I) = 0.5I/p_x \\ y &= y(p_x, p_y, I) = 0.5I/p_y. \end{aligned} \tag{12.15}$$

Equilibrio del caso básico. Para que las empresas puedan maximizar sus ganancias es necesario que $p_x/p_y = CMg_x/CMg_y = TTP = x/y$, y la demanda que maximiza la utilidad requiere que $p_x/p_y = y/x$. Por tanto, el equilibrio requiere que $x/y = y/x$, o $x = y$. Al introducir este resultado en la ecuación de la frontera de posibilidades de producción veremos que

$$x^* = y^* = \sqrt{50} = 7.07 \text{ y } p_x/p_y = 1. \tag{12.16}$$

Éste es el equilibrio de nuestro caso básico con este modelo.

La restricción presupuestaria. La restricción presupuestaria que afrontan los individuos no es especialmente visible en esta ilustración, por lo cual sería conveniente explicarla. A efecto de introducir cierto nivel de precios absolutos en el modelo, analicemos todos los precios en términos del salario, w. Dado que la oferta total de trabajo es 100, el ingreso total del trabajo es $100w$. Sin embargo, dados los rendimientos decrecientes que supusimos para la producción, cada empresa también obtiene beneficios. En el caso de la empresa que produce el bien x, por decir, la función del costo total es $C(w, x) = wl_x = wx^2$, de modo que $p_x = CMg_x = 2wx = 2w\sqrt{50}$. Por consiguiente, la ganancia que obtiene la empresa que produce el bien x es $\pi_x = (p_x - CP_x)x = (p_x - wx)x = wx^2 = 50w$. Un cálculo similar revela que el beneficio de la empresa que produce el bien y también está dado por $50w$. Dado que los modelos de equilibrio general obedecen a la identidad del ingreso nacional, suponemos que los consumidores también son accionistas de las dos empresas y también tomamos estos beneficios como parte de los ingresos que pueden gastar. Por tanto, el ingreso total de los consumidores es

$$\begin{aligned} \text{Ingreso total} &= \text{Ingreso del trabajo} + \text{Beneficios} \\ &= 100w + 2(50w) = 200w. \end{aligned} \tag{12.17}$$

Este ingreso tan sólo permitirá que los consumidores gasten $100w$ en cada bien al comprar $\sqrt{50}$ unidades a un precio de $2w\sqrt{50}$. Por tanto, el modelo tiene consistencia interna.

Un cambio en la oferta. El equilibrio de este caso básico sólo se puede alterar de dos formas: 1) por cambios en la "oferta"; es decir, por cambios de la tecnología básica de esta economía, o 2) por cambios en la "demanda"; es decir, por cambios de preferencias. Analicemos primero los cambios de tecnología. Supongamos que ocurre un avance tecnológico en la producción de x de modo que la función de producción es $x = 2l_x^{0.5}$. Ahora la frontera de posibilidades de producción estará determinada por $\frac{x^2}{4} + y^2 = 100$ y $TTP = x/4y$. Si procedemos como antes para encontrar el equilibrio en este modelo:

$$(\text{oferta})\ p_x/p_y = x/4y \text{ y } (\text{demanda})\ p_x/p_y = y/x, \tag{12.18}$$

de modo que $x^2 = 4y^2$ y el equilibrio es

$$x^* = 2\sqrt{50}\, y^* = \sqrt{50},\ p_x/p_y = 1/2. \tag{12.19}$$

Los avances tecnológicos para la producción de x han provocado que su precio relativo disminuya y que el consumo del bien aumente. Como en muchos ejemplos con la utilidad Cobb-Douglas, los efectos ingreso y sustitución que esta disminución del precio tiene en la demanda de y se compensan exactamente. Sin embargo, los avances tecnológicos colocan a los consumidores claramente en mejor situación. Mientras que antes la utilidad estaba determinada por $U(x, y) = x^{0.5}\, y^{0.5} = \sqrt{50} = 7.07$, ahora ha aumentado a $U(x, y) = x^{0.5}\, y^{0.5} = (2\sqrt{50})^{0.5}\, (\sqrt{50})^{0.5} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = 10$. El progreso tecnológico ha aumentado sustancialmente el bienestar de los consumidores.

Un cambio en la demanda. Si las preferencias de los consumidores cambiaran a favor del bien y porque $U(x, y) = x^{0.1}\, y^{0.9}$, las funciones de demanda estarían determinadas por $x = 0.1I/p_x$ y $y = 0.9I/p_y$, y el equilibrio de la demanda necesitaría que $p_x/p_y = y/9x$. Si volvemos a la frontera original de posibilidades de producción para llegar a un equilibrio general tendremos

$$\textbf{(oferta) } p_x/p_y = x/y \textbf{ y (demanda) } p_x/p_y = y/9x, \tag{12.20}$$

por tanto $9x^2 = y^2$ y el equilibrio está dado por

$$x^* = \sqrt{10}\ y^* = 3\sqrt{10} \text{ y } p_x/p_y = 1/3. \tag{12.21}$$

Por tanto, la disminución de la demanda de x ha reducido sustancialmente su precio relativo. Sin embargo, nótese que en este caso no podemos comparar el bienestar con los casos anteriores porque la función de utilidad ha cambiado.

Pregunta: ¿Cuál es la restricción presupuestaria en estos dos escenarios alternativos? ¿El ingreso cómo es distribuido entre el salario y los beneficios en cada uno de los casos? Utilice su intuición para explicar las diferencias.

Modelo del equilibrio general y precios de los factores

Así, este sencillo modelo del equilibrio general refuerza las observaciones de Marshall respecto a la importancia de las fuerzas de la oferta y la demanda en el proceso de determinación de los precios. Dado que el modelo de equilibrio general presenta una conexión explícita entre los mercados de todos los bienes, permite un análisis de cuestiones de las relaciones de mercado más complejo que el que sería posible si analizáramos tan sólo un mercado a la vez. El modelo del equilibrio general también permite un análisis de las relaciones entre los mercados de bienes y los mercados de factores. A continuación, se ilustrará el punto con un caso histórico importante.

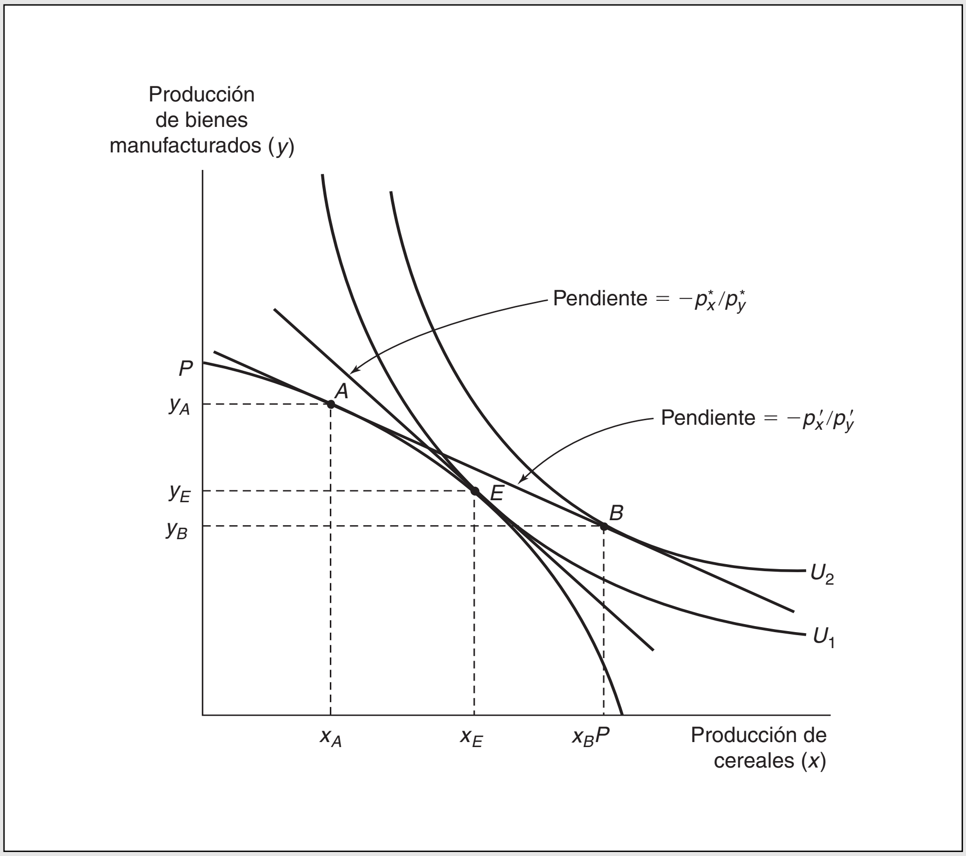
El debate en torno a las leyes del maíz

El gobierno británico impuso altos aranceles a las importaciones de granos tras las guerras napoleónicas. El debate en torno a los efectos de estas “leyes del maíz” dominó los esfuerzos analíticos de los economistas entre 1829 y 1845. Una cuestión esencial del debate se refería al efecto que eliminar los aranceles tendría en los precios de los factores, asunto que sigue teniendo importancia hoy en día, como se verá.

La frontera de posibilidades de producción de la figura 12.6 muestra las combinaciones de granos (x) y de bienes manufacturados (y) que podían elaborar los factores productivos británicos. Suponiendo (de alguna manera en contra de la realidad) que las leyes del maíz impidieran por completo el comercio, el equilibrio del mercado se encontraría en el punto E y la proporción de precios nacionales estaría determinada por p_x^*/p_y^*. La supresión de los aranceles reduciría esta proporción de precios a p_x'/p_y'. Dada esta nueva proporción, Gran Bretaña produciría la combinación A y consumiría la combinación B. Las importaciones de granos ascenderían en un

FIGURA 12.6 **Análisis del debate de las leyes del maíz**

La reducción de las barreras arancelarias para los granos haría que la producción se reasignara del punto E al punto A. El consumo se reasignaría de E a B. Si la producción de granos necesita, relativamente, de un capital intensivo, el precio relativo del capital disminuiría debido a estas reasignaciones.



monto igual a $x_B - x_A$, y estarían financiadas por exportaciones de bienes manufacturados por una cantidad igual a $y_A - y_B$. La utilidad global del consumidor británico típico aumentaría gracias a la apertura del comercio. Por tanto, el uso del diagrama de posibilidades de producción muestra las consecuencias que relajar los aranceles tendría en la producción de ambos bienes.

Comercio y precio de los factores

Si volvemos al diagrama de la caja de producción de Edgeworth, que fundamenta la frontera de posibilidades de producción (figura 12.2), también podremos analizar el efecto que las reducciones arancelarias tienen en el precio de los factores. El movimiento del punto E al punto A en la figura 12.6 es análogo al movimiento de P_3 a P_1 en la figura 12.2, donde la producción de x disminuye y la producción de y aumenta.

Esta figura también muestra la reasignación de capital y trabajo que resulta necesaria debido a este movimiento. Si suponemos que la producción de granos necesita, relativamente, de capital intensivo, el movimiento de P_3 a P_1 provoca que la proporción de k a l aumente en ambas industrias.[7] A su vez, esto provocará que el precio relativo del capital disminuya (y que el precio

[7]En el debate en torno a las leyes del maíz, la atención de hecho estaba centrada en los factores: tierra y trabajo.

relativo del trabajo aumente). Por tanto, podemos concluir que la supresión de las leyes de granos sería perjudicial para los propietarios del capital (es decir, los terratenientes) y útiles para los trabajadores. No es extraño que los intereses de los terratenientes se opusieran a que se repelieran estas leyes.

Respaldo político a las políticas comerciales

La posibilidad de que las políticas comerciales puedan afectar los ingresos relativos de diversos factores de producción sigue ejerciendo una gran influencia en los debates en torno a estas políticas. Por ejemplo, en Estados Unidos las exportaciones tienden a emplear intensivamente mano de obra calificada, mientras que las importaciones tienden a emplear intensivamente la no calificada. Por consiguiente, por analogía con nuestro análisis de las leyes del maíz, cabe esperar que el mayor avance hacia políticas de libre comercio dé lugar a un incremento de los salarios relativos de los trabajadores calificados y a una disminución de los que ofrecen mano de obra no calificada. Así, no es nada extraño que los sindicatos que representan a los trabajadores calificados (los maquinistas o los trabajadores de la industria aérea) sean partidarios del libre comercio, mientras que los sindicatos de trabajadores sin calificación (de la industria textil, la del calzado y otras afines) se suelen oponer a él.[8]

Existencia de precios en el equilibrio general

Hasta ahora hemos supuesto, más o menos, que los mercados competitivos pueden alcanzar un equilibrio en el cual las fuerzas de la oferta y la demanda están niveladas simultáneamente en todos los mercados. Sin embargo, dados los supuestos que hemos planteado, no existe garantía alguna de que ocurra esta solución simultánea. Los economistas, partiendo de las investigaciones que Leon Walras realizó en el siglo XIX, han empleado instrumentos cada vez más sofisticados para analizar si existe un conjunto de precios que permita el equilibrio de todos los mercados y, en tal caso, cómo podemos encontrar este conjunto de precios. En esta sección se analizarán algunos aspectos de esta interrogante.

Un modelo matemático simple

Podemos demostrar algunos aspectos esenciales de la solución moderna al problema walrasiano recurriendo al caso en el cual no hay producción alguna. Supongamos que en esta economía hay n bienes y una oferta absolutamente fija, los cuales son distribuidos de alguna forma entre los individuos de esa sociedad. Si O_i ($i = 1, \ldots, n$) es la oferta total del bien i disponible, y si p_i ($i = 1, \ldots, n$) representa el precio del bien i entonces la demanda total del bien i depende de todos los precios y esta función representa la suma de las funciones de demanda de los individuos en tanto del bien i. Esta función de demanda total está denotada por

$$D_i(p_1, \ldots, p_n)$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Dado que nos interesa el conjunto completo de precios $p_1, \ldots, p_n$, por comodidad se denotará el conjunto completo con $\boldsymbol{P}$. Por lo cual, podremos expresar las funciones de demanda como

$$D_i(P).$$

Por tanto, podremos plantear formalmente el problema de Walras de la manera siguiente: ¿existe un *conjunto de precios de equilibrio* ($\boldsymbol{P^*}$) de modo que

$$D_i(P^*) = S_i \qquad \textbf{(12.22)}$$

para todos los valores de i? La interrogante planteada por Walras es si existe un conjunto de precios en cuyo caso la oferta sea igual a la demanda en *todos los mercados simultáneamente*.

[8]El resultado de que abrirse al comercio elevará el precio relativo del factor abundante es conocido como el teorema de Stolper-Samuelson, en honor de los economistas que lo demostraron con rigor en los años cincuenta.

Funciones del exceso de demanda

En el análisis siguiente será más cómodo trabajar con funciones de exceso de demanda para el bien i a un conjunto de precios (P), que se definen como[9]

$$ED_i(P) = D_i(P) - O_i. \quad i = 1, n \tag{12.23}$$

Si empleamos esta notación, podemos volver a expresar las condiciones de equilibrio de la manera siguiente

$$ED_i(P^*) = D_i(P^*) - O_i = 0. \ i = 1, n \tag{12.24}$$

Esta condición expresa que, a los precios de equilibrio, el exceso de demanda debe ser igual a cero en todos los mercados.[10]

El propio Walras destacó una serie de características interesantes sobre el sistema de ecuaciones 12.24. En primer término, como se ha demostrado antes, las funciones de demanda (y, por tanto, las funciones de exceso de demanda) son *homogéneas de grado cero*. Si se duplicaran todos los precios (inclusive los salarios del trabajo), la cantidad demandada de cada bien no registraría cambio alguno. Por tanto, en un modelo de tipo walrasiano, lo único que tratamos de hacer es determinar precios relativos de equilibrio. Otro supuesto de Walras era que las funciones de demanda (y, por tanto, las funciones de exceso de demanda) son *continuas*; es decir, si los precios sólo cambiaran un poco, las cantidades demandadas sólo cambiarían en poco también. Los supuestos de homogeneidad y de continuidad son resultados directos de la teoría del comportamiento del consumidor que estudiamos en la parte 2.

Ley de Walras

Una observación final de Walras fue que las n funciones de exceso de demanda no son independientes unas de otras. Las ecuaciones están relacionadas mediante la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot ED_i(P) = 0. \tag{12.25}$$

La ecuación 12.25 se suele conocer como la *ley de Walras* y expresa que el "valor total" del exceso de demanda es igual a cero para un conjunto de precios *cualquiera*. No puede haber exceso de demanda ni de oferta para todos los bienes juntos. Comprobar la ley de Walras es algo muy sencillo, si bien es necesario introducir una compleja notación. La demostración parte del hecho de que cada individuo de la economía está limitado por una restricción presupuestaria. La siguiente nota de pie de página[11] presenta un ejemplo sencillo de esta comprobación, pero dejamos al lector la generalización de la misma.

Es conveniente destacar que la ley de Walras es válida para un conjunto de precios cualquiera y no sólo para los precios de equilibrio. Podemos pensar que la ley se aplica trivialmente a un conjunto de precios de equilibrio, porque cada una de las funciones de exceso de demanda será

---

[9]Si bien podemos introducir el comportamiento de la oferta haciendo que O_i también dependa de P aquí no haremos eso.

[10]Más adelante, modificaremos ligeramente esta condición de equilibrio para permitir que el precio de equilibrio de algunos bienes sea igual a cero.

[11]Supongamos que hay dos bienes (A y B) y dos individuos (Santiago y Juan) en una sociedad. Si D_A^S, D_B^S, S_A, S_B^S son las demandas y las ofertas de A y B de Santiago y si empleamos una notación análoga para las demandas y las ofertas de Juan, entonces podremos expresar la restricción presupuestaria de Santiago como

$$p_A D_A^S + p_B D_B^S = p_A O_A^S + p_B O_B^S$$

o

$$p_A(D_A^S - O_A^S) + p_B(D_B^S - O_B^S) = 0$$

o

$$p_A ED_A^S + p_B ED_B^S = 0,$$

donde ED_A^S y ED_B^S representan, respectivamente, el exceso de demanda de Santiago de A y B.

Juan tiene una restricción análoga de su presupuesto:

$$p_A ED_A^J + p_B ED_B^J = 0,$$

y, por tanto, si ED_A y ED_B representan el exceso total de las demandas de A y B, tendremos que

$$p_A \cdot (ED_A^S + ED_A^J) + p_B \cdot (ED_B^S + ED_B^J) = p_A \cdot ED_A + p_B \cdot ED_B = 0.$$

Ésta es exactamente la ley de Walras tal como se presenta en la ecuación 12.25.

igual a cero con este conjunto de precios. La ley de Walras demuestra que las condiciones de equilibrio en n mercados no son independientes. No tenemos n ecuaciones independientes con n incógnitas (los n precios). Por el contrario, la ecuación 12.24 representa únicamente $(n - 1)$ ecuaciones independientes y, por tanto, sólo podremos determinar $(n - 1)$ de los precios. Sin embargo, esto es lo que habríamos esperado dada la propiedad de homogeneidad de las funciones de demanda. Sólo podremos determinar *precios relativos de equilibrio*; porque nada del modelo permite derivar precios absolutos.

Walras demuestra la existencia de los precios de equilibrio

Walras, tras haber reconocido estas características técnicas del sistema de ecuaciones de exceso de demanda, atacó la cuestión de la existencia de un conjunto de precios (relativos) de equilibrio. Trató de establecer que, en esta situación, las n condiciones de equilibrio de la ecuación 12.24 bastaban para garantizar que, de hecho, existía este conjunto de precios y, por tanto, que el modelo de intercambio tenía un marco teórico coherente. El simple recuento de ecuaciones e incógnitas era una primera indicación de que la existencia de precios de equilibrio podría ser confirmada. Las condiciones de equilibrio del mercado proporcionan $(n - 1)$ ecuaciones *independientes* con $(n - 1)$ precios relativos desconocidos. Por tanto, el álgebra básica de resolución de ecuaciones lineales simultáneas sugiere que podría existir una solución de equilibrio.

Por desgracia, como reconoció Walras, la resolución de los precios de equilibrio no es una cuestión tan sencilla como sólo recontar ecuaciones e incógnitas. En primer lugar, las ecuaciones no son necesariamente lineales. Por tanto, las condiciones normales para la existencia de soluciones a ecuaciones lineales simultáneas no necesariamente serían aplicables en este caso. En segundo, desde el punto de vista económico del problema, es evidente que todos los precios de equilibrio no deben ser negativos. Un precio negativo no tiene significado alguno en el contexto de este problema. Para atacar estas dos dificultades, Walras desarrolló una demostración muy tediosa, que implicaba la resolución de los precios de equilibrio en una serie de aproximaciones sucesivas. No se presentará la demostración de Walras con gran detalle, pero con sólo ver cómo planteó el problema resulta muy aleccionador.

Parta de un conjunto arbitrario de precios iniciales. Mantenga constantes los demás $(n - 1)$ precios, para encontrar el precio de equilibrio en el mercado del bien 1. Denomínelo precio de equilibrio "provisional", p_1'. Ahora, mantenga constantes p_1' y los demás $(n - 2)$ precios y resuelva el sistema para determinar el precio de equilibrio en el mercado del bien 2. Este precio será p_2'. Observe que, al alterar p_2 de su posición inicial a p_2', el precio calculado al inicio para el mercado 1 no necesariamente sigue siendo un precio de equilibrio, porque el bien 1 puede ser sustitutivo o complementario del bien 2. Esto refleja el hecho de que el sistema de ecuaciones es, de hecho, simultáneo. Utilice los precios provisionales p_1' y p_2', para calcular el precio provisional p_3'. Prosiga de esta manera con la demostración hasta que haya calculado un conjunto completo de precios relativos provisionales.

En una suerte de repetición de la demostración de Walras, $p_2', \ldots, p_n'$ se mantienen constantes para calcular un nuevo precio de equilibrio del primer bien. Este nuevo precio provisional será p_1''. Aplicando el mismo procedimiento que antes, podrá calcular un nuevo conjunto de precios relativos provisionales $(p_1'', \ldots, p_n'')$. La demostración se sigue repitiendo de esta manera hasta llegar a una aproximación razonable del conjunto de precios de equilibrio.

La importancia de la demostración de Walras es que puede demostrar la simultaneidad en el problema de calcular precios de equilibrio. Sin embargo, es una demostración laboriosa y, por lo general, no se emplea en la actualidad. Los trabajos más recientes han empleado algunos instrumentos relativamente sencillos de las matemáticas avanzadas para demostrar la existencia de precios de equilibrio de forma elegante y formal. Para demostrar esta comprobación es preciso describir un teorema de las matemáticas avanzadas.

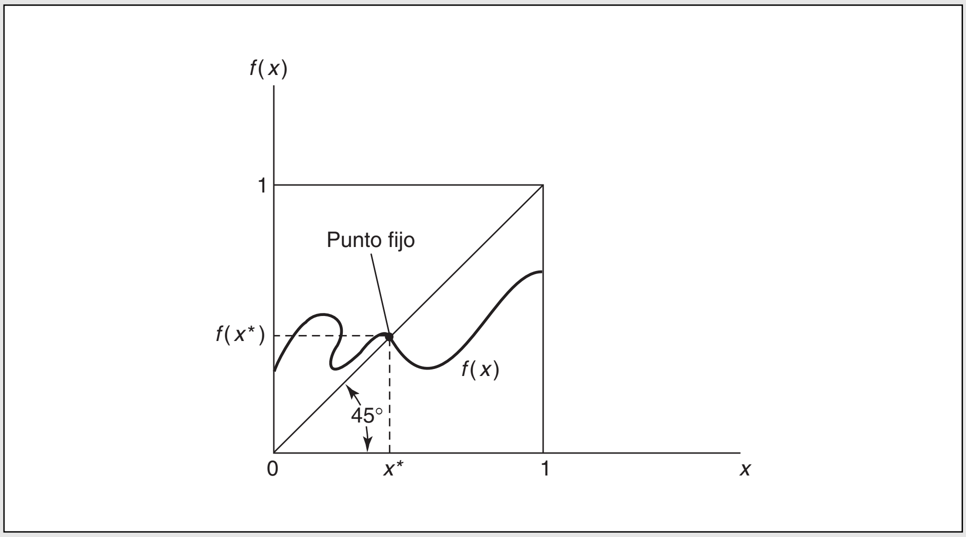
El teorema del punto fijo de Brouwer

Dado que esta sección trata de matemáticas puras, lo más conveniente tal vez sea ir directo al grano y plantear el teorema de Brouwer:

> Una función continua cualquiera $[F(X)]$ de un conjunto convexo, cerrado y limitado en sí mismo tiene cuando menos un punto fijo (X^*) de modo que $F(X^*) = X^*$.

FIGURA 12.7 **Ilustración gráfica del teorema del punto fijo de Brouwer**

Dado que una función continua cualquiera debe cruzar la línea de 45 grados en algún punto de una unidad cuadrada, esta función debe tener un punto en el cual $f(x^*) = x^*$. Este punto se denomina "punto fijo".



Antes de analizar este teorema paso por paso, un ejemplo quizás ayude a comprender la terminología. Supongamos que $f(x)$ es una función continua definida en el intervalo $[0, 1]$ y que $f(x)$ también toma los valores del intervalo $[0, 1]$. Por consiguiente, esta función cumple las condiciones del teorema de Brouwer: se debe dar el caso que existe alguna x^* de modo que $f(x^*) = x^*$. La figura 12.7 demuestra este hecho. Ahí, queda claro que una función cualquiera, siempre y cuando sea continua (que no tenga "saltos" o puntos en los que no esté determinada), debe cruzar la recta de 45 grados en alguna parte. Este punto de corte es un *punto fijo,* porque f incluye este punto (x^*) en su propio mapa.

Para poder estudiar el significado más general del teorema, primero es necesario definir los términos *mapa, convexo, cerrado* y *limitado*. Se presentarán las definiciones de estos conceptos de forma muy intuitiva y poco rigurosa porque, para efectos de este libro, los costos del rigor matemático serían muy superiores a las posibles ventajas que obtendríamos.

Un *mapa* es una regla que relaciona los puntos de un conjunto con puntos de otro conjunto (o posiblemente del mismo). El mapa que se encuentra con más frecuencia es el que relaciona un punto en un espacio n dimensional con algún otro punto en un espacio n dimensional. Supongamos que F es el mapa que queremos estudiar. Así, dejemos que X sea el punto de definición del mapa; es decir, el mapa relaciona X con algún otro punto $Y = F(X)$. Si se define el mapa para un subconjunto de un espacio n dimensional (E), y si cada punto de E está relacionado (mediante la regla F) con algún otro punto de E, decimos que el mapa incluye al mapa de *E en* sí. En la figura 12.7 la función f incluye el intervalo de la unidad en su mapa. Este mapa es *continuo* si los puntos que están "cerca" entre sí son incluidos en el mapa de otros puntos que están "cerca" entre sí.

El *teorema del punto fijo de Brouwer* analiza el mapa definido en ciertos tipos de conjuntos. Es preciso que estos conjuntos sean cerrados, limitados y convexos. La forma más sencilla de describir estos conjuntos probablemente sería decir que parecen (analogías de n dimensiones) pompas de jabón. Son cerrados porque están circunscritos a sus fronteras; los conjuntos son *limitados* porque ninguna de sus dimensiones es infinitamente grande; y son *convexos* porque no tienen hendiduras en ellos. Encontrará una descripción técnica de las propiedades de estos conjuntos en cualquier libro de topología elemental.[12] Sin embargo, para nuestros propósitos, sólo es necesario saber que el teorema de Brouwer se aplica a ciertos tipos de conjuntos que tienen una forma conveniente. Por tanto, para emplear el teorema a efecto de demostrar la existencia de precios de equilibrio, primero debemos describir el conjunto de puntos que tiene estas propiedades deseables.

Demostración de la existencia de precios de equilibrio

La llave para aplicar el teorema de Brouwer al modelo de intercambio que acabamos de desarrollar es elegir una forma adecuada para "normalizar" los precios. Dado que en el modelo de intercambio sólo importan los precios relativos, resulta conveniente suponer que los precios han sido definidos de tal modo que la suma de todos los precios es igual a uno. En términos matemáticos diríamos que, en el caso de un conjunto arbitrario de precios ($p_1, \ldots, p_n$), podemos trabajar con precios *normalizados* de la forma siguiente[13]

$$p_i' = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}. \tag{12.26}$$

Estos nuevos precios mantendrán sus valores relativos iniciales ($p_i'/p_j' = p_i/p_j$) y su suma será igual a 1:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i' = 1. \tag{12.27}$$

Dada la homogeneidad de grado cero de todas las funciones de exceso de demanda, siempre es posible efectuar este tipo de normalización. Por tanto, en lo que resta de esta demostración, supondremos que el conjunto de precios factibles (al que llamaremos S) está compuesto por todas las combinaciones posibles de n números no negativos que suman uno. Para evitar una notación compleja vamos a desestimar los símbolos especiales que hemos estado empleando para estos precios.

Este conjunto, S, es el conjunto en el cual podemos aplicar el teorema de Brouwer. El conjunto S es cerrado, limitado y convexo.[14] Para aplicar el teorema de Brouwer es necesario definir un mapa continuo de S en sí mismo. Si elegimos correctamente esta función, podremos demostrar que el punto fijo que dicta el teorema es, de hecho, un conjunto de precios relativos de equilibrio.

Bienes gratis

Antes de mostrar los detalles de la comprobación, debemos volver a definir lo que quiere decir un "conjunto de precios de equilibrio". En realidad, no necesitamos que el exceso de demanda sea exactamente igual a cero en todos los mercados para que haya un equilibrio. Por el contrario, pueden existir bienes que tengan mercados en equilibrio, pero cuya oferta disponible exceda a la demanda; es decir, existe un exceso negativo de demanda. Sin embargo, para que sea así, es necesario que el precio de este bien específico sea igual a cero. Por tanto, podemos volver a escribir las condiciones de la ecuación 12.24 de modo que tomen en cuenta la existencia de estos *bienes gratis*:

$$\begin{aligned} ED_i(P^*) &= 0 \quad \text{para } p_i^* > 0 \\ ED_i(P^*) &\le 0 \quad \text{para } p_i^* = 0. \end{aligned} \tag{12.28}$$

Nótese que este conjunto de precios de equilibrio sigue cumpliendo la ley de Walras.

---

[12]Encontrará una explicación de las matemáticas empleadas en la teoría del equilibrio general en las referencias al final de este capítulo.

[13]Aquí, debemos plantear un supuesto adicional, a saber: uno de los precios, cuando menos, no puede ser igual a cero. En términos de economía, esto significa que un bien, cuando menos, es escaso. Sin este supuesto, no sería posible normalizar los precios; sin embargo, en tal caso, no sería necesario estudiar los aspectos económicos porque no existiría el problema económico de la escasez.

[14]En dos dimensiones, el conjunto sería sencillamente una línea recta que uniría las coordenadas (0, 1) y (1, 0). En tres dimensiones, el conjunto sería un plano de forma triangular con vértices en (0, 0, 1), (0, 1, 0) y (1, 0, 0). Es fácil ver que cada uno de estos conjuntos es cerrado, limitado y convexo.

Inclusión del conjunto de precios en el mapa mismo

Si se emplea esta definición de equilibrio y si recordamos que los precios han sido normalizados para que su suma sea igual a uno, ahora podremos construir una función continua que transforma un conjunto de precios en otro. La función que definiremos se funda en la idea walrasiana de que, para poder alcanzar el equilibrio, debe aumentar el precio de los bienes que tienen exceso de demanda y debe disminuir el de los bienes que tienen exceso de oferta. Por tanto, se define el mapa $F(P)$ de un conjunto cualquiera de precios (normalizados), P, de tal modo que el elemento i-ésimo de $F(P)$, denotado por $F^i(P)$, está determinado por

$$F^i(P) = p_i + ED_i(P) \qquad (12.29)$$

para todo i. Por tanto, el mapa cumple con la tarea necesaria de aumentar y disminuir los precios de forma adecuada. Si, en p_i, el bien i tiene exceso de demanda $[ED_i(P) > 0]$, el precio p_i aumenta, mientras que si el exceso de demanda es negativo, p_i disminuye. Dado que suponemos que las funciones de exceso de demanda son continuas, este mapa también será continuo. Sin embargo, con el mapa de la ecuación 12.29, restan dos problemas. El primero es que nada garantiza que los nuevos precios sean no negativos. Por tanto, hay que volver a definir el mapa para que sea

$$F^i(P) = \text{Max}\,[p_i + ED_i(P), 0] \qquad (12.30)$$

para todo i. Aquí, el término *Max* tan sólo significa que los nuevos precios definidos por el mapa F deben ser positivos o nulos, pero no se permite que los precios sean negativos. El mapa de la ecuación 12.30 también es continuo.

El segundo problema con el mapa de la ecuación 12.30 es que los precios recalculados no necesariamente están normalizados; es decir su suma no es igual a uno. Sin embargo, será fácil normalizar estos nuevos precios para que su suma sea igual a 1.[15] Para no tener que introducir una notación adicional, supongamos que ya se ha efectuado esta normalización y, por tanto, que

$$\sum_{i=1}^{n} F^i(P) = 1. \qquad (12.31)$$

Aplicación del teorema de Brouwer

Así, con esta normalización, F cumple las condiciones del teorema del punto fijo de Brouwer. Es un mapa continuo que incluye el conjunto S en el mapa mismo. Por tanto, existe un punto (P^*) que se incluye en el mapa mismo. En el caso de este punto,

$$p_i^* = \text{Max}\,[p_i^* + ED_i(P^*), 0] \qquad (12.32)$$

para todo i.

---

[15]Para efectuar esta normalización, primero debemos demostrar que no todos los precios transformados serán iguales a cero; es necesario demostrar que $p_i + ED_i(P) > 0$ para algún i. Podemos demostrarlo por medio de la contradicción. Supongamos que $p_i + ED_i(P) \le 0$ para todo i. Si multiplicamos esta expresión p_i y sumamos todos los valores de i, tendremos

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i ED_i(P) \le 0.$$

Pero

$$\sum_{i=1}^{n} p_i ED_i = 0$$

según la ley de Walras. Por tanto

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \le 0,$$

y esto implica que $p_i = 0$ para todo i. Sin embargo, ya hemos descartado esta situación (véase la nota 13 a pie de página) y, por tanto, hemos demostrado que uno de los precios transformados, cuando menos, debe ser positivo.

Pero lo anterior dice que P^* es un conjunto de precios de equilibrio: para $p_i^* > 0$,

$$p_i^* = p_i^* + ED_i(P^*)$$

o

$$ED_i(P^*) = 0; \tag{12.33}$$

y para $p_i^* = 0$,

$$p_i^* + ED_i(P^*) \leq 0$$

o

$$ED_i(P^*) \leq 0. \tag{12.34}$$

Así, hemos demostrado que el conjunto de funciones de exceso de demanda tiene, de hecho, una solución de equilibrio compuesta por precios que son no negativos. El sencillo modelo de intercambio desarrollado aquí es consistente en que las funciones de oferta y demanda del mercado tienen necesariamente una solución. Las propiedades de homogeneidad y continuidad de las funciones de demanda y la capacidad de la ley de Walras para unir oferta y demanda son responsables, conjuntamente, de este resultado.

Generalizaciones

Si bien esta demostración es relativamente antigua en el campo de la teoría del equilibrio general, tiene características de mucha de la literatura más reciente de este campo. En concreto, casi todas las demostraciones modernas emplean la ley de Walras y algún tipo de teorema del punto fijo. Los trabajos más recientes tienden a centrarse en la forma en que la demostración de la existencia de precios de equilibrio general se puede generalizar a situaciones que implican supuestos más complejos sobre la oferta y sobre cómo se pueden calcular los precios de equilibrio. En capítulos posteriores de este libro se analizarán algunos de estos supuestos alternativos sobre la oferta, como los casos de competencia imperfecta y los problemas generados por los "bienes públicos" (que se definirán más adelante en este mismo capítulo). Las ampliaciones de este capítulo muestran algunas de las formas en que estos modelos de equilibrio general han sido aplicados mediante computadoras.

Equilibrio general con tres bienes

La economía de Oz está compuesta por tres metales preciosos: 1) plata, 2) oro y 3) platino. Hay 10 (mil) onzas disponibles de cada metal. La demanda de oro está determinada por

$$D_2 = -2\frac{p_2}{p_1} + \frac{p_3}{p_1} + 11$$

y la de platino por (12.35)

$$D_3 = -\frac{p_2}{p_1} - 2\frac{p_3}{p_1} + 18.$$

Nótese que las demandas de oro y de platino dependen del precio relativo de los dos bienes y que estas funciones de demanda son homogéneas de grado cero para los tres precios. Nótese también que no hemos descrito la función de demanda de la plata pero, como demostraremos, se puede derivar a partir de la ley de Walras.

(continúa)

EJEMPLO 12.3 ***CONTINUACIÓN***

El equilibrio en los mercados de oro y platino exige que la demanda sea igual a la oferta en ambos mercados simultáneamente:

$$\begin{aligned} -2\frac{p_2}{p_1} + \frac{p_3}{p_1} + 11 &= 10 \\ -\frac{p_2}{p_1} - 2\frac{p_3}{p_1} + 18 &= 10. \end{aligned} \tag{12.36}$$

Podemos resolver fácilmente este sistema de ecuaciones simultáneas para obtener

$$\frac{p_2}{p_1} = 2 \qquad \frac{p_3}{p_1} = 3. \tag{12.37}$$

Por tanto, en equilibrio, el precio del oro será dos veces mayor que el de la plata y el precio del platino será tres veces mayor que el de la plata. El precio del platino será 1.5 veces mayor que el del oro.

La ley de Walras y la demanda de plata. Dado que en esta economía se debe cumplir la ley de Walras, sabemos que

$$p_1 ED_1 = -p_2 ED_2 - p_3 ED_3. \tag{12.38}$$

Si se resuelven las ecuaciones 12.36 para los excesos de las demandas (pasando las ofertas fijas al lado izquierdo) y sustituyendo en la ley de Walras se obtendrá

$$p_1 ED_1 = 2\frac{p_2^2}{p_1} - \frac{p_2 p_3}{p_1} - p_2 + \frac{p_2 p_3}{p_1} + 2\frac{p_3^2}{p_1} - 8p_3 \tag{12.39}$$

o

$$ED_1 = 2\frac{p_2^2}{p_1^2} + 2\frac{p_3^2}{p_1^2} - \frac{p_2}{p_1} - 8\frac{p_3}{p_1}. \tag{12.40}$$

Como era de esperar, esta función es homogénea de grado cero para los precios relativos, y el mercado de la plata también está en equilibrio ($ED_1 = 0$) a los precios relativos calculados anteriormente. (¡Compruébelo usted mismo!)

Un cambio en la oferta. Si la oferta de oro disminuye a 7 y la oferta del platino aumenta a 11, cabe esperar que los precios relativos cambien. Parece probable que el precio relativo del oro aumente. Por otra parte, dado que el aumento en el precio del oro reducirá la demanda de platino y que la oferta del platino ha aumentado, el precio relativo del platino debería disminuir. Pero esto reduciría la demanda de oro, por lo que el resultado final es ambiguo y, evidentemente, se necesita una solución simultánea. De hecho, la solución de

$$-2\frac{p_2}{p_1} + \frac{p_3}{p_1} + 11 = 7 \tag{12.41}$$

y

$$-\frac{p_2}{p_1} - 2\frac{p_3}{p_1} + 18 = 11$$

es

$$\frac{p_2}{p_1} = 3 \qquad \frac{p_3}{p_1} = 2. \tag{12.42}$$

Por tanto, el precio del oro aumentará respecto al del platino y al de la plata. El precio del platino disminuye respecto al de la plata. Todos estos efectos sólo se pueden calcular empleando un modelo simultáneo.

Pregunta: ¿Sigue en equilibrio el mercado de la plata dadas las nuevas ofertas del oro y el platino?

La eficiencia de la competencia perfecta

Si bien muchas personas reconocen las propiedades de equilibrio del sistema de precios en competencia (después de todo, los precios normalmente no fluctúan mucho de un día para otro), no encuentran un gran patrón global en la asignación de recursos resultante. Las relaciones que describe el modelo de la competencia son tan complejas que es difícil creer que un resultado deseable puede surgir del caos. Esta visión presenta una lógica abierta para manipular el sistema; dado que los resultados de las fuerzas del mercado son caóticas, es de esperar que las sociedades humanas salgan mejor libradas con una planeación cuidadosa.

La hipótesis de Smith acerca de la mano invisible

Se requirió del genio de Adam Smith para retar este planteamiento, que seguramente era el que prevalecía en el siglo XVIII. Para Smith, el sistema del mercado en competencia representaba el extremo contrario al caos. Por el contrario, éste proporcionaba una poderosa "mano invisible" que garantizaba que los recursos encontrarían la forma de llegar a donde eran más valorados, reforzando así la "riqueza" de la nación. En opinión de Smith, el depender del interés económico personal de los individuos y las empresas daría por resultado (tal vez asombrosamente) un resultado social deseable.

Las ideas iniciales de Smith dieron origen a la economía moderna del bienestar. Concretamente, su muy citada imagen de la "mano invisible" fue el motor que movió lo que ahora se conoce como el "Primer Teorema de la Economía del Bienestar"; es decir, que existe una correspondencia exacta entre la asignación eficiente de recursos y los precios competitivos de dichos recursos. Aquí se analizará dicha correspondencia con cierto detalle. Empezamos por definir la eficiencia económica en diversos contextos. Estas definiciones (todas ellas basadas en el trabajo de Vilfred Pareto, el economista del siglo XIX) ya han sido descritas brevemente en capítulos anteriores. Aquí, nuestra meta será reunir estos planteamientos e ilustrar su relación básica con la asignación competitiva de los recursos.

Eficiencia de Pareto

Empezamos con la definición de eficiencia económica de Pareto.

Asignación eficiente de Pareto. Una asignación de recursos será *eficiente en el sentido de Pareto* cuando no es posible (mediante otras reasignaciones) hacer que una persona esté en mejor situación sin provocar que otra quede en peor situación.

Por tanto, la definición de Pareto identifica asignaciones específicas como "ineficientes" cuando es posible mejorarlas de forma inequívoca. Nótese que la definición no requiere hacer comparaciones de la utilidad entre personas. Las "mejoras" son definidas por los propios individuos.

Eficiencia en la producción

Una economía tendrá una producción eficiente si se encuentra en la frontera de sus posibilidades de producción. En términos formales, se utiliza la terminología de Pareto para definir la eficiencia en la producción de la manera siguiente:

DEFINICIÓN

Eficiencia productiva. Una asignación de recursos lleva a la *eficiencia en la producción* (o es "técnicamente eficiente") si ninguna otra reasignación permitiría la producción de una unidad más de un bien sin disminuir necesariamente la producción de otro bien.

Por cuanto se refiere a la eficiencia de Pareto misma, tal vez resulte más fácil entender esta definición estudiando su contrario: una asignación sería ineficiente si pudiéramos mover los recursos existentes un poco y así obtener una cantidad adicional de un bien, sin que menguara lo demás. Cuando las asignaciones son tecnológicamente eficientes estas mejoras inequívocas no son posibles. El intercambio entre productos que requieren los movimientos a lo largo de la frontera de posibilidades de producción refleja la eficiencia tecnológica de todas las asignaciones a lo largo de la frontera.

La eficiencia tecnológica es una condición evidentemente necesaria para la eficiencia global en el sentido de Pareto. Supongamos que los recursos estuvieran asignados de modo que la producción no fuera eficiente; es decir, la producción estaría ocurriendo en un punto por debajo de la frontera de posibilidades de producción. Así, sería posible producir más cantidad, cuando menos, de un bien sin que se redujera nada más. Esta mayor producción podría ir a parar a manos de alguien afortunado, haciendo que esta persona quedara en mejor situación (pero sin que nadie quedara en peor situación). Por tanto, la ineficiencia en la producción también es una ineficiencia en el sentido de Pareto. Sin embargo, como se verá en la siguiente sección, la eficiencia tecnológica no garantiza la eficiencia de Pareto. Una economía puede ser eficiente en la producción de bienes inadecuados; por ejemplo, dedicar todos los recursos disponibles a fabricar zapatos para el pie izquierdo representaría un empleo tecnológicamente eficiente de esos recursos, pero sin duda podríamos encontrar una mejora, en el sentido de Pareto, que colocara a todo el mundo en una mejor situación.

La explicación de la eficiencia en la producción y su relación con la frontera de posibilidades de producción es algo más compleja de lo que implicaría nuestra sencilla presentación antes, en este mismo capítulo. Dado que la producción está dividida entre muchas empresas, debemos tomar en cuenta no sólo las formas en que una sola empresa emplea sus recursos (esencialmente como lo hicimos antes), sino también la forma en que estos recursos son asignados a las empresas. Para facilitar este análisis, se dividirá el asunto en tres puntos separados: 1) asignación de recursos con una sola empresa; 2) asignación de recursos productivos entre muchas empresas, y 3) coordinación de las decisiones de producción de las empresas. Para que la producción ocurra en la frontera de posibilidades de producción se deben resolver todos estos problemas de la asignación.

Elección eficiente de los factores para una sola empresa

En la figura 12.2 analizamos el caso de una empresa que tenía cantidades fijas de los factores capital y trabajo. Ahí, se demostró que la empresa habrá asignado estos factores en forma eficiente si los emplea plenamente y si la tasa técnica de sustitución (*TTS*) entre el capital y el trabajo es igual para todos los productos que produce la empresa. Antes, se desarrolló una comprobación detallada gráfica de esta afirmación y ahora se empleará un planteamiento matemático. Supongamos que la empresa produce dos bienes, x y y, y que los totales de los factores capital y trabajo están dados por k y l. La función de producción del bien x está determinada por

$$x = f(k_x, l_x), \tag{12.43}$$

donde k_x y l_x son el capital y el trabajo destinados a la producción de x. Si suponemos su pleno empleo, $k_y = \bar{k} - k_x$, $l_y = \bar{l} - l_x$, y la función de producción del bien y es

$$y = g(k_y, l_y) = g(\bar{k} - k_x, \bar{l} - l_x). \tag{12.44}$$

La eficiencia tecnológica requiere que la producción de x sea tan grande como es posible para un valor predeterminado cualquiera de la producción de y (por decir, $\bar{y}$). Si planteamos la expresión lagrangiana para este problema de máximo limitado se obtendrá

$$\mathscr{L} = f(k_x, l_x) + \lambda[\bar{y} - g(\bar{k} - k_x, \bar{l} - l_x)]. \quad \textbf{(12.45)}$$

La diferenciación con respecto a k_x, l_x y λ dará las siguientes condiciones de primer orden para un máximo limitado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_x} &= f_k + \lambda g_k = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial l_x} &= f_l + \lambda g_l = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= \bar{y} - g(\bar{k} - k_x, \bar{l} - l_x) = 0. \end{aligned} \quad \textbf{(12.46)}$$

Si se pasan los términos de λ al lado derecho de las primeras dos ecuaciones, se obtendrá

$$\frac{f_k}{f_l} = \frac{g_k}{g_l}, \quad \textbf{(12.47)}$$

y, empleando el resultado (del capítulo 7) donde *TTS* es la razón de las productividades marginales de los factores, esto implicaría[16]

$$TTS_x\ (k \text{ por } l) = TTS_y\ (k \text{ por } l). \quad \textbf{(12.48)}$$

Este resultado es precisamente el que se mostró gráficamente en la figura 12.2.

Asignación eficiente de recursos entre las empresas

Los recursos también deben ser asignados de forma eficiente entre las empresas para poder garantizar la eficiencia productiva global. La intuición nos dice que los recursos deberían ser asignados a aquellas empresas donde su uso será el más eficiente. En concreto, la condición para una asignación eficiente es que el producto marginal de un recurso cualquiera para la producción de un bien específico sea la misma independientemente de cuál sea la empresa que produce dicho bien.

La comprobación matemática de esta regla es muy sencilla. Supóngase que tenemos dos empresas que producen el mismo bien (x) y que sus funciones de producción están determinadas por $f_1(k_1, l_1)$ y $f_2(k_2, l_2)$. Supóngase también que las ofertas totales de capital y de trabajo están determinadas por $\bar{k}$ y $\bar{l}$. Por consiguiente, el problema de asignación será maximizar

$$x = f_1(k_1, l_1) + f_2(k_2, l_2), \quad \textbf{(12.49)}$$

sujeto a las limitaciones

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= \bar{k} \\ l_1 + l_2 &= \bar{l}. \end{aligned} \quad \textbf{(12.50)}$$

Al sustituir las limitaciones en la ecuación (12.49), el problema de la maximización será

$$x = f_1(k_1, l_1) + f_2(\bar{k} - k_1, \bar{l} - l_1). \quad \textbf{(12.51)}$$

[16]Estos resultados tan sólo son válidos para el máximo interior donde los dos factores son empleados, de hecho, para producir los dos bienes. Si no fuera así, sería necesario modificar las condiciones de primer orden.

Las condiciones de primer orden para un máximo son

$$\frac{\partial x}{\partial k_1} = \frac{\partial f_1}{\partial k_1} + \frac{\partial f_2}{\partial k_1} = \frac{\partial f_1}{\partial k_1} - \frac{\partial f_2}{\partial k_2} = 0$$
$$\frac{\partial x}{\partial l_1} = \frac{\partial f_1}{\partial l_1} + \frac{\partial f_2}{\partial l_1} = \frac{\partial f_1}{\partial l_1} - \frac{\partial f_2}{\partial l_2} = 0 \qquad (12.52)$$

o

$$\frac{\partial f_1}{\partial k_1} = \frac{\partial f_2}{\partial k_2}$$

y

$$\frac{\partial f_1}{\partial l_1} = \frac{\partial f_2}{\partial l_2}, \qquad (12.53)$$

como se quería demostrar.

EJEMPLO 12.4

Ganancias derivadas de asignaciones eficientes del trabajo

Para poder analizar las ganancias cuantitativas de la producción derivadas de una asignación eficiente de los recursos, supongamos que dos sembradíos empleados para producir arroz tienen funciones de producción con la sencilla forma

$$q = k^{1/4}\, l^{3/4}, \qquad (12.54)$$

pero que uno de los sembradíos está más mecanizado que el otro. Si el capital del primer sembradío está determinado por $k_1 = 16$ y el del segundo por $k_2 = 625$, se obtendrá

$$q_1 = 2l_1^{3/4}$$
$$q_2 = 5l_2^{3/4}. \qquad (12.55)$$

Si la oferta total de trabajo es 100, una asignación del trabajo dividida en partes iguales entre estos dos sembradíos permitirá obtener una producción total de arroz de

$$Q = q_1 + q_2 = 2(50)^{3/4} + 5(50)^{3/4} = 131.6. \qquad (12.56)$$

Calculamos la asignación eficiente al igualar las productividades marginales:

$$\frac{\partial q_1}{\partial l_1} = \left(\frac{3}{2}\right) l_1^{-1/4} = \frac{\partial q_2}{\partial l_2} = \frac{15}{4} l_2^{-1/4}. \qquad (12.57)$$

Por tanto, para lograr la producción eficiente, se debe asignar el trabajo de modo que

$$l_1 = \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} l_2 = 0.0256 l_2. \qquad (12.58)$$

Dada la mayor capitalización del segundo sembradío, se le debería asignar prácticamente todo el trabajo disponible. Con 100 unidades de trabajo, se debería asignar 97.4 unidades al segundo sembradío y tan sólo 2.6 unidades al primer sembradío. En este caso, la producción total ascenderá a

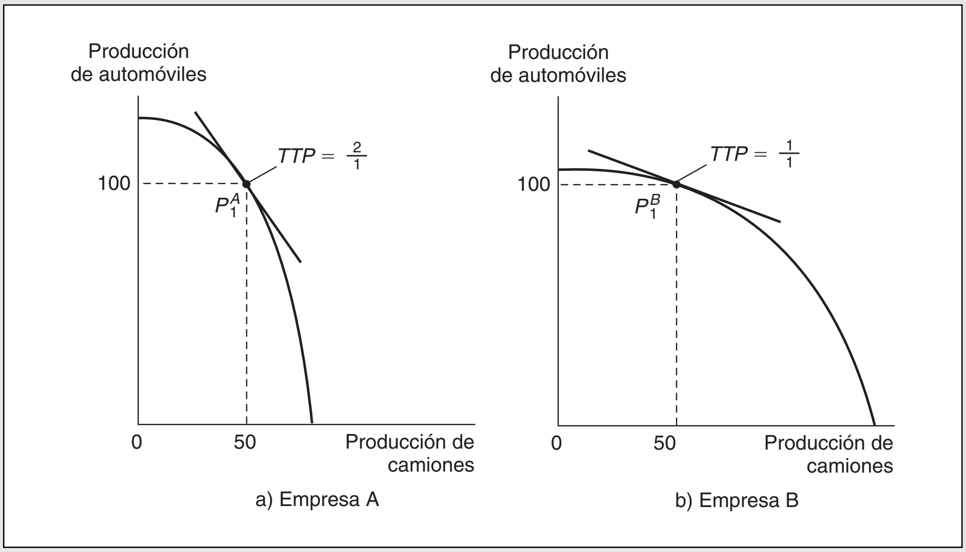
$$Q = q_1 + q_2 = 2(2.6)^{3/4} + 5(97.4)^{3/4} = 159.1. \qquad (12.59)$$

Esto significa que la producción de arroz habrá ganado más del 20% en comparación con la producción que se obtendría con una asignación del trabajo a partes iguales.

Pregunta: Suponga que el capital no estuviera dado en este problema. ¿Cómo se debería asignar el capital *y* el trabajo entre los dos sembradíos?

FIGURA 12.8 **Demostración gráfica de la elección de una producción eficiente**

Si las tasas de transformación del producto de dos empresas son distintas, podemos aumentar la producción total haciendo que las empresas cambien su producción hasta que las tasas sean iguales. En la figura 12.8, la empresa A es relativamente eficiente en la producción de automóviles y la empresa B es relativamente eficiente en la producción de camiones. Si cada empresa se especializara en el producto que fabrica con eficiencia, entonces sería posible aumentar la producción total.



Elección de producción eficiente tomada por las empresas

Los recursos pueden estar asignados con eficiencia dentro de una empresa y entre las empresas, pero deben cumplir una condición más para que su producción sea eficiente: las empresas deben producir combinaciones eficientes de productos. En términos generales, las empresas que son buenas para producir hamburguesas deberían producir hamburguesas y las que son buenas para producir automóviles deberían producir automóviles.

La formulación matemática de la condición necesaria para llegar a este resultado es muy sencilla. Supóngase que hay dos productos (x y y) que hay dos empresas que producen cada uno de ellos y que las fronteras de posibilidades de producción de estas empresas están determinadas en forma explícita por las fórmulas

$$y_i = f_i(x_i) \qquad \text{por } i = 1,2. \tag{12.60}$$

Por tanto, el problema de optimización global radica en producir la cantidad máxima de x para un valor dado de y (por ejemplo, y^*). Si definimos el lagrangiano de este problema como

$$\mathscr{L} = x_1 + x_2 + \lambda[y^* - f_1(x_1) - f_2(x_2)] \tag{12.61}$$

Tendremos la sencilla condición de primer orden:

$$\partial f_1/\partial x_1 = \partial f_2/\partial x_2. \tag{12.62}$$

Dicho con palabras, la tasa de transformación del producto debe ser igual para todas las empresas que producen estos dos bienes.

La figura 12.8 muestra este resultado gráficamente. En ella, dos empresas han optado por combinaciones de productos sobre sus respectivas curvas de posibilidades de producción con las *TTP* desiguales. Dado que la *TTP* de la empresa A es 2, ésta podría aumentar la producción de automóviles en 2 (a 102) reduciendo la producción de camiones en 1 (a 99). La empresa B podría expandir la producción de camiones a 51 reduciendo la producción de automóviles a 99. Por tanto, la producción total de automóviles habrá aumentado de 200 a 201, mientras que la producción de camiones ha permanecido igual en 100. Estas ganancias en la producción siempre serán posibles cuando las *TTP* de las empresas son distintas.

Teoría de la ventaja comparativa

Una de las aplicaciones más importantes de esta conclusión ocurre en el estudio del comercio internacional, en el cual se emplea como punto de partida la *teoría de la ventaja comparativa*. Ricardo fue el primero en plantear esta teoría y argumentaba que los países se deberían especializar en producir aquellos bienes donde son productores relativamente más eficientes.[17] Decía que, a continuación, los países deberían comerciar con el resto del mundo para obtener las mercancías que necesitaran. Si los países se especializaran de esta manera, entonces la producción mundial total sería mayor que si cada país tratara de producir un conjunto de bienes equilibrado. Para demostrar este hecho, volvamos de nueva cuenta a la figura 12.8. Ahora consideraremos que estas dos curvas de posibilidades de producción representan las de dos países distintos con recursos fijos. Los puntos P_1^A y P_1^B pueden representar las producciones que eligen los países antes de comerciar. Dado que la *TTP* de estos dos países es distinta, podríamos aumentar la producción mundial si hacemos que el país A produzca más automóviles y que el país B produzca más camiones. Los países seguirían especializándose así hasta que sus *TTP* fueran iguales. Si el país A se especializara en la producción de automóviles, podría comerciar con el país B para obtener los camiones que necesitara; por el contrario, B podría comerciar con A para obtener los automóviles que necesitara. Dado que la producción mundial habrá aumentado gracias a la especialización, los dos países ahora estarán en una mejor situación. Ésta es la lógica que sustenta intelectualmente la idea de que "el libre comercio es la mejor política". Es importante señalar que el análisis sólo emplea información sobre las tasas de transformación del producto entre los dos bienes de cada país y no sobre las diferencias de la productividad marginal entre los países. Un país podría tener una ventaja "absoluta" en la producción de todos los bienes (en el sentido de que la productividad marginal de su trabajo en la producción de *todos* los bienes es mayor que la productividad de su socio comercial), pero este país se seguiría beneficiando de la especialización y el comercio.

Eficiencia en la combinación de productos

La eficiencia tecnológica no es condición suficiente para lograr la eficiencia de Pareto. La demanda también debe formar parte de esta historia. No tiene mucho sentido que una economía sea eficiente en la producción de yoyos y xilófonos si nadie quiere estos bienes. Para garantizar la eficiencia de Pareto, es necesaria una forma que permita vincular las preferencias de los individuos con las posibilidades de producción. La condición necesaria para garantizar que se produzcan los bienes indicados es que la *tasa marginal de sustitución* de dos bienes cualesquier debe ser *igual* a la *tasa de transformación del producto* de estos dos bienes. Dicho de forma sencilla, la tasa subjetiva del intercambio entre los dos bienes, dadas las preferencias de la gente, debe ser igual a la tasa a la que se pueden intercambiar en la producción.

Una demostración gráfica

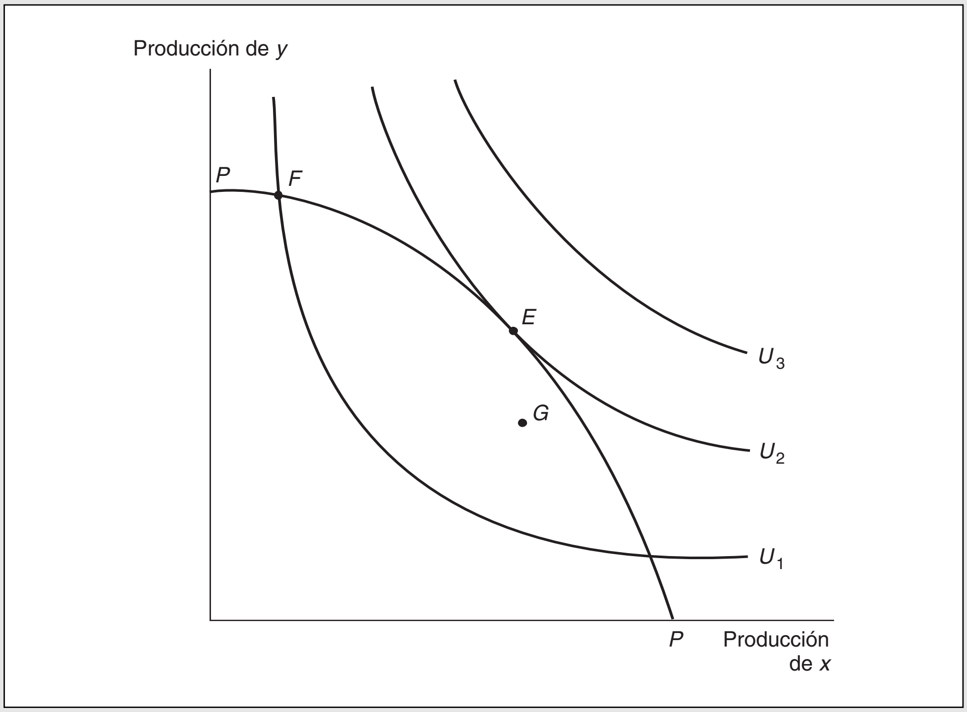
La figura 12.9 ilustra la eficiencia en la combinación de productos en un caso muy sencillo: una economía con una sola persona. Supone que la única persona de esta economía (¿Robinson Crusoe?) sólo produce dos bienes (x y y). (También podemos aplicar este análisis a una economía de muchos individuos con preferencias idénticas.) Las combinaciones de x y y que se pueden producir están determinadas por la frontera de posibilidades de producción *FPP*. Un punto cualquiera sobre *FPP* representa un punto de eficiencia tecnológica. Sin embargo, si sobreponemos el mapa de indiferencia del individuo de la figura 12.9, se verá que sólo hay un punto en la *FPP* que ofrece una utilidad máxima. Este punto de máxima utilidad es E, donde la *FPP* es tangente a la curva de indiferencia más alta del individuo, U_2. En este punto de tangencia, la *TMgS* del individuo (de x por y) es igual a la *TTP* (de x por y); por tanto, ésta es la condición necesaria para obtener la eficiencia global. Nótese que el punto E es preferido a cualquier otro punto de eficiencia en la producción. De hecho, en el caso de cualquier otro punto en la curva *FPP* (que no sea E), por ejemplo F, existen puntos que son ineficientes pero preferidos a F. En la figura 12.9, el punto "ineficiente" G es preferido al punto "eficiente" F. Desde el punto de vista del individuo sería preferible producir de forma ineficiente, en lugar de verse obligado a producir con eficiencia una combinación "equivocada" de bienes. El punto E (que es producido de forma eficiente) es superior a cualquier otra de estas soluciones de "segunda opción".

---

[17]Véase D. Ricardo. *The Principles of Political Economy and Taxation* (1817); reimpresión de J. M. Dent and Son, Londres, 1965, pp. 81-93.

FIGURA 12.9 **Eficiencia de la combinación de productos en la economía de Robinson Crusoe**

En una economía con una sola persona, la curva *FPP* representa las combinaciones de x y y que puede producir. Cada punto sobre la curva *FPP* es eficiente desde el punto de vista de la producción. Sin embargo, sólo la combinación de productos del punto E es un auténtico máximo de la utilidad para el individuo. En E la *TMgS* del individuo es igual a la tasa a la que, tecnológicamente, puede intercambiar x por y (*TTP*).



Una demostración matemática

Para demostrar este resultado matemáticamente, supongamos que sólo hay dos bienes (x y y) y un individuo en la sociedad (de nuevo, Robinson Crusoe) cuya función de utilidad está determinada por $U(x, y)$. Supongamos también que podemos expresar la frontera de posibilidades de producción de esta sociedad de forma implícita como $T(x, y) = 0$. El problema de Robinson consiste en maximizar su utilidad sujeto a su restricción productiva. Si escribimos el lagrangiano de este problema se obtendrá

$$\mathscr{L} = U(x, y) + \lambda[T(x, y)], \tag{12.63}$$

y las condiciones de primer orden para un máximo interior son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= T(x, y) = 0. \end{aligned} \tag{12.64}$$

Al combinar las dos primeras ecuaciones se obtendrá

$$\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} = \frac{\partial T/\partial x}{\partial T/\partial y} \tag{12.65}$$

o

$$TMgS\ (x \text{ por } y) = -\frac{dy}{dx}\ (\text{a lo largo de } T) = TTP\ (x \text{ por } y), \quad (12.66)$$

como ilustra la figura 12.9. Se ha demostrado que sólo si tomamos en cuenta las preferencias de los individuos podremos asignar los recursos de forma eficiente en el sentido de Pareto. Sin esta referencia explícita a las preferencias, al reasignar la producción, podríamos aumentar la utilidad de una persona, cuando menos, sin reducir la de ninguna otra persona.

Precios competitivos y eficiencia: el Primer Teorema de la Economía del Bienestar

Es muy fácil resumir la esencia de la relación entre la competencia perfecta y la asignación eficiente de recursos. Para alcanzar la asignación eficiente de recursos en el sentido de Pareto es necesario que (salvo cuando se presentan soluciones de esquina) la tasa de intercambio entre dos bienes, por decir, x y y, sea igual para todos los agentes económicos. En una economía en competencia perfecta, la relación del precio de x con el de y da por resultado esta tasa común de intercambio a la que se ceñirán todos los agentes. Dado que los precios son considerados parámetros fijos en las decisiones de los individuos que maximizan su utilidad y también en las decisiones de las empresas que maximizan sus utilidades, todas las tasas de intercambio entre x y y serán iguales a la tasa de intercambio de x y y en el mercado (P_x/P_y). Dado que todos los agentes afrontan los mismos precios, todas las tasas de intercambio se igualarán y se alcanzará una asignación eficiente. Éste es el "Primer Teorema de la Economía del Bienestar".

Eficiencia en la producción

Para demostrar que la determinación de precios en competencia lleva a la eficiencia en la producción, primero consideremos el requisito que impone que una empresa debe tener tasas idénticas para intercambiar un factor por otro (la tasa técnica de sustitución, *TTS*) en el caso de todos los productos que fabrica. La existencia de mercados de factores en competencia perfecta garantiza lo anterior. La empresa, al minimizar los costos, igualará la *TTP* de dos factores cualesquier (por ejemplo, el trabajo y el capital) a la relación de sus precios competitivos (w/v). Así, sin dirección externa alguna, la empresa tendrá que adoptar proporciones eficientes de factores de forma descentralizada.

Esto también exige que todas las empresas que fabrican un bien, dado, por ejemplo, x, tengan productividades marginales del trabajo idénticas en la producción de x. En el capítulo 9 se demostró que una empresa que maximiza sus utilidades contratará unidades adicionales de un factor cualquiera (por ejemplo, el trabajo) hasta el punto en que su contribución marginal a los ingresos fuera igual al costo marginal de contratar el factor. Si p_x representa el precio del bien que venden las empresas y f^1 y f^2 representan las funciones de producción de dos empresas que fabrican x, para maximizar las utilidades es necesario que

$$p_x f_l^1 = w$$

y

$$p_x f_l^2 = w. \quad (12.67)$$

Dado que el precio de x es el mismo para las dos empresas y que el salario competitivo también, estas ecuaciones implican que

$$f_l^1 = f_l^2. \quad (12.68)$$

Por consiguiente, cada empresa tendrá la misma productividad marginal del trabajo en la producción de x. El mercado habrá logrado asignar con eficiencia cada uno de los factores entre las empresas.

Por último, el requisito dice que la tasa de transformación del producto (*TTP*, la tasa a la que un bien puede ser intercambiado por otro en la producción) entre dos bienes cualesquier debe ser la misma para todas las empresas. Es fácil demostrar que un sistema de precios perfectamente competitivos puede garantizar lo anterior si recordamos que la *TTP* (de x por y) es igual a la tasa del costo marginal de x (CMg_x) respecto al de y (CMg_y). Pero cada empresa que maximiza sus utilidades producirá el nivel de producción en el cual el costo marginal sea igual al precio de mercado. Por tanto $p_x = CMg_x$ y $p_y = CMg_y$ para cada empresa y, por ello $CMg_x/CMg_y = p_x/p_y$ para todas las empresas.

Este análisis demuestra que las decisiones descentralizadas de muchas empresas que maximizan sus utilidades pueden lograr la eficiencia tecnológica en la producción sin dirección centralizada alguna. Los precios competitivos de mercado actúan como señales que permiten unificar las múltiples decisiones que toman las empresas para convertirlas en un patrón coherente y eficiente. Confiar en el interés propio de los emprendedores es una forma teóricamente plausible de lograr que el sector productivo actúe con eficiencia.

Eficiencia en la combinación de productos

Demostrar que los mercados en competencia perfecta llevan a la eficiencia de la relación entre producción y preferencias también es muy fácil. Dado que las tasas de precios que se presentan a los consumidores son las mismas que el mercado presenta a las empresas, la *TMgS* compartida por todos los individuos será idéntica a la *TTP* compartida por todas las empresas. Esto será cierto en el caso de cualquier par de bienes. Por consiguiente, las empresas producirán una combinación eficiente de bienes. De nueva cuenta, observe las dos funciones importantes que desempeñan los precios de mercado. En primer término, garantizan que la oferta y la demanda se igualen para todos los bienes. Si se produjera demasiado de un bien, se desencadenaría una reacción del mercado (su precio disminuiría) que reduciría la producción del bien y desplazaría recursos a otros fines. Por tanto, el equilibrio entre oferta y demanda en el mercado garantiza que no habrá exceso de demanda ni exceso de oferta. En segundo término, los precios de equilibrio proporcionan las tasas de intercambio del mercado de modo que las empresas y los individuos las usen como parámetros para tomar sus decisiones. Dado que estas tasas de intercambio son idénticas para las empresas y los individuos, la eficiencia queda garantizada.

Una demostración gráfica

El análisis del modelo del equilibrio general que hicimos antes, en este mismo capítulo, proporciona precisamente los instrumentos necesarios para demostrar este resultado gráficamente. La figura 12.10 repite la figura 12.4, pero ahora nos interesan más las propiedades de eficiencia de la solución de equilibrio general. Dada la frontera de posibilidades de producción *FPP* y las preferencias representadas por las curvas de indiferencia, es evidente que x^*, y^* representa la cesta de productos eficiente (compare esta figura con la 12.9). Tal vez una economía planificada centralmente pudiera decidir que producirá x^*, y^* si el comité de planeación contara con información adecuada sobre las posibilidades de producción y las preferencias de los individuos. Por otra parte, confiar en los mercados en competencia y en el interés propio de las empresas y de los individuos también llevará a esta asignación. En este modelo, la oferta y la demanda sólo se encontrarán en equilibrio con una razón de precios p_x^*/p_y^* y este equilibrio se producirá en la cesta eficiente de productos, *E*. La mano invisible de Smith no sólo garantiza que la producción sea tecnológicamente eficiente (que las combinaciones de productos estén sobre la frontera de posibilidades de producción), sino también que las fuerzas de la oferta y la demanda lleven a una combinación eficiente de productos, en el sentido de Pareto. Los modelos más complejos de la determinación de precios de equilibrio en competencia llegan básicamente a la misma conclusión.[18]

Políticas del *laissez-faire*

En su expresión más dogmática, la correspondencia entre el equilibrio en competencia y la eficiencia de Pareto ofrece un sustento “científico” para la postura del *laissez-faire* que han adoptado muchos economistas. Por ejemplo, la afirmación de Smith que dice

> el esfuerzo natural de todo individuo por mejorar su propia condición, cuando se ve obligado a ejercerlo con libertad y seguridad, es un principio tan poderoso que por sí mismo, y sin ayuda alguna, es capaz no sólo de fomentar la riqueza y la prosperidad de la sociedad, sino también de superar los cientos de obstáculos impertinentes que, con demasiada frecuencia, la insensatez de las leyes humanas dificultan sus operaciones.[19]

[18] Véase, por ejemplo, K. J. Arrow y F. H. Hahn. *General Competitive Analysis*, Holden Day, San Francisco, 1971, caps. 4 y 5.

[19] A. Smith. *The Wealth of Nations*, Random House, Modern Library Edition, Nueva York, 1937, p. 508.

EJEMPLO 12.5

Eficiencia e ineficiencia

Podemos demostrar la eficiencia de los precios en competencia recurriendo a los modelos simples del equilibrio general del ejemplo 12.2. Cada una de las asignaciones de ese ejemplo son eficientes dadas las preferencias y la tecnología productiva subyacentes. Es decir, en cada uno de los casos la utilidad es lo mayor posible dada la frontera de posibilidades de producción.

La asignación del caso básico ($x^* = y^* = \sqrt{50}$) es tecnológicamente viable en los otros dos casos ilustrados en el ejemplo 12.2, pero no representa el mejor empleo de los recursos. En la situación en la que hay progreso tecnológico en la producción del bien x, la asignación del caso básico ahora está dentro de la frontera de posibilidades de producción. La asignación ($x^* = y^* = 10$) es claramente superior, en el sentido de Pareto, al caso básico. Otra forma de plantear lo anterior es que si mantenemos y^* constante e igual a $\sqrt{50}$, podremos producir $x^* = 2\sqrt{50}$ una vez que hayamos tomado en cuenta el progreso tecnológico del bien x. Si se opta por esta asignación en el caso base dejaríamos pasar una cantidad sustancial de la producción de x (por supuesto que sólo $x^* = y^* = 10$ es verdaderamente eficiente dada la nueva tecnología).

La asignación del caso base también sería ineficiente cuando las preferencias se desplazan hacia el bien y. Con la nueva función de utilidad, el caso base sería

$$U(x, y) = x^{0.1}y^{0.9} = (50)^{0.05}(50)^{0.45} = (50)^{0.5} = 7.07. \tag{12.69}$$

Por otra parte, la asignación óptima $[x^* = (10)^{0.5}, y^* = 3(10)^{0.5}]$ produce una utilidad de

$$U(x, y) = x^{0.1}y^{0.9} = (10)^{0.05}(3)^{0.9}(10)^{0.45} = (3)^{0.9}(10)^{0.5} = 8.50. \tag{12.70}$$

Queda claro que la eficiencia requiere que las preferencias y la tecnología estén debidamente ligadas.

El peso excesivo de un impuesto, otra vez. Como ejemplo de la forma en que se puede utilizar el análisis del equilibrio general para mostrar los mismos tipos de efectos en el bienestar que vimos en el capítulo 11, volvamos a considerar el modelo de los impuestos. Supongamos que el gobierno no está contento con el escenario de nuestro caso base porque piensa que la gente no debería consumir una cantidad tan grande del bien x. Para atacar esta situación, el gobierno impone un impuesto del 200% sobre el bien x, pero mantiene el poder adquisitivo rebajando el producto de los impuestos para los consumidores en un pago único. Para presentar el modelo de este impuesto, dejemos que p_x/p_y sea la proporción de precios sin el impuesto, o sea la proporción que ven las empresas. Por otra parte, los consumidores ven una proporción de precios de $3p_x/p_y$; es decir, deben pagar a la empresa p_x y al gobierno $2p_x$ siempre que adquieran una unidad del bien x. Ahora el equilibrio está descrito por

$$\text{(oferta) } p_x/p_y = x/y \text{ y (demanda) } 3p_x/p_y = y/x. \tag{12.71}$$

Por tanto, $x/y = y/3x$ o $y^2 = 3x^2$. Si se sustituye esto en la frontera de posibilidades de producción tendremos el equilibrio siguiente después de impuestos:

$$x^* = 5,\ y^* = 5\sqrt{3},\ p_x/p_y = 1/\sqrt{3} = 0.58. \tag{12.72}$$

La utilidad después de impuestos en esta situación es

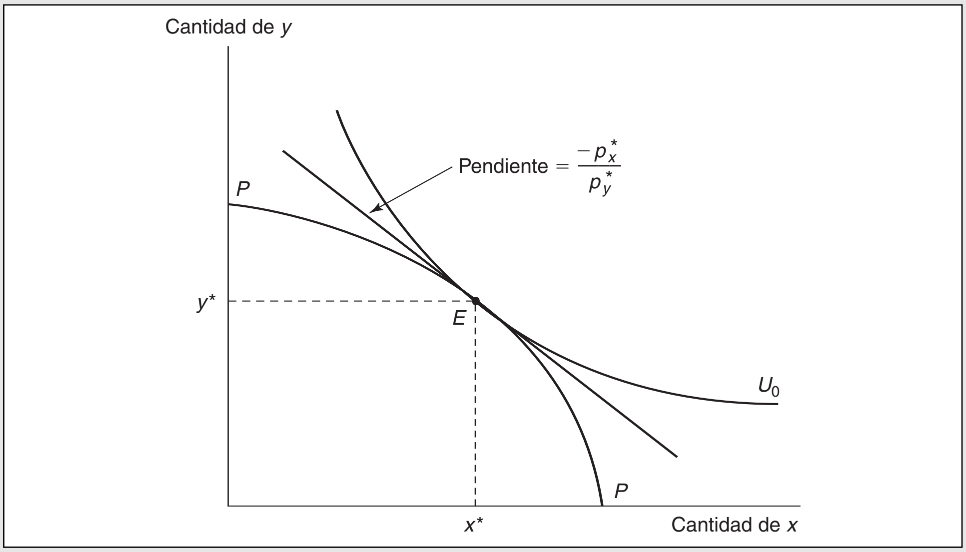
$$U(x, y) = x^{0.5}\ y^{0.5} = 5(3)^{0.25} = 6.58. \tag{12.73}$$

La reducción de la utilidad, de 7.07 a 6.58, mide el exceso de la carga de este impuesto. En este caso, dado que el impuesto es descontado a los consumidores, no existe otra carga de este impuesto. La pérdida de bienestar se presenta exclusivamente porque el impuesto desincentiva el consumo de x porque crea una brecha entre la cantidad que los consumidores pagan por el bien y la que los productores reciben por él.

Pregunta: Explique los distintos componentes de la restricción presupuestaria del consumidor en el ejemplo del impuesto que hemos estudiado.

FIGURA 12.10 **Equilibrio competitivo y eficiencia en la mezcla de productos**

Si bien todas las combinaciones de productos en la *FPP* son técnicamente eficientes, sólo la combinación x^*, y^* es un óptimo de Pareto. La proporción de los precios de equilibrio en competencia p_x^*/p_y^* llevará a esta economía a esta solución eficiente en el sentido de Pareto.



tiene una gran validez teórica. De nuevo, como señalaba Smith, no es el "espíritu altruista" del panadero el que aporta pan para el consumo de los individuos. Por el contrario, los panaderos (y los demás productores) trabajan para su propio provecho cuando reaccionan a las señales del mercado. Los individuos también reaccionan a estas señales cuando deciden cómo van a asignar sus ingresos. La intervención del gobierno en este proceso, el cual funciona sin problema alguno, sólo puede dar lugar a una pérdida de eficiencia en el sentido de Pareto.

Por supuesto que esta conclusión tan arrolladora exagera mucho la posibilidad general de aplicar el modelo simple que hemos venido usando. Nadie debería tratar de plantear recomendaciones de políticas con base en una estructura teórica que presta escasa atención a los detalles institucionales del mundo real. No obstante, las propiedades de eficiencia del sistema de competencia sí ofrecen un punto de referencia, un punto de partida para estudiar las razones que explican por qué los mercados en competencia podrían fallar.

Abandonar los supuestos de competencia

Los factores que pueden distorsionar la capacidad que tienen los mercados competitivos para lograr la eficiencia se suelen clasificar en cuatro grupos generales que incluyen los casos más interesantes: 1) la competencia imperfecta, 2) las externalidades, 3) los bienes públicos y 4) la información imperfecta. Aquí se presentará un breve resumen de estas clasificaciones y volveremos a ellas en capítulos posteriores.

Competencia imperfecta

La "competencia imperfecta" incluye todas aquellas situaciones en las cuales los agentes económicos ejercen cierto poder de mercado a la hora de determinar los precios. En este caso, como se verá en la parte 5, estos agentes tomarán en cuenta estos efectos en sus decisiones. Por ejemplo, una empresa cuyo producto tiene una curva de demanda con pendiente negativa, sabrá que el ingreso marginal de la venta de una unidad adicional es inferior al precio de mercado de dicha unidad. Dado que el rendimiento marginal de sus decisiones es lo que motiva a la empresa que maximiza sus utilidades, el ingreso marginal, y no el precio de mercado, es la magnitud importante. Los precios de mercado ya no tienen el contenido informativo necesario para lograr la eficiencia de Pareto. Los demás casos de poder de mercado dan por resultado deficiencias similares en la información.

Externalidades

El sistema de precios en competencia también puede fracasar a la hora de asignar los recursos de manera eficiente cuando hay relaciones entre empresas e individuos que no quedan correctamente reflejadas en los precios de mercado. El ejemplo más conocido de este caso podría ser el de una empresa que contamina el aire con humo y otros desechos industriales. Esta situación se conoce como una *externalidad*; es decir, una relación entre el nivel de producción de la empresa y el bienestar de los individuos que no queda reflejada en el sistema de precios. En el capítulo 20 se presentará un análisis más completo de la naturaleza de las externalidades, pero aquí se describirá por qué la existencia de estas relaciones ajenas al mercado interfiere con la capacidad del sistema de precios para asignar los recursos de manera eficiente. Con externalidades, los precios de mercado dejan de reflejar todos los costos de producción de un bien. Existe una divergencia entre el costo marginal *privado* y el costo marginal *social* y estos costos (o tal vez ganancias) sociales adicionales no se verán reflejados en los precios de mercado. Por tanto, los precios de mercado no incluirán la información sobre los verdaderos costos que se necesitan para establecer una asignación eficiente de los recursos. Como se verá en el capítulo 20, la mayor parte del estudio de la economía ambiental se ocupa de las posibles formas de mejorar los efectos de estas discrepancias.

Bienes públicos

El caso de los bienes "públicos" presenta un problema análogo para determinar los precios. Estos bienes, como los del ejército (generalmente), tienen dos propiedades que hacen que no sean adecuados para su producción en los mercados. La primera es que *no son rivales,* en el sentido que una cantidad adicional de individuos puede disfrutar de sus beneficios sin costo alguno. Esta propiedad sugiere que el precio "adecuado" de estos bienes sería cero, lo cual, evidentemente, constituye un problema para poder producirlos en forma rentable. La segunda característica de muchos bienes públicos es que *no son excluyentes*; es decir, es imposible impedir que una cantidad extra de individuos consuma el bien. Por tanto, en un contexto de mercado, la mayoría de los consumidores adoptará una postura de "parásito" (o "*free-rider*"); es decir, ellos esperarán a que "otro" pague. Estas dos características técnicas de los bienes públicos plantean importantes problemas en las economías de mercado. En el capítulo 20 se analizarán estos problemas.

Información imperfecta

Nuestro planteamiento de la eficiencia de la determinación de los precios en competencia perfecta ha supuesto, implícitamente, que los oferentes y los demandantes conocen los precios de equilibrio que rigen las transacciones. Si los actores económicos no están seguros de los precios o si los mercados no llegan al equilibrio, no hay motivo alguno para esperar que se conserve la propiedad de la eficiencia para la determinación de precios competitivos. Por supuesto que la información imperfecta puede afectar los resultados del mercado de muchas maneras. Así, habiendo admitido que la información podría ser imperfecta, es importante construir modelos de la forma en que los oferentes y los demandantes obtienen y emplean la información. Analizar aquí estas cuestiones nos alejaría enormemente de nuestras metas centrales. Sin embargo, en el capítulo 19 volveremos al tema de la información imperfecta cuando se aborde con más detalle este campo de la investigación económica que está creciendo a gran velocidad.

Estos cuatro obstáculos para la eficiencia sugieren que debemos ser muy cautelosos al aplicar el Primer Teorema de la Economía del Bienestar a la hora de seleccionar políticas reales. Como se verá en capítulos posteriores, puede haber muy buenos motivos para interferir en los resultados de los mercados con fundamento en la eficiencia. Por supuesto que también hay muchos motivos equivocados para interferir en los mercados; sin lugar a dudas existen situaciones en que deberíamos seguir las lecciones del Primer Teorema. La función del análisis microeconómico es ofrecer una vía sistemática para lidiar con estos casos.

Así pues, por lo general, estas situaciones ofrecen tres buenas razones por las que debemos tener cuidado cuando se aplican los teoremas fundamentales de la economía del bienestar al mundo real. En el resto de este capítulo se analizarán otras razones por las cuales hay que tener cuidado.

Distribución

Si bien el Primer Teorema de la Economía del Bienestar garantiza que (en ciertas condiciones) los mercados en competencia hagan asignaciones, no existe garantía alguna de que éstos consigan hacer una distribución justa del bienestar entre los individuos. Como ha señalado A. K. Sen, una asignación de recursos puede ser eficiente en el sentido de Pareto "incluso cuando hay algunas personas que nadan en la abundancia y otras que se mueren de hambre, siempre y cuando no sea posible que los que se mueren de hambre mejoren sin reducir los placeres de los ricos. . . En pocas palabras, una sociedad puede estar en un óptimo de Pareto y, no obstante, ser absolutamente repugnante".[20] El tratamiento formal de la economía del bienestar social queda fuera del alcance de este libro, pero a continuación se analizará brevemente la naturaleza del problema de la distribución.

Una economía de intercambio

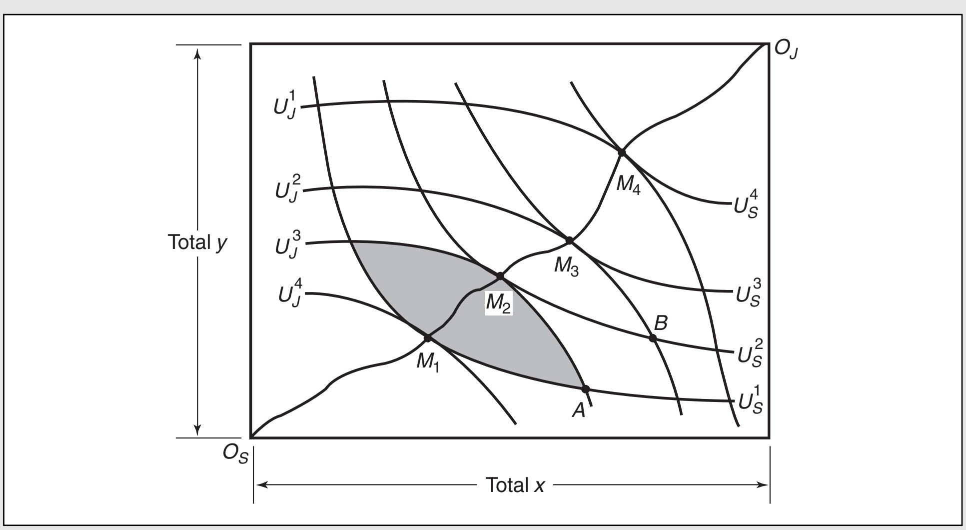
Para analizar la distribución en el marco más sencillo, supongamos que sólo hay dos personas en una sociedad, Santiago y Juan. Supongamos también que las cantidades totales de dos bienes (x y y) que serán distribuidos entre estas dos personas son fijas. Ahora podemos emplear el diagrama de la caja de Edgeworth, que se presenta antes en este mismo capítulo, para ilustrar todas las posibles asignaciones de estos bienes entre Santiago y Juan. En la figura 12.11 las dimensiones de la caja de Edgeworth están determinadas por las cantidades totales disponibles de los bienes. Las curvas de indiferencia de Santiago parten del origen O_S, y las curvas de indiferencia de Juan parten del origen O_J. Un punto cualquiera dentro de la caja representa una asignación posible de los bienes entre estas dos personas, y podemos emplear las curvas de indiferencia para evaluar la utilidad que cada persona deriva de estas asignaciones.

Transacciones mutuamente beneficiosas

Todo punto dentro de la caja de Edgeworth en el cual la *TMgS* de Santiago no sea igual a la de Juan ofrece una oportunidad de lograr una mejora en el sentido de Pareto. Considere la posible asignación A de la figura 12.11. Este punto se encuentra en el punto de intersección de la curva de indiferencia U_S^1 de Santiago y la curva de indiferencia U_J^3 de Juan. Evidentemente, las tasas marginales de sustitución (las pendientes de las curvas de indiferencia) no son iguales en A. Una asignación cualquiera en el área sombreada oval representa un intercambio mutuamente benefi-

FIGURA 12.11 **Diagrama de la caja de Edgeworth para la eficiencia de Pareto en el intercambio**

Los puntos de la curva O_S, O_J son eficientes en el sentido de que, con estas asignaciones, es imposible mejorar la situación de Santiago sin empeorar la de Juan y viceversa. Por otra parte, una asignación como la del punto A, es ineficiente porque es posible mejorar la situación de Santiago y la de Juan si deciden moverse al área sombreada. Nótese que a lo largo de O_S, O_J la *TMgS* de Santiago es igual a la de Juan. La curva O_S, O_J se denomina *curva de contrato*.



[20]A. K. Sen. *Collective Choice and Social Welfare*, Holden-Day, San Francisco, 1970, p. 22.

cioso para estas dos personas; es decir, las dos pueden pasar a un nivel más alto de utilidad si aceptan un intercambio que las lleve a esta área. Sin embargo, cuando las tasas marginales de sustitución de Santiago y de Juan son iguales, no hay posibilidad de realizar este tipo de intercambio mutuamente beneficioso. Los puntos M_1, M_2, M_3 y M_4 de la figura 12.11 indican puntos de tangencia de las curvas de indiferencia de estos individuos y todo movimiento que se aleje de estos puntos empeorará la situación, cuando menos, de uno de los dos. Un movimiento de M_2 a A, por ejemplo, disminuye la utilidad de Santiago de U_S^2 a U_S^1 a pesar de que la situación de Juan no empeore debido a este movimiento. Por otra parte, un movimiento de M_2 a B empeora la situación de Juan, pero mantiene constante el nivel de utilidad de Santiago. En consecuencia, por lo general, estos puntos de tangencia no ofrecen la promesa de nuevos intercambios mutuamente beneficiosos y, por tanto, son eficientes en el sentido de Pareto.

Curva de contrato

El conjunto de todas las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto en el diagrama de la caja de Edgeworth se conoce como *curva de contrato*. En la figura 12.11 este conjunto de puntos está representado por la curva que va de O_S a O_J e incluye los puntos de tangencia M_1, M_2, M_3 y M_4 (y otros muchos puntos de tangencia más). Los puntos fuera de la curva del contrato (como A o B) son ineficientes y es posible realizar intercambios mutuamente beneficiosos. Pero, como implica su propio nombre, la curva del contrato representa que se han agotado todas estas oportunidades de intercambio. Incluso un movimiento a lo largo de la curva del contrato (por ejemplo, de M_1 a M_2) no puede representar un intercambio mutuamente beneficioso porque siempre habrá un ganador (Santiago) y un perdedor (Juan). Podemos resumir estas observaciones de la manera siguiente:

Definición

Curva de contrato. En una economía de intercambio, todas las asignaciones eficientes de los bienes existentes se encuentran sobre una *curva de contrato* (multidimensional). Los puntos que se encuentran fuera de esa curva son necesariamente ineficientes, porque los individuos pueden mejorar inequívocamente si se desplazan hasta situarse sobre la curva. Sin embargo, a lo largo de la curva del contrato, las preferencias de los individuos son rivales en el sentido que la situación de un individuo sólo podrá mejorar si la de otro empeora.

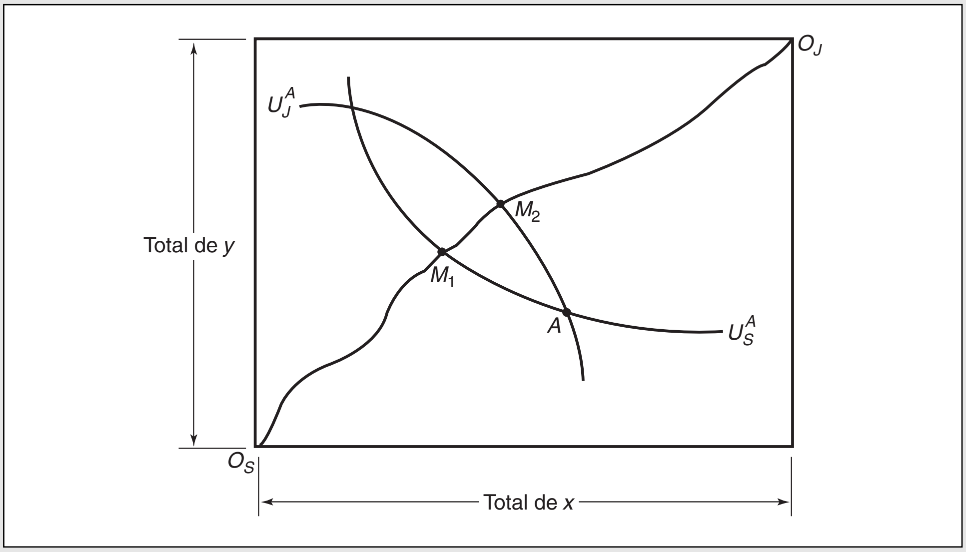
Intercambio con dotaciones iniciales

En nuestro análisis anterior supusimos que podíamos asignar las cantidades fijas de los dos bienes de toda forma concebible. El análisis sería algo distinto si los individuos que participan en el intercambio tuvieran, de partida, cantidades concretas de los bienes. En definitiva seguiría existiendo la posibilidad de que cada persona se beneficiara de un intercambio voluntario, porque es poco probable que las asignaciones iniciales fueran eficientes. Por otra parte, nadie participaría en un intercambio que hiciera que su situación fuera peor que la existente sin intercambio. Por tanto, sólo podemos considerar que una parte de la curva del contrato son asignaciones que resultarían de intercambios voluntarios.

La figura 12.12 ilustra estas ideas. El punto A de la caja de Edgeworth representa las dotaciones iniciales de Santiago y Juan. Al igual que antes, las dimensiones de la caja son iguales a las cantidades totales disponibles de los dos bienes disponibles. La línea O_S, O_J representa la curva de contrato de asignaciones eficientes. Dejemos que U_S^A sea la curva de indiferencia de Santiago, que pasa por el punto A y, por otra parte, que U_J^A sea la curva de indiferencia de Juan que pasa por el punto A. Nótese que, en el punto A, las curvas de indiferencia de los individuos no son tangentes y, por tanto, las dotaciones iniciales no son eficientes. Ni Santiago ni Juan aceptarán intercambios que den lugar, respectivamente, a un nivel de utilidad inferior a U_S^A o U_J^A. Sería preferible que cualquiera de ellos se negara al intercambio en lugar de aceptar este resultado inferior. Así pues, si nos centramos exclusivamente en las asignaciones eficientes, sólo las que se encuentran entre M_1 y M_2 sobre la curva de contrato podrían ocurrir como resultado de un libre intercambio. Al tomar en cuenta las dotaciones iniciales con las cuales los individuos entran en el intercambio hemos estrechado el intervalo de resultados eficientes de los intercambios voluntarios. Si la distribución inicial de los bienes favorece a Juan, una asignación final cualquiera también favorecerá a Juan, porque al propio Juan le interesa negarse a aceptar intercambios que le aporten menos utilidad.

FIGURA 12.12 **Intercambio con dotaciones iniciales**

Si los individuos empiezan con dotaciones iniciales (como las representadas por el punto A), ninguno de los dos estará dispuesto a aceptar una asignación que ofrezca un nivel de utilidad inferior al que ofrece el punto A. Santiago no aceptaría ninguna asignación por debajo de U_S, y Juan no aceptaría ninguna asignación por debajo de U_J^A. Por tanto, no todos los puntos de la curva del contrato son resultado de un intercambio voluntario. Únicamente las asignaciones eficientes entre M_1 y M_2 serán factibles si cada individuo está en libertad para negarse a realizar el intercambio y si exigimos que la asignación final sea eficiente.



El dilema de la distribución y el Segundo Teorema de la Economía del Bienestar

Por consiguiente, éste es el dilema de la distribución en su forma más abstracta. Si las dotaciones iniciales están sesgadas a favor de algunos agentes económicos, las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto que ofrece el sistema de precios en competencia también tenderán a favorecer a esos agentes. Las transacciones voluntarias no pueden superar diferencias importantes en las dotaciones iniciales y se necesitará alguna suerte de transferencia (probablemente un pago único) para obtener resultados más igualitarios.

Estos pensamientos nos llevan a lo que se conoce como el "Segundo Teorema de la Economía del Bienestar". En términos generales, el teorema afirma que los precios competitivos permitirán lograr, con eficiencia, una distribución deseada del bienestar entre los individuos de una economía, siempre y cuando se ajusten adecuadamente las dotaciones iniciales. Este teorema es el que permite a los economistas marcar diferencias claras entre las cuestiones de eficiencia que surgen en un problema económico concreto y las cuestiones de equidad que surgen en ese problema. En pocas palabras, los economistas con frecuencia son partidarios de utilizar las propiedades de eficiencia de los precios competitivos para "hacer el pastel tan grande como sea posible" y, a continuación, para ajustar la distribución resultante para que sea "justa" recurriendo a transferencias por una cantidad única. Por desgracia, muchas veces es más fácil decir que se deben aplicar las transferencias de una cantidad que hacerlo; es decir, prácticamente todos los sistemas de impuestos/transferencias entrañan costos para la eficiencia real. Por tanto, el Primer y el Segundo Teorema de la Economía del Bienestar no son una panacea que sirve para todas las cuestiones de política económica. No obstante, hay muchos casos en los cuales las cuestiones de eficiencia y de equidad sugieren la conveniencia de recurrir a los precios competitivos, por lo cual interferir en las transacciones de mercado para alcanzar las metas de la distribución no siempre es una conclusión descartada. Por el contrario, la aplicación correcta de la economía del bienestar a un asunto cualquiera requiere que hagamos una evaluación de los asuntos de la asignación independiente de los correspondientes a la distribución.

EJEMPLO 12.6

Una economía de intercambio con dos personas

Para aclarar estas ideas, consideremos el caso de una economía de intercambio en la que hay exactamente 1000 bebidas (x) y 1000 hamburguesas (y). Si se representa la utilidad de Santiago con

$$U_S(x_S, y_S) = x_S^{2/3}\ y_S^{1/3} \tag{12.74}$$

y la utilidad de Juan con

$$U_J(x_J, y_J) = x_J^{1/3}\, y_J^{2/3}\ , \tag{12.75}$$

se podrán computar las formas eficientes de asignar las bebidas y las hamburguesas. Nótese que, inicialmente, Santiago tiene una preferencia relativa por las bebidas, mientras que Juan tiende a preferir las hamburguesas, tal y como reflejan los distintos exponentes de las funciones de utilidad de los dos individuos. Por tanto, cabe esperar que las asignaciones eficientes den más bebidas a Santiago y más hamburguesas a Juan.

Para encontrar los puntos eficientes en esta situación, supongamos que Santiago parte de un nivel de utilidad predeterminado de, U_S. Ahora, nuestro problema consiste en elegir x_S, y_S, x_J y y_J de tal forma que la utilidad de Juan sea la máxima posible dada la restricción de la utilidad de Santiago. El lagrangiano de este problema es

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= U_J\,(x_J, y_J) + \lambda\,[\,U_S\,(x_S, y_S) - \overline{U}_S]\\ &= x_J^{1/3}\ y_J^{2/3}\ + \lambda\,(x_S^{2/3}\ y_S^{1/3}\ - \overline{U}_S).\end{aligned} \tag{12.76}$$

Recuerde que Juan tan sólo recibe lo que no obtiene Santiago y viceversa. Por tanto,

$$x_J = 1000 - x_S$$

y

$$y_J = 1000 - y_S. \tag{12.77}$$

Por tanto, nuestro lagrangiano sólo es una función de dos variables x_S y y_S:

$$\mathscr{L} = (1000 - x_S)^{1/3}\,(1000 - y_S)^{2/3} + \lambda\,(x_S^{2/3} y_S^{1/3}\ - \overline{U}_S). \tag{12.78}$$

Las condiciones de primer orden para obtener un máximo son

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_S} &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1000 - y_S}{1000 - x_S}\right)^{2/3} + \frac{2\lambda}{3}\left(\frac{y_S}{x_S}\right)^{1/3} = 0\\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_S} &= -\frac{2}{3}\left(\frac{1000 - x_S}{1000 - y_S}\right)^{1/3} + \frac{\lambda}{3}\left(\frac{x_S}{y_S}\right)^{2/3} = 0.\end{aligned} \tag{12.79}$$

Al desplazar los términos con λ al lado derecho de estas ecuaciones y dividir la primera ecuación entre la última se obtendrá[21]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1000 - y_S}{1000 - x_S}\right) = 2\left(\frac{y_S}{x_S}\right) \tag{12.80}$$

o

$$\frac{x_S}{(1000 - x_S)} = \left(\frac{4y_S}{1000 - y_S}\right), \tag{12.81}$$

[21]Nótese que la ecuación 12.80 vuelve a plantear la condición de que las tasas marginales de sustitución de los individuos deben ser iguales para que haya una asignación deficiente; es decir, *TMgS* (para Santiago) = $(\partial U_S/\partial x)/(\partial U_S/\partial y) = 2(y/x)$ y *TMgS* (para Juan) = $(\partial U_J/\partial x)/(\partial U_J/\partial y) = 1/2(y/x)$.

que es nuestra condición para la eficiencia. Ahora podemos emplear la ecuación 12.81 para calcular una asignación Pareto eficiente. En la tabla 12.1 se ofrecen algunos resultados para algunos valores de x_S que van de 0 a 1000 (es decir, para el caso de situaciones en las cuales Santiago no obtiene nada hasta situaciones en las que obtiene todo).

Eficiencia de Pareto. Para ilustrar por qué los puntos que no se encuentran sobre la curva del contrato son ineficientes, pensemos en una asignación inicial en la cual Santiago y Juan comparten x y y a partes iguales. Con 500 unidades de cada bien, tanto Santiago como Juan obtienen una utilidad de 500 (suponiendo que esta unidad de medida de la utilidad tiene un sentido). Sin embargo, usted, con sólo emplear una calculadora científica básica, podrá demostrar con relativa facilidad que hay muchas asignaciones sobre la curva del contrato que ofrecen más utilidad a los dos. La tabla 12.1 muestra que esto es casi cierto en el caso de las asignaciones en las cuales Santiago obtiene 600 o 700 bebidas, y de ahí es fácil calcular los límites exactos de estos intercambios mutuamente beneficiosos. Por ejemplo, pensemos que $x_S = 660$, $y_S = 327$, $x_J = 340$ y $y_J = 673$. Con esta asignación, la utilidad de Santiago será 522 y la de Juan 536. Es evidente que los dos están en mejor situación que con la asignación inicial, por lo cual cabe esperar que se produzca algún tipo de intercambio que les lleve a moverse hacia la curva de contrato.

Efectos de las dotaciones iniciales. Para ver cómo las dotaciones iniciales pueden imponer restricciones al intervalo de soluciones eficientes en el sentido de Pareto, supongamos que Santiago empieza con una posición muy favorable con $x_S = 800$, $y_S = 800$. Así, Juan obtiene $x_J = 200$, $y_J = 200$, y los niveles iniciales de utilidad son $U_S = 800$, $U_J = 200$. A partir de estas dotaciones iniciales se podrán hacer mejoras en el sentido de Pareto, pero ninguna mejorará demasiado la situación de Juan. Por ejemplo, si se mantiene constante la utilidad de Santiago en 800, la asignación eficiente de $x_S = 884$, $y_S = 657$, $x_J = 116$, $y_J = 343$ aumentará la utilidad de Juan de 200 a 239. Sin embargo, eso es lo mejor que puede conseguir Juan dada la restricción de que no es posible que empeore la situación de Santiago. Las ganancias de eficiencia de Juan, aun cuando sustanciales, no logran desplazar demasiado la asignación total para llegar a resultados más igualitarios.

Pregunta: ¿Si las dos personas de este ejemplo tuvieran otras preferencias ello ofrecería más margen para igualar los resultados de las transacciones voluntarias? ¿Santiago y Juan podrían tener ciertas preferencias que dieran por resultado que las transacciones voluntarias llevaran a la igualdad a pesar de que partieran de asignaciones iniciales muy desiguales?

TABLA 12.1 **Eficiencia de Pareto en las asignaciones de 1000 bebidas y 1000 hamburguesas entre Santiago y Juan**

x_S	y_S	$U_S = x_S^{2/3} y_S^{1/3}$	$x_J = 1000 - x_S$	$y_J = 1000 - y_S$	$U_J = x_J^{1/3} y_J^{2/3}$
0	0	0	1000	1000	1000
100	27	65	900	973	948
200	59	133	800	941	891
300	97	206	700	903	830
400	143	284	600	857	761
500	200	368	500	800	684
600	273	461	400	727	596
700	368	565	300	632	493
800	500	684	200	500	368
900	692	825	100	308	212
1000	1000	1000	0	0	0

RESUMEN

En este capítulo se ha presentado una exploración general de las conjeturas de Adam Smith acerca de las propiedades de la eficiencia en mercados competitivos. Empezamos con una descripción de cómo construir un modelo de muchos mercados en competencia simultánea y, de ahí, utilizamos el modelo para plantear algunas afirmaciones sobre el bienestar. Algunos puntos destacados de este largo capítulo han sido:

- Las preferencias y las tecnologías de producción son los pilares que fundamentan todos los modelos del equilibrio general. Una versión particularmente sencilla de estos modelos emplea las preferencias individuales por dos bienes y una frontera de posibilidades de producción, de forma cóncava, para estos dos bienes.
- Los mercados competitivos establecen los precios de equilibrio haciendo ajustes marginales a los precios en respuesta a información acerca de la oferta y la demanda de bienes individuales. La Ley de Walras vincula los mercados de tal suerte que asegura esta solución (en la mayor parte de los casos).
- Los precios competitivos darán por resultado una asignación de recursos eficiente en el sentido de Pareto. Éste es el Primer Teorema de la Economía del Bienestar.
- Algunos de los factores que interfieren con la capacidad de los mercados competitivos para alcanzar la eficiencia son: 1) el poder de mercado; 2) las externalidades; 3) la existencia de los bienes públicos, y 4) la información imperfecta.
- Los mercados competitivos no siempre producen distribuciones igualitarias de los recursos, sobre todo cuando las dotaciones iniciales están muy sesgadas. En teoría, es posible alcanzar una distribución deseada por medio de los mercados competitivos, acompañados de transferencias de una suma única. Sin embargo, la ejecución de estas transferencias presenta muchos problemas prácticos.

PROBLEMAS

12.1

Supongamos que la frontera de posibilidades de producción de pistolas (x) y de mantequilla (y) está determinada por

$$x^2 + 2y^2 = 900.$$

a. Dibuje esta función.

b. Si los individuos siempre prefieren combinaciones de consumo en las que $y = 2x$, ¿cuánto x y cuánto y se producirá?

c. En el punto descrito en el inciso anterior, ¿cuál será la *TTP* y, por tanto, cuál será la proporción de precios que lleve a que ocurra la producción en ese punto? (Podemos aproximar esta pendiente considerando pequeñas variaciones de x y y en torno al punto óptimo.)

d. Muestre su solución en la gráfica del inciso a.

12.2

El objetivo de este problema consiste en analizar la relación entre los rendimientos a escala, la intensidad de los factores y la forma de la frontera de posibilidades de producción.

Supongamos que hay ofertas fijas de capital y de trabajo que debemos asignar entre la producción del bien x y la del bien y. La función de producción de x está determinada por

$$x = k^{\alpha} l^{\beta}$$

y la de y por

$$y = k^{\gamma} l^{\delta},$$

donde los parámetros α, β, γ, δ tendrán distintos valores a lo largo de este problema.

Recurriendo a su intuición, a una computadora o a un planteamiento matemático formal, derive la frontera de posibilidades de producción de x y de y en los casos siguientes:

a. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{2}$.

b. $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$, $\delta = \frac{2}{3}$.

c. $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \delta = \frac{2}{3}$.

d. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{2}{3}$.

e. $\alpha = \beta = 0.6$, $\gamma = 0.2$, $\delta = 1.0$.

f. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 0.6$, $\delta = 0.8$.

¿Los rendimientos crecientes a escala siempre dan lugar a una frontera de posibilidades de producción de forma convexa? Explique su respuesta.

12.3

El país Podunk sólo produce trigo y telas, empleando como factores tierra y trabajo. Ambos bienes se producen con funciones de producción con rendimientos constantes a escala. El trigo es un bien que necesita una cantidad de trabajo relativamente intensiva.

a. Explique, en palabras o con diagramas, cómo el precio del trigo respecto al de la tela (p) determina la proporción de tierra a trabajo en cada una de estas dos industrias.

b. Supongamos que p está determinado por fuerzas externas (como ocurriría si Podunk fuera un país "pequeño" que comerciara libremente en un mundo "grande"). Emplee la caja de Edgeworth para demostrar que si la oferta de trabajo aumenta en Podunk la producción de tela aumentará y la producción de trigo disminuirá.

12.4

Supongamos que dos individuos (Santiago y Juan) disfrutan, cada uno, de 10 horas de trabajo que dedican a la producción de helados (x) o a la de caldo de pollo (y). La función de utilidad de Santiago está determinada por

$$U_S = x^{0.3}y^{0.7},$$

mientras que la de Juan está determinada por

$$U_J = x^{0.5}y^{0.5}.$$

A estas personas no les importa si producen x o y, y la función de producción de cada bien está determinada por

$$x = 2l$$

$$y = 3l,$$

donde l es el total de horas de trabajo dedicado a la producción de cada bien. Con esta información diga,

a. ¿Cuál debe ser la proporción de precios, p_x/p_y?

b. Dada esta proporción de precios, ¿cuánto x y y demandarán Santiago y Juan? (*Pista:* en este caso iguale el salario a 1.)

c. ¿El trabajo cómo debería quedar asignado entre x y y para satisfacer la demanda calculada en el inciso anterior?

12.5

Supongamos que sólo hay tres bienes (x_1, x_2 y x_3) en una economía y que las funciones de exceso de demanda de x_2 y x_3 están determinadas por

$$ED_2 = -3p_2/p_1 + 2p_3/p_1 - 1$$

$$ED_3 = 4p_2/p_1 - 2p_3/p_1 - 2.$$

a. Demuestre que estas funciones son homogéneas de grado cero en p_1, p_2 y p_3.

b. Aplique la ley de Walras para demostrar que si $ED_2 = ED_3 = 0$, ED_1 también debe ser igual a 0. ¿También puede emplear la ley de Walras para calcular ED_1?

c. Resuelva este sistema de ecuaciones para los precios relativos de equilibrio p_2/p_1 y p_3/p_1. ¿Cuál es el valor de equilibrio de p_3/p_2?

12.6

Supongamos que Robinson Crusoe produce y consume pescado *(F)* y cocos (*C*). Supongamos que durante determinado periodo ha decidido trabajar 200 horas y le es indiferente emplear su tiempo pescando o recogiendo cocos. La producción de pescado de Robinson está determinada por

$$F = \sqrt{l_F}$$

y la de cocos por

$$C = \sqrt{l_C},$$

donde l_F y l_C son la cantidad de horas que dedica a pescar o a recoger cocos. Por tanto,

$$l_C + l_F = 200.$$

La utilidad que obtiene Robinson de los pescados y los cocos está determinada por

$$\text{utilidad} = \sqrt{F \cdot C}.$$

a. Si Robinson no puede comerciar con el resto del mundo, ¿cómo decidirá asignar su trabajo? ¿Cuáles serán los niveles óptimos de F y C? ¿Cuál será su utilidad? ¿Cuál será la *TTP* (de pescado por cocos)?

b. Supongamos ahora que se abre el comercio y que Robinson puede comerciar sus pescados y cocos a una relación de precios de $p_F/p_C = 2/1$. Si Robinson sigue produciendo las cantidades de F y de C del inciso anterior, ¿cuánto decidirá consumir dada la oportunidad de comerciar? ¿Cuál será su nuevo nivel de utilidad?

c. ¿Cómo cambiaría su respuesta del inciso anterior si Robinson ajustara su producción para aprovechar los precios mundiales?

d. Elabore una gráfica con los resultados de los incisos a, b y c.

12.7

Consideremos una economía que sólo dispone de una técnica para la producción de cada bien:

Bien	**Alimento**	**Tela**
Trabajo por unidad de producto	1	1
Terreno por unidad de producto	2	1

a. Supongamos que la tierra es infinita, pero que el trabajo es igual a 100. Escriba y dibuje la frontera de posibilidades de producción.

b. Supongamos que el trabajo es infinito, pero la tierra es igual a 150. Escriba y dibuje la frontera de posibilidades de producción.

c. Supongamos que el trabajo es igual a 100 y que la tierra es igual a 150. Escriba y dibuje la frontera de posibilidades de producción. (*Sugerencia:* ¿cuáles son los puntos de corte con los ejes de la frontera de posibilidades de producción? ¿Cuándo se emplea plenamente la tierra? ¿El trabajo? ¿Ambos?)

d. Explique por qué la frontera de posibilidades de producción del inciso anterior es cóncava.

e. Dibuje el precio relativo de los alimentos en función de su producción en el inciso c.

f. Si los consumidores insisten en intercambiar cuatro unidades de alimentos por cinco unidades de tela, ¿cuál será el precio relativo de los alimentos? ¿Por qué?

g. Explique por qué la producción es exactamente igual en el caso de una relación de precios de $p_F/p_C = 1.1$ que una de $p_F/p_C = 1.9$.

h. Supongamos que también es necesario disponer de capital para producir alimentos y telas y que los requisitos de capital por unidad de alimentos y unidad de telas son, respectivamente, de 0.8 y 0.9. Hay 100 unidades de capital disponible. ¿Cuál es la curva de posibilidades de producción en este caso? Responda el inciso e en este caso.

12.8

En Ruritania hay dos regiones, *A* y *B*. En las dos regiones se producen dos bienes (*x* y *y*). Las funciones de producción para la región *A* están determinadas por

$$x_A = \sqrt{l_x}$$
$$y_A = \sqrt{l_y}.$$

l_x y l_y son la cantidad de trabajo dedicada, respectivamente, a la producción de *x* y *y*. El trabajo total en la región *A* es igual a 100 unidades. Es decir,

$$l_x + l_y = 100.$$

Empleando una notación similar para la región *B*, las funciones de producción están determinadas por

$$x_B = \frac{1}{2}\sqrt{l_x}$$
$$y_B = \frac{1}{2}\sqrt{l_y}.$$

También hay 100 unidades de trabajo disponible en la región *B*:

$$l_x + l_y = 100.$$

a. Calcule las curvas de posibilidades de producción para las dos regiones.

b. ¿Cuál condición se debe cumplir para que la producción de Ruritania sea asignada eficientemente entre las dos regiones (suponiendo que el trabajo no se puede desplazar de una región a otra)?

c. Calcule la curva de posibilidades de producción del país (suponiendo que el trabajo no se puede desplazar de una región a otra). ¿Cuál es el total de *y* que puede producir Ruritania si la producción de *x* es 12? *Pista:* en este caso, un análisis gráfico le podría ayudar.

12.9

Santiago y Juan han naufragado en una isla desierta. Cada uno tiene unas rebanadas de jamón (J) y de queso (Q). Santiago es muy quisquilloso para comer y sólo comerá jamón y queso en una proporción fija de 2 rebanadas de queso por 1 de jamón. Su función de utilidad está determinada por $U_S = \min(J, Q/2)$.

Juan es más flexible en sus gustos dietéticos y tiene una función de utilidad determinada por $U_J = 4J + 3Q$. Las dotaciones totales son de 100 rebanadas de jamón y 200 de queso.

a. Dibuje el diagrama de la caja de Edgeworth que representa las posibilidades de intercambio en esta situación. ¿Cuál es la única relación de intercambio que puede prevalecer en un equilibrio cualquiera?

b. Supongamos que Santiago tiene inicialmente $40J$ y $80Q$. ¿Cuál será la posición de equilibrio?

c. Suponga que Santiago tiene inicialmente $60J$ y $80Q$. ¿Cuál será la posición de equilibrio?

d. Suponga que Santiago (que es el más fuerte de los dos) decide no sujetarse a las reglas del juego. ¿Cuál podría ser la posición final de equilibrio?

12.10

En el ejemplo 12.6 cada individuo tiene una dotación inicial de 500 unidades de cada bien.

a. Exprese la demanda de Santiago y de Juan para los bienes x y y como funciones de p_x y de p_y y de sus dotaciones iniciales.

b. Utilice las funciones de demanda del inciso anterior junto con la observación de que la demanda total de cada bien debe ser igual a 1000 para calcular la relación de precios de equilibrio, p_x/p_y, en esta situación. ¿Cuáles son los niveles de consumo de equilibrio de cada bien por parte de cada persona?

c. ¿Las respuestas a este problema cómo cambiarían con las siguientes dotaciones iniciales?

	Dotación de Santiago		**Dotación de Juan**	
	x	y	x	y
i.	0	1000	1000	0
ii.	600	600	400	400
iii.	400	400	600	600
iv.	1000	1000	0	0

Explique por qué los resultados varían.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Arrow, K. J. y F. H. Hahn. *General Competitive Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1978, caps. 1, 2 y 4.

Un análisis del equilibrio general tratado en forma matemática sofisticada. Cada capítulo cuenta con un magnífico texto de introducción.

Debreu, G. "Existence of Competitive Equilibrium", en K. J. Arrow y M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 697-743.

Estudio bastante complejo de la existencia de pruebas fundadas en los teoremas de punto fijo. Contiene una gran cantidad de referencias bibliográficas.

Debreu, G. *Theory of Value*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1959.

Referencia básica, con matemáticas complejas. Tiene un buen capítulo de introducción a los instrumentos matemáticos empleados.

Ginsburgh, V. y M. Keyzer. *The Structure of Applied General Equilibrium Models*, MIT Press, Cambridge, MA, 1997.

Explicaciones detalladas que se presentan al aplicar los modelos del equilibrio general. Algunas útiles referencias a bibliografía empírica.

Harberger, A. "The Incidence of the Corporate Income Tax", *Journal of Political Economy*, enero/febrero de 1962, pp. 215-240.

Recomendable aplicación del modelo general de equilibrio de dos sectores para estudiar el peso final de un impuesto para el capital.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1995.

La parte IV está dedicada a un análisis del equilibrio general. Los capítulos 17 (existencia) y 18 (conexiones a la teoría de los juegos) son especialmente útiles. Los capítulos 19 y 20 abordan varios de los temas que se presentan en las ampliaciones de este capítulo.

Salanie, B. *Microeconomic Models of Market Failure*, MIT Press, Cambridge, MA, 2000.

Buen resumen de los teoremas fundamentales así como detallados análisis de las externalidades, los bienes públicos y la competencia imperfecta.

Sen, A. K. *Collective Choice and Social Welfare*, Holden-Day, San Francisco, 1970, caps. 1 y 2.

Referencia básica de la teoría de la elección social. Los primeros capítulos contienen una buena explicación del significado y las limitaciones del concepto de la eficiencia de Pareto.

AMPLIACIONES

Modelos para calcular el equilibrio general

Los avances recientes de la tecnología informática ahora permiten desarrollar modelos para calcular el equilibrio general (CEG) con considerable detalle. Estos modelos pueden involucrar, literalmente, a cientos de industrias y de individuos, cada uno de ellos con distintas tecnologías o preferencias. La metodología general que emplean estos modelos consiste en suponer diversas formas de funciones de utilidad y de producción y, después, en elegir parámetros concretos de estas funciones, fundados en evidencia empírica. A continuación, se utilizan los modelos para generar soluciones numéricas de equilibrio general y para compararlas con datos del mundo real. Tras "calibrar" los modelos para que reflejen la realidad, modificamos en ellos distintos elementos de las políticas para obtener estimaciones del efecto global que estos cambios de política tienen en el equilibrio general. En esta ampliación se revisarán brevemente algunos de estos tipos de aplicaciones.

A12.1 Modelos de comercio

Una de las primeras aplicaciones de los modelos de equilibrio general fue para estudiar el efecto de las barreras para el comercio. Dado que gran parte del debate de los efectos de estas barreras (o de su reducción) gira en torno a sus repercusiones en los salarios reales, estos modelos de equilibrio general resultan especialmente adecuados para el efecto.

Estos modelos se suelen caracterizar por dos aspectos poco comunes. En primer término, dado que los modelos suelen prestar atención explícita a la producción nacional de determinados bienes frente a su producción en el extranjero, es necesario introducir un alto grado de diferenciación de los productos en las funciones de utilidad de los individuos. Es decir, los "textiles estadounidenses" son considerados distintos de los "textiles mexicanos", a pesar de que, en la mayoría de las teorías del comercio, los textiles serían tratados como bienes homogéneos. Los creadores de los modelos han descubierto que deben dar cabida a una posibilidad limitada de sustitución entre estos bienes para que sus modelos sean capaces de reproducir los patrones reales del comercio.

Una segunda característica de los modelos de CEG del comercio es el interés por incorporar tecnologías con rendimientos crecientes a escala en sus sectores productivos. Esto permite que el modelo capte una de las principales ventajas que el comercio tiene para las economías pequeñas. Por desgracia, la introducción del supuesto de rendimientos crecientes a escala también exige que el modelo parta de la competencia perfecta y del supuesto de agentes precio aceptantes. Para ello a menudo se emplea algún tipo de sistema de aumentos de precios junto con una competencia imperfecta del tipo de Cournot (véase el capítulo 14).

Libre comercio en América del Norte

Algunos de los esfuerzos más amplios de los modelos del CEG han estado dirigidos a analizar el efecto del Tratado de Libre Comercio de América del Norte (TLCAN). Casi todos estos modelos concluyen que este tratado ha producido ganancias de bienestar en todos los países implicados. Las ganancias para México se han derivado fundamentalmente de la reducción de las barreras comerciales estadounidenses para los textiles y el acero mexicanos. Las ganancias para Canadá han provenido principalmente de una mayor posibilidad de beneficiarse de las economías de escala en ciertas industrias clave. Brown (1992) hace una revisión de diversos modelos de CEG del libre comercio en América del Norte y concluye que las ganancias que podrían obtener estos dos países son del orden del 2 al 3% del PIB. En el caso de Estados Unidos, las ganancias del TLCAN podrían ser considerablemente más pequeñas, pero, incluso en ese caso, se encontró que las ganancias sustanciales de bienestar estaban asociadas a la mayor competitividad de los mercados nacionales.

A12.2 Modelos de impuestos y transferencias

Una segunda aplicación importante de los modelos de CEG consiste en evaluar los posibles cambios de las políticas fiscales y de transferencias de un país. En el caso de estas aplicaciones es preciso tener mucho cuidado al incluir en los modelos el lado de la oferta de factores. Por ejemplo, en el margen, los efectos de las tarifas del impuesto sobre la renta (ya sean positivos o negativos) pueden tener importantes repercusiones en la oferta de trabajo que sólo es posible incluir en el modelo debidamente si empleamos un planteamiento de equilibrio general. De otra parte, la política fiscal/transferencias también puede afectar las decisiones de ahorro e inversión y, en su caso, también podría ser necesario adoptar procedimientos más detallados para crear los modelos (por ejemplo, diferenciar a los individuos en función de la edad para poder analizar los efectos de los planes de jubilación.

El modelo holandés MIMIC

Probablemente el modelo de CEG más elaborado de impuestos/transferencias es el desarrollado por la Oficina de Planificación Central de Holanda: el modelo micro-macro para analizar el contexto de las instituciones (*Micro Macro Model to Analyze the Institutional Context*, MIMIC). Este modelo enfatiza en los programas de bienestar social y en algunos de los problemas que buscan mejorar (sobre todo el desempleo, que no está presente en otros muchos modelos de cálculo del equilibrio general). Gelauff y Graaflund (1994) resumen las principales características del modelo MIMIC. También lo emplean para analizar propuestas de políticas como la reforma fiscal de la década de 1990 en los Países Bajos y los posibles cambios de las generosas prestaciones por desempleo e incapacidad existentes en esos países.

A12.3 Modelos ambientales

Los modelos de CEG también son adecuados para comprender la forma en que las políticas ambientales pueden afectar la economía. En estas aplicaciones, se considera que la producción de elementos contaminantes es un efecto colateral esencial de otras actividades económicas del modelo. Al especificar los objetivos del medioambiente en términos de una determinada reducción de estos elementos contaminantes, es posible emplear estos modelos para analizar los costos económicos de diversas estrategias para alcanzar estos objetivos. Una ventaja del planteamiento del CEG es que ofrece ciertas pruebas sobre el efecto que las políticas ambientales tienen en la distribución del ingreso, tema que ha sido omitido, en gran medida, en la creación de otros modelos más estrechos basados en cada industria.

Evaluación de las estrategias para reducir el CO_2

La preocupación respecto a la posibilidad de que las emisiones de dióxido de carbono derivadas de diversas actividades que emplean energía pueda contribuir al calentamiento global ha llevado a la creación de una serie de planes para reducir estas emisiones. Dado que las repercusiones de estas reducciones pueden ser bastante generales y variadas, los modelos del CEG son uno de los métodos preferidos para su evaluación. De estos modelos, tal vez el más elaborado sea el desarrollado por la OCDE: el modelo de equilibrio general del medioambiente [General Equilibrium Environmental Model (GREEN)]. La estructura básica de este modelo es descrita por Burniaux, Nicoletti y Oliveira-Martins (1992). El modelo ha sido empleado para simular diversas opciones de políticas que podrían adoptar las naciones europeas para reducir las emisiones de CO_2 por ejemplo, la imposición de un impuesto sobre el carbón o normativas cada vez más estrictas para las emisiones de los automóviles y las centrales eléctricas. Por lo general, estas simulaciones sugieren que los costos económicos de estas políticas serían relativamente modestos dado el grado de restricciones que se espera actualmente. Sin embargo, la mayor parte de estas políticas tendría efectos adversos para la distribución, los cuales exigirían una mayor atención por medio de las políticas de transferencias públicas.

A12.4 Modelos regionales y urbanos

Una aplicación más de los modelos de CEG consiste en analizar cuestiones económicas que tienen importantes dimensiones espaciales. La construcción de estos modelos exige que prestemos cuidadosa atención a las cuestiones relativas a los costos de transporte de bienes y a los costos de desplazamiento asociados a la movilidad del trabajo, porque dirigen su interés al lugar donde se realizan las transacciones. La incorporación de estos costos en los modelos de CEG es equivalente, en muchos sentidos, a añadir niveles adicionales de diferenciación del producto, porque éstos afectan los precios relativos de bienes que, de lo contrario, serían homogéneos. El cálculo de los equilibrios en los mercados regionales puede ser especialmente sensible a la forma en que especifiquemos los costos de transporte.

Cambiar las adquisiciones gubernamentales

Los modelos regionales del CEG han sido muy empleados para analizar el efecto local de variaciones importantes en las políticas del gasto público. Por ejemplo, Holtman, Robinson y Subramanian (1996) emplean un modelo de CEG para evaluar el efecto regional que la reducción del gasto para defensa tuvo en la economía de California. Encontraron que la magnitud de los efectos depende enormemente de los supuestos relativos a los costos de la migración de trabajadores calificados. Bernat y Hanson (1995) presentan una conclusión parecida en su estudio de las posibles reducciones del pago de subsidios del gobierno estadounidense a los agricultores. Estas reducciones producirían ganancias de eficiencia para la economía general, pero podrían tener efectos negativos sustanciales para las zonas rurales.

Referencias

Bernat, G. A. y K. Hanson. "Regional Impacts of Farm Programs: A Top-Down CGE Analysis", *Review of Regional Studies*, invierno de 1995, pp. 331-350.

Brown, D. K. "The Impact of North American Free Trade Area: Applied General Equilibrium Models", en N. Lustig, B. P. Bosworth, y R. Z. Lawrence, eds., *North American Free Trade: Assessing the Impact*, The Brookings Institution, Washington, DC, 1992, pp. 26-68.

Burniaux, J. M., G. Nicoletti y J. Oliviera-Martins. "Green: A Global Model for Quantifying the Costs of Policies to Curb CO_2 Emissions", *OECD Economic Studies*, invierno de 1992, pp. 49-92.

Gelauff, G. M. M. y J. J. Graaflund. *Modeling Welfare State Reform*, North Holland, Amsterdam, 1994.

Hoffman, S., S. Robinson y S. Subramanian. "The Role of Defense Cuts in the California Recession: Computable General Equilibrium Models and Interstate Fair Mobility", *Journal of Regional Science*, noviembre de 1996, pp. 571-595.

Parte 5

MODELOS DE COMPETENCIA IMPERFECTA

A todo lo largo de la parte 4, uno de los supuestos más importantes fue que tanto oferentes como demandantes eran precio aceptantes. Supusimos que ningún agente económico podía influir en los precios y, por tanto, se consideró que, en las decisiones de los agentes, los precios eran parámetros fijos. Este supuesto del comportamiento fue esencial para la mayor parte de nuestro análisis, especialmente en lo referente a las propiedades de eficiencia de un sistema de precios competitivos. En esta parte se analizarán las consecuencias que resultan de abandonar el supuesto de que los oferentes de bienes son precio aceptantes.

Iniciamos el análisis de la competencia imperfecta en el capítulo 13 con el caso de un solo oferente de un bien, el cual se conoce como monopolio. Este oferente afronta la curva entera de demanda del mercado de su producto y puede optar por un punto cualquiera de esa curva de demanda. Es decir, el oferente monopolista puede elegir la combinación de precio-cantidad en la curva de demanda que considere más rentable. Sus actividades sólo están limitadas por la naturaleza de la curva de demanda de su producto, mas no por el comportamiento de productores rivales. Por consiguiente, este caso representa el extremo opuesto del de la competencia perfecta, en el cual la existencia de muchos oferentes hace que una empresa individual cualquiera tenga que observar un comportamiento precio aceptante.

En el capítulo 14 se pasará del caso relativamente sencillo del monopolio a estructuras de mercado, las cuales incluyen "pocas" empresas. Como se verá, al sumar más oferentes (incluso si nos limitamos a los modelos de dos empresas que constituyen un duopolio) el análisis se complica. En estos casos, ninguna empresa sola afronta la curva entera de demanda del mercado, sino que, más bien, afronta una curva de demanda de su propio producto, la cual tendrá propiedades que, en parte, estarán determinadas por el comportamiento de sus rivales; por ejemplo, la curva de demanda de los automóviles de General Motors depende, en parte, de lo que hagan Ford y Toyota. Por tanto, *para desarrollar un modelo realista es necesario hacer algún supuesto en tanto de cómo cree una empresa que se comportarán sus rivales.*

Las cuestiones tanto de la rivalidad entre empresas y de la diferenciación de productos que se presentan en el capítulo 14 también las podemos plantear de manera formal como aplicaciones de la teoría de juegos. En el capítulo 15 se presenta una explicación general de este tema. Asimismo, se demuestra que podemos interpretar muchas situaciones estratégicas en términos de la teoría de juegos y además se ilustra cómo estos modelos contienen importantes analogías del concepto de equilibrio del mercado.

Capítulo 13

MODELOS DE MONOPOLIO

Un monopolio *es una sola empresa que cubre un mercado entero. Esta única empresa afronta toda la demanda del mercado de su producto. El monopolio, empleando lo que conoce de su curva de demanda, toma la decisión de cuánto debe producir. A diferencia de la decisión relativa al nivel de producción en el caso de las empresas en competencia perfecta, decisión que no tiene efecto alguno en el precio de mercado, la decisión del nivel producción del monopolio determinará, de hecho, el precio del bien. En este sentido, los mercados monopolistas y los mercados que se caracterizan por la competencia perfecta representan casos diametralmente opuestos.*

A veces resulta más conveniente considerar que los monopolios tienen el poder de determinar los precios. Técnicamente, un monopolio puede elegir el punto de la curva de demanda de mercado en el que prefiere operar. Puede elegir el precio de mercado o la cantidad, pero no ambos. En este capítulo normalmente supondremos que los monopolios eligen la cantidad de producción que maximiza el beneficio y, a continuación, determinan el precio de mercado para la cantidad de producción que han elegido. Tal vez resulte más sencillo volver a plantear la explicación en términos de la determinación de precios y, en algunas partes, así lo haremos.

Barreras a la entrada

Dadas las convenciones que se acaban de señalar, tendremos la siguiente:

DEFINICIÓN

Monopolio. Un *monopolio* es el único oferente en un mercado. Esta empresa puede optar por producir en un punto cualquiera de la curva de demanda del mercado.

La razón que explica la existencia de los monopolios es que otras empresas consideran que ese mercado no es rentable o que les resulta imposible entrar en él. Las *barreras a la entrada* son, por tanto, la fuente de todo el poder del monopolio. Si otras empresas pudieran entrar en el mercado, la empresa dejaría de ser, por definición, un monopolio. Hay dos tipos generales de barreras a la entrada: las barreras tecnológicas y las barreras legales.

Barreras tecnológicas a la entrada

Una de las principales barreras tecnológicas es que la producción del bien en cuestión podría exhibir costos marginal y promedio decrecientes para un gran intervalo de niveles de producción. La tecnología de producción es tal que la empresa produce a escala relativamente grande y a bajo costo. En esta situación, que a veces se conoce como *monopolio natural*, una empresa podría encontrar que es rentable reducir mucho sus precios para sacar a las otras empresas de la industria. Por otra parte, cuando hay un monopolio establecido, la entrada de toda nueva empresa resultará muy difícil porque tendría que operar con niveles de producción relativamente bajos y, por tanto, con un costo promedio relativamente alto. Es importante destacar que el intervalo decreciente del costo sólo tiene que ser "grande" respecto al mercado en cuestión. No es necesario que el costo decreciente se defina en una escala absoluta. Por ejemplo, la producción y la distribución de concreto no tienen un costo marginal decreciente, dentro de un gran intervalo de producción, si se comparan con el mercado estadounidense completo. Sin embargo, en una ciudad pequeña cualquiera, el costo marginal decreciente podría permitir que se establezca un monopolio. En el caso de esta industria, el alto costo del transporte tiende a aislar a un mercado de otro.

Otro fundamento técnico del monopolio es su conocimiento particular de una técnica de producción de bajo costo. No obstante, el problema para el monopolio que teme la entrada de nuevas firmas es conservar esta técnica exclusivamente para sí. Cuando se habla de cuestiones de tecnología, esto puede ser particularmente difícil, a no ser que dicha tecnología esté protegida por una patente (véase más adelante). La propiedad de recursos exclusivos, como depósitos de minerales o determinadas tierras, o la posesión de talentos administrativos singulares, también puede establecer bases duraderas que permitirán mantener un monopolio.

Barreras legales a la entrada

Muchos monopolios puros son creados por ley y no por las condiciones económicas. Un ejemplo importante de un monopolio otorgado por el gobierno es la protección legal de un producto a través de una patente o de los derechos de autor. Algunos medicamentos, los chips de computadora y las películas de dibujos animados de Disney son ejemplos de productos rentables protegidos, durante cierto tiempo, contra la competencia directa de posibles imitadores. Gracias a que la tecnología básica de estos productos ha sido asignada en exclusiva a una empresa, ésta ha creado una posición de monopolio. El argumento esgrimido para defender el monopolio otorgado por el gobierno es que el sistema de patentes y derechos registrados hace que la innovación sea más rentable y, por tanto, actúa como un incentivo. Los economistas han discutido acaloradamente si los beneficios de este comportamiento innovador son superiores a los costos de tener monopolios y el tema sigue abierto.

Otro ejemplo de monopolio creado por ley es la concesión de una franquicia de exclusividad para atender un mercado. Estas concesiones son otorgadas en casos de servicios públicos (gas y electricidad), servicios de comunicaciones, oficinas de correos, algunos mercados de emisoras de radio y televisión, así como en diversas situaciones más. El argumento que se suele esgrimir a favor de la creación de estos monopolios mediante una concesión es que la industria en cuestión es un monopolio natural; es decir, el costo promedio es decreciente dentro de un amplio intervalo de niveles de producción y el costo promedio mínimo sólo se puede alcanzar organizando a la industria en forma de monopolio. Las industrias de servicios públicos y de comunicaciones suelen ser consideradas como buenos ejemplos. Sin duda, tal parece ser el caso del suministro de electricidad y del servicio telefónico en el ámbito local, en el cual una red dada probablemente exhibirá un costo promedio decreciente hasta llegar al punto de la cobertura universal. No obstante, la reciente desregulación de los servicios telefónicos y de la generación de electricidad demuestra que, incluso en el caso de estas industrias, la lógica del monopolio natural podría no ser totalmente incluyente. En otros casos, las concesiones podrían estar fundadas, en gran medida, en razonamientos de corte político. Tal parece ser el caso del servicio postal en Estados Unidos y en una serie de industrias nacionalizadas (compañías aéreas, radio y televisión, banca) en otros países.

Creación de barreras a la entrada

Si bien algunas barreras a la entrada pueden ser independientes de las actividades del propio monopolista, es posible que otras surjan directamente de dichas actividades. Por ejemplo, las empresas podrían crear productos o tecnologías únicos y tomar medidas excepcionales para impedir que los competidores las imiten. Las empresas también podrían adquirir recursos únicos para evitar la posible entrada de otras empresas. Por ejemplo, el cártel De Beers controla una gran parte de las minas de diamantes del mundo. Por último, un posible monopolista podría recurrir al apoyo del gobierno a fin de levantar barreras a la entrada. Podría ejercer presión política para fomentar una legislación que limite las nuevas entradas de forma que se "mantenga un mercado ordenado" o a favor de normativas sanitarias y de seguridad que incrementen el costo para los posibles entrantes. Dado que el monopolista tiene un conocimiento específico de su negocio y también importantes incentivos para perseguir estos objetivos, podría tener un notable éxito a la hora de crear este tipo de barreras a la entrada.

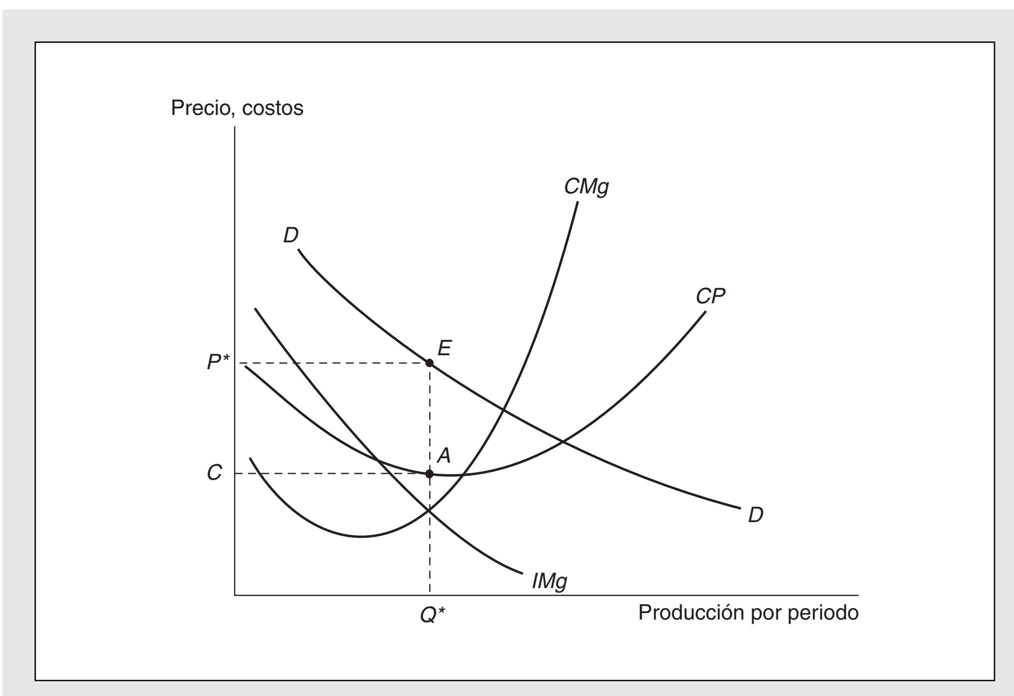
El intento del monopolista para erigir barreras a la entrada puede implicar verdaderos costos de recursos. Mantener las cosas en secreto, adquirir recursos exclusivos o participar en cabildeos políticos son todas actividades costosas. Un análisis completo del monopolio no sólo debe incluir cuestiones de cómo minimizar los costos y de cómo elegir los niveles de producción, como en el caso de la competencia perfecta, sino también un análisis de la creación de barreras a la entrada que maximizan el beneficio.[1] Sin embargo, aquí no se presentará un análisis detallado de esas cuestiones. En cambio, generalmente supondremos que el monopolista no puede hacer nada para afectar las barreras a la entrada y, por tanto, que los costos de la empresa son similares a los costos que tendría una empresa en competencia. Sin embargo, en algunas ocasiones se mencionarán algunas de las complicaciones que plantea la posibilidad de que un monopolista contraiga gastos para proteger su mercado. En el capítulo 21 se hará un análisis más detallado de estos gastos que "buscan obtener rentas".

Maximización del beneficio eligiendo el nivel de producción

Para poder maximizar el beneficio, el monopolio optará por realizar el nivel de producción en el cual el ingreso marginal sea igual al costo marginal. Dado que el monopolio, al contrario que la empresa en competencia perfecta, afronta una curva de demanda de mercado con pendiente negativa, el ingreso marginal será inferior al precio de mercado. Para poder vender una unidad más, el monopolio tendrá que reducir el precio de todas las unidades que venderá, para así poder generar la demanda extra necesaria para absorber esta unidad marginal. Por tanto, en la figura 13.1, el nivel de producción que maximiza el beneficio de una empresa es el nivel Q^*. En este nivel de producción, el ingreso marginal es igual al costo marginal, y se maximiza el beneficio.

FIGURA 13.1 **Maximización del beneficio y determinación del precio para un monopolio**

El monopolista que maximiza el beneficio produce la cantidad en la cual el ingreso marginal es igual al costo marginal. En la figura, esta cantidad está dada por Q^*, el cual se venderá en el mercado al precio P^*. El rectángulo P^*EAC representa el beneficio del monopolio.



[1]Encontrará un análisis sencillo en R. A. Posner. "The Social Costs of Monopoly and Regulation", *Journal of Political Economy 83*, agosto de 1975, pp. 807-827.

Dada la decisión del monopolio de producir Q^*, la curva de demanda D indica que prevalecerá el precio de mercado P^*. Éste es el precio que los demandantes, como colectivo, están dispuestos a pagar por el producto del monopolio. En el mercado se observará una combinación de precio-cantidad de equilibrio de P^*, Q^*. Suponiendo que $P^* > CP$, este nivel de producción será rentable y el monopolista no tendrá incentivo alguno para alterar los niveles de producción a no ser que las condiciones de la demanda o de costos cambien. Por tanto, tenemos el siguiente principio:

PRINCIPIO DE LA OPTIMIZACIÓN

Producción del monopolista. Un monopolista optará por producir la cantidad en la cual el ingreso marginal sea igual al costo marginal. Dado que el monopolista afronta una curva de demanda con pendiente negativa, en este nivel de producción, el precio de mercado excederá al ingreso marginal y al costo marginal de la empresa.

De nuevo, la regla de la inversa de la elasticidad

En el capítulo 9 se demostró que el supuesto de maximizar el beneficio implica que la distancia entre el precio del producto de una empresa y su costo marginal guarda una relación inversa con la elasticidad-precio de la curva de demanda que afronta la empresa. Si se aplica la ecuación 9.13 al caso del monopolio tendremos

$$\frac{P - CMg}{P} = -\frac{1}{e_{Q,P}}, \tag{13.1}$$

donde ahora empleamos la elasticidad de la demanda para todo el mercado ($e_{Q,P}$) porque el monopolio es el único oferente del bien en cuestión. Esta observación conduce a dos conclusiones generales sobre la determinación del precio en el caso de un monopolio. En primer término, el monopolio decidirá operar únicamente en las regiones en las cuales la curva de demanda del *mercado* sea elástica ($e_{Q,P} < -1$). Si la demanda fuera inelástica, el ingreso marginal sería negativo y, por tanto, no se podría igualar al costo marginal, que supuestamente siempre es positivo. La ecuación 13.1 también muestra que $e_{Q,P} > -1$ implica un costo marginal negativo (lo cual no es plausible).

La ecuación 13.1 también implica que el "aumento del precio" de la empresa por encima del costo marginal, como porcentaje del precio, depende inversamente de la elasticidad de la demanda del mercado. Por ejemplo, si $e_{Q,P} = -2$, la ecuación 13.1 demuestra que $P = 2CMg$, mientras que si $e_{Q,P} = -10$, $P = 1.11CMg$. Nótese también que si la elasticidad de la demanda fuera constante a lo largo de toda la curva de demanda, el aumento proporcional de precio por encima del costo marginal no cambiaría en respuesta a variaciones del costo de los factores. Por tanto, el precio de mercado se mueve en proporción con el costo marginal; es decir, los incrementos del costo marginal llevarán al monopolio a aumentar su precio proporcionalmente y las reducciones del costo marginal provocarán que el monopolio reduzca su precio de manera proporcional. La figura 13.1 deja en claro que, incluso si la elasticidad no es constante a lo largo de la curva de demanda, los incrementos del costo marginal aumentarán el precio, si bien no necesariamente en la misma proporción. Siempre y cuando la curva de demanda que afronta el monopolio tenga pendiente negativa, los desplazamientos hacia arriba del costo marginal llevarán al monopolio a reducir la producción y, por tanto, a obtener un precio más alto.[2]

Beneficios del monopolio

La figura 13.1 permite observar de manera directa el beneficio total que obtiene el monopolista, como muestra el rectángulo P^*EAC el cual, de nueva cuenta, representa el beneficio por unidad (precio menos costo promedio) multiplicado por el número de unidades vendidas. Estas utilidades serán positivas si el precio de mercado excede al costo total promedio. Sin embargo, si $P^* < CP$, el monopolista no puede sino operar con una pérdida a largo plazo y se negará a atender el mercado.

Como se supone que un mercado monopolista no admite entrada alguna, el monopolista puede tener utilidades positivas incluso a largo plazo. Esto explica por qué cuando algunos au-

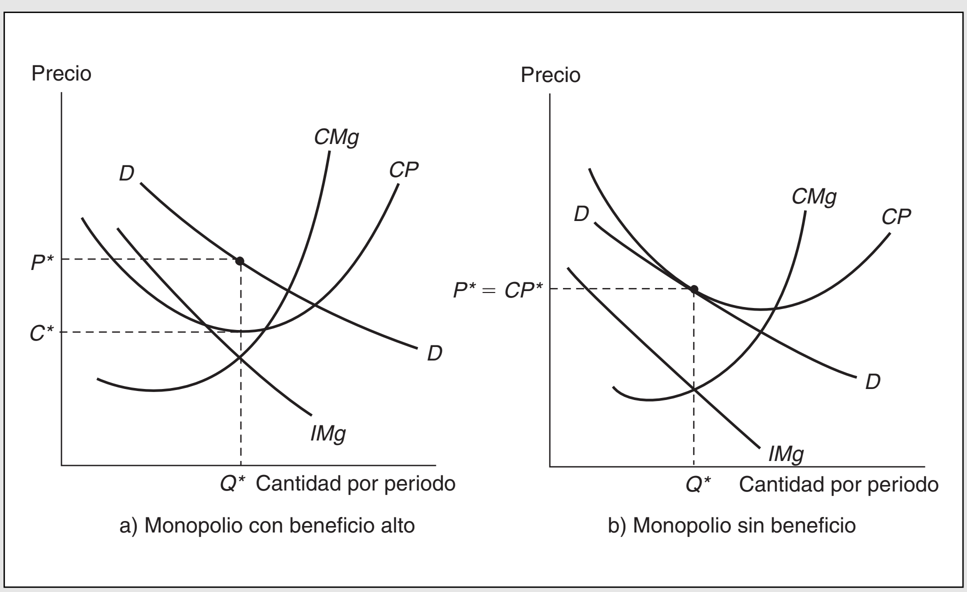
[2]Sin embargo, la estática comparativa de un desplazamiento de la curva de demanda que afronta un monopolista no es tan clara y no es posible hacer una previsión inequívoca del precio. Para un análisis de esta cuestión, véanse el análisis siguiente y el problema 13.4.

tores hablan del beneficio que el monopolio gana a largo plazo dicen que son *rentas de monopolio*. Cabe aclarar que estos beneficios son un rendimiento sobre el factor que constituye la base del monopolio (por ejemplo, una patente, una ubicación favorable o un empresario dinámico); de ahí que otro posible propietario pueda estar dispuesto a pagar una renta por el derecho al monopolio. El potencial para obtener beneficios es la razón que explica por qué algunas empresas pagan a otras una cantidad por el derecho de emplear una patente y por qué los concesionarios de eventos deportivos o de algunas autopistas están dispuestos a pagar por el derecho de poseer esa concesión. En la medida que los derechos del monopolio sean otorgados a un precio inferior a su verdadero valor de mercado, como las concesiones de radio y televisión, aumentará la riqueza de los receptores de esos derechos.

Si bien un monopolio puede obtener utilidades positivas a largo plazo,[3] la magnitud de estas utilidades dependerá de la relación entre el costo promedio del monopolista y la demanda de su producto. La figura 13.2 ilustra dos situaciones en las cuales la demanda, el ingreso marginal y el costo marginal son bastante similares. Como sugiere la ecuación 13.1, el aumento del precio sobre el costo marginal es aproximadamente el mismo en ambos casos. Sin embargo, el costo promedio de la figura 13.2a es considerablemente más bajo que el de la figura 13.2b. Aun cuando las decisiones que maximizan el beneficio son parecidas en ambos casos, el nivel de beneficios termina siendo bastante distinto. En la figura 13.2a el precio del monopolista (P^*) excede al costo promedio de producir Q^* (señalado con CP^*) en un monto importante y se obtienen beneficios sustanciales. No obstante, en la figura 13.2b, $P^* = CP^*$ y el monopolio no obtiene beneficio económico alguno, siendo el mayor beneficio posible en este caso. En consecuencia, el monopolio no genera grandes utilidades inevitablemente y la medida real del beneficio económico podría no ser siempre una buena guía para conocer la importancia de la influencia del monopolista en el mercado.

FIGURA 13.2 **El beneficio del monopolio depende de la relación entre la curva de la demanda y la curva del costo promedio**

Los dos monopolios de esta figura son igual de “fuertes”, entendiéndose por ello que los dos producen divergencias análogas entre el precio de mercado y el costo marginal. Sin embargo, debido a la posición de las curvas de demanda y de costo promedio, el monopolio de la sección a) obtiene un beneficio alto, mientras que el monopolio de la sección b) no obtiene beneficio alguno. Por tanto, la magnitud del beneficio no es una medida de la fortaleza de un monopolio.



[3]Como en el caso de competencia perfecta, el monopolista que maximiza el beneficio estará dispuesto a producir con pérdidas a corto plazo siempre que el precio de mercado sea superior al costo promedio variable.

La curva de oferta del monopolio no existe

En la teoría de los mercados en competencia perfecta que se presentó en la parte 4 pudimos hablar de la curva de oferta de una industria. Construíamos la curva de oferta a largo plazo permitiendo que se desplazara la curva de demanda del mercado y observando la curva de oferta que iba surgiendo en razón de la serie de combinaciones de precio-cantidad de equilibrio. En el caso de los mercados monopolistas no es posible construir una curva así. Si la curva de demanda del mercado es fija, entonces la "curva" de oferta del monopolio será un único punto: la combinación de precio-cantidad en la cual $IMg = CMg$. Si la curva de demanda se desplazara, entonces la curva del ingreso marginal también se desplazaría y elegiríamos otro nivel de producción para maximizar el beneficio. Sin embargo, no tendría mucho sentido unir la serie de puntos de equilibrio de las curvas de demanda del mercado. Esta línea tendría una forma muy extraña, dependiendo de cómo varíe la elasticidad de la curva de demanda del mercado, y su correspondiente curva del ingreso marginal, a medida que se desplaza la curva. En este sentido, la empresa monopolista no tiene una "curva de oferta" bien definida. Cada curva de demanda representa una oportunidad única para que el monopolista maximice su beneficio.

EJEMPLO 13.1

Monopolio con demanda lineal

Supongamos que el mercado de pesas olímpicas (Q, medido en pesas compradas por año) tiene una curva de demanda lineal de forma

$$Q = 2000 - 20P \tag{13.2}$$

o

$$P = 100 - Q/20, \tag{13.3}$$

y que los costos de un productor monopolista de pesas están determinados por

$$C(Q) = 0.05Q^2 + 10\,000. \tag{13.4}$$

Para maximizar sus utilidades, este productor elige el nivel de producción en el cual $IMg = CMg$. Para resolver este problema debemos expresar IMg y CMg tan sólo como funciones de Q. Para ello, se expresa el ingreso total como

$$P \cdot Q = 100Q - Q^2/20. \tag{13.5}$$

Por tanto,

$$IMg = 100 - Q/10 = CMg = 0.1Q \tag{13.6}$$

y

$$Q^* = 500 \qquad P^* = 75. \tag{13.7}$$

En el nivel de producción preferido por el monopolio

$$\begin{aligned} C(Q) &= 0.05(500)^2 + 10\,000 = 22\,500 \\ CP &= 22\,500/500 = 45. \end{aligned} \tag{13.8}$$

Si se emplea esta información podemos calcular el beneficio como

$$\pi = (P^* - CP) \cdot Q^* = (75 - 45) \cdot 500 = 15\,000. \tag{13.9}$$

Nótese que, en este equilibrio, hay un importante margen entre el precio (75) y el costo marginal ($CMg = 0.1Q = 50$). Sin embargo, mientras las barreras a la entrada impidan que una empresa nueva produzca pesas olímpicas, esta diferencia y la utilidad económica positiva podrán perdurar indefinidamente.

Un ejemplo de la regla de la inversa de la elasticidad. Para ver si la regla de la inversa de la elasticidad es válida, se tendrá que calcular la elasticidad de la demanda en el punto de equilibrio del monopolio:

$$e_{Q,P} = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q} = -20\left(\frac{75}{500}\right) = -3. \qquad \textbf{(13.10)}$$

Así pues, por la ecuación 13.1

$$\frac{P - CMg}{P} = \frac{1}{3}$$

o

$$P = \frac{3}{2}CMg, \qquad \textbf{(13.11)}$$

que, de hecho, es la relación entre el precio de equilibrio (75) y el costo marginal del monopolio (50).

Pregunta: ¿Un incremento de los costos fijos de 10 000 a 12 500 cómo afectaría los planes de producción del monopolio? ¿Cómo se vería afectado el beneficio económico? Supongamos que los costos totales se desplazaran a $C(Q) = 0.075\ Q^2 + 10\ 000$. ¿Cómo cambiaría el equilibrio?

Monopolio y asignación de recursos

En el capítulo 12 se explicó de manera breve por qué la presencia de un monopolio distorsiona la asignación de recursos. Como el monopolio produce la cantidad en la cual $CMg = IMg < P$, el precio de mercado de este bien deja de transmitir información exacta sobre los costos de producción. Por tanto, las decisiones de los consumidores dejarán de reflejar los verdaderos costos de oportunidad de la producción y los recursos no serán asignados correctamente. En esta sección se analizarán con cierto detalle las malas asignaciones, dentro del contexto de un equilibrio parcial.

Bases de comparación

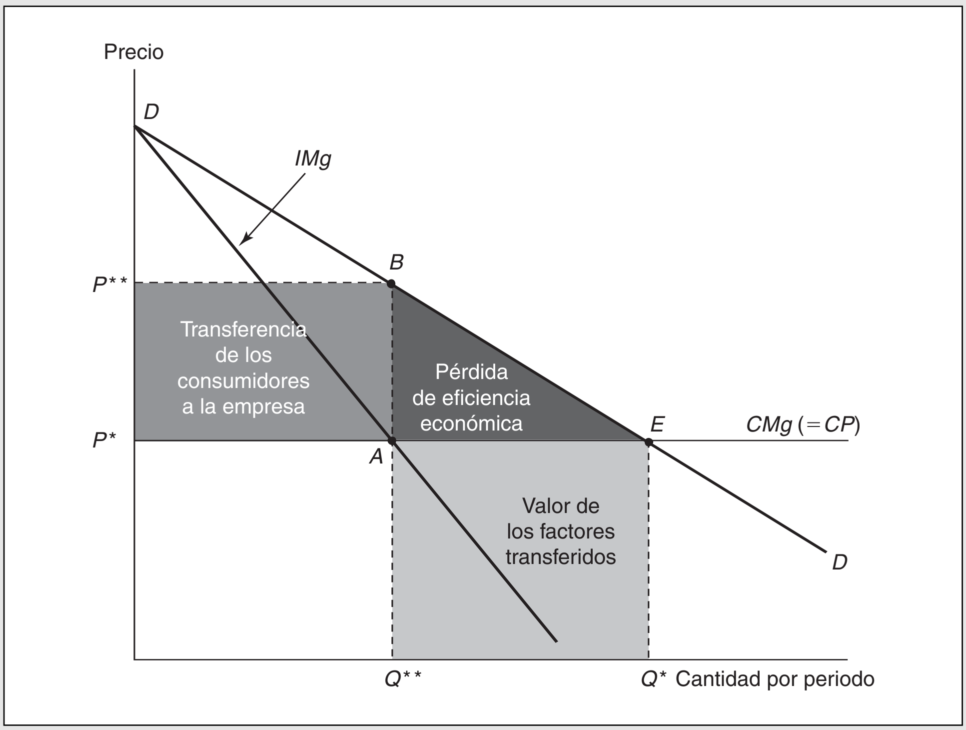
Para poder evaluar el efecto que el monopolio tiene en la asignación se debe contar con una base de comparación definida con gran precisión. La industria con costos constantes y en competencia perfecta permite una comparación particularmente útil. En este caso, como se demostró en el capítulo 10, la curva de oferta de la industria a largo plazo será infinitamente elástica con un precio igual al costo promedio y al costo marginal. Pensar que un monopolio ha surgido porque tiene “capturada” a toda esta industria competitiva facilitará las cosas, al igual que considerar que las empresas individuales que componían la industria en competencia ahora sólo son fábricas individuales dentro del imperio del monopolista. El caso prototipo sería el de John D. Rockefeller cuando adquirió la mayor parte de las refinerías estadounidenses a finales del siglo XIX y decidió convertirlas en parte del conglomerado Standard Oil. Así, podremos comparar el desempeño de este monopolio con el de la industria, antes en competencia, para llegar a conclusiones respecto a las consecuencias que un monopolio tiene para el bienestar.

Análisis gráfico

La figura 13.3 muestra una sencilla curva de demanda lineal de un producto fabricado por una industria que tiene costos constantes. Si este mercado estuviera en competencia, la producción sería Q^*; es decir, la producción ocurriría en el punto en el cual el precio fuera igual al costo promedio de largo plazo y al costo marginal. Con un monopolio sencillo de un precio único, la producción sería Q^{**}, porque éste es el nivel de producción en el cual el ingreso marginal es igual al costo marginal. La restricción en la producción de Q^* a Q^{**} representa una mala asig-

FIGURA 13.3 **Efectos del monopolio en la asignación y en la distribución**

La monopolización de este mercado, que antes estaba en competencia, provocará que la producción disminuya de Q^* a Q^{**}. Los gastos de los consumidores y los factores productivos, por valor de AEQ^*Q^{**} serán reasignados a la producción de otros bienes. El excedente del consumidor, de valor igual a $P^{**}BAP^*$ será transferido al beneficio del monopolio. El triángulo *BEA* representa la pérdida de eficiencia económica que se registra.



nación provocada por el monopolio. El valor total de los recursos liberados por esta restricción de la producción aparece en la figura 13.3 como el área AEQ^*Q^{**}. En esencia, el monopolio cierra algunas de las fábricas que estaban en funcionamiento en el caso de la competencia. Los factores transferidos pueden ser empleados en otras partes, por lo cual el área AEQ^*Q^{**} no será una pérdida para la sociedad.

La restricción de la producción de Q^* a Q^{**} implica una pérdida total del excedente del consumidor de $P^{**}BEP^*$. El monopolio capta una parte de esta pérdida en forma de beneficios. Estos beneficios están dados por el área $P^{**}BAP^*$, y reflejan la transferencia de los ingresos de los consumidores a la empresa. Como ocurre en el caso de otra transferencia cualquiera, cuando se trata de determinar si esta transferencia es "equitativa" o no, surgen difíciles cuestiones en torno a la equidad. Sin embargo, no hay ambigüedad alguna respecto a la pérdida del excedente del consumidor dada por el área *BEA*, porque esta pérdida no es transferida a nadie. Se trata de una pérdida de eficiencia económica también llamada pérdida de peso "muerto" y representa la medida principal del perjuicio que el monopolio produce en términos de asignación.[4]

Para ilustrar la naturaleza de esta pérdida de eficiencia económica, consideremos el ejemplo 13.1, en el cual se ha calculado un precio de equilibrio de \$75 y un costo marginal de \$50. Esta distancia entre el precio y el costo marginal es un indicador de la eficiencia perdida debido a la monopolización. Sin duda, existe un posible comprador que estará dispuesto a pagar, por decir,

---

[4]Si la industria monopolizada tiene una curva de oferta a largo plazo con pendiente positiva, entonces parte de la pérdida de peso muerto también se verá reflejada en las rentas más bajas de los factores a causa de que el monopolista ha restringido la producción.

\$60 por una pesa olímpica, pero no \$75. Un precio de \$60 cubriría con creces todos los costos de los recursos necesarios para la producción de una pesa, pero la presencia del monopolio impide que ocurra esta transacción mutuamente beneficiosa entre los usuarios de pesas y los proveedores de los recursos necesarios para fabricarlas. Por tal motivo, el equilibrio del monopolio no es óptimo en el sentido de Pareto; es decir, otra asignación de recursos colocaría a todas las partes en mejor situación. Los economistas han hecho muchos intentos por estimar los costos globales de estas pérdidas de eficiencia económica en situaciones reales de monopolio. Casi todos estos estimados son bastante pequeños si los consideramos en el contexto de la economía en su conjunto.[5] Sin embargo, las pérdidas en términos de asignación son mayores en el caso de algunas industrias que quedan dentro de una definición más estrecha.

EJEMPLO 13.2

Pérdidas de bienestar y elasticidad

Podemos representar los efectos que el monopolio tiene en la asignación de recursos de forma bastante completa en el caso del costo marginal constante y de una curva de demanda con elasticidad-precio constante. Para ello, supongamos que el costo marginal (y promedio) constantes del monopolista están determinados por c y que la curva de demanda tiene una elasticidad constante de forma

$$Q = P^e, \tag{13.12}$$

donde e es la elasticidad-precio de la demanda ($e < -1$). Sabemos que el precio competitivo en este mercado será

$$P_c = c \tag{13.13}$$

y que el precio del monopolio está determinado por

$$P_m = \frac{c}{1 + \frac{1}{e}}. \tag{13.14}$$

Podemos calcular el excedente del consumidor asociado a un precio cualquiera (P_0) como

$$\begin{aligned} EC &= \int_{P_0}^{\infty} Q(P)dP \\ &= \int_{P_0}^{\infty} P^e dP \\ &= \left.\frac{P^{e+1}}{e+1}\right|_{P_0}^{\infty} \\ &= -\frac{P_0^{e+1}}{e+1}. \end{aligned} \tag{13.15}$$

Por tanto, en competencia perfecta,

$$EC_c = -\frac{c^{e+1}}{e+1}, \tag{13.16}$$

y, en monopolio,

$$EC_m = -\frac{\left(\dfrac{c}{1+\frac{1}{e}}\right)^{e+1}}{e+1}. \tag{13.17}$$

[5]El estudio clásico es el de A. Harberger. "Monopoly and Resource Allocation", *American Economic Review*, mayo de 1954, pp. 77-87. Harberger estima que estas pérdidas son del orden del 0.1% del producto nacional bruto.

EJEMPLO 13.2 *CONTINUACIÓN*

Si se toma el cociente de estas dos medidas del excedente tendremos

$$\frac{EC_m}{EC_c} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{e}}\right)^{e+1} \tag{13.18}$$

Por ejemplo, si $e = -2$, este cociente es igual a $\frac{1}{2}$; es decir, en el caso del monopolio el excedente del consumidor es la mitad que el excedente del consumidor en competencia perfecta. Para casos más elásticos, esta cifra es algo menor, porque las restricciones para la producción son más significativas en el caso del monopolio. Para elasticidades más próximas a –1, el cociente aumenta.

Beneficios. En este caso, también es posible calcular la transferencia del excedente del consumidor al beneficio del monopolio con bastante facilidad. El beneficio del monopolio está determinado por

$$\begin{aligned}\pi_m &= P_m Q_m - cQ_m = \left(\frac{c}{1+\frac{1}{e}} - c\right)Q_m \\ &= \left(\frac{-\frac{c}{e}}{1+\frac{1}{e}}\right)\cdot\left(\frac{c}{1+\frac{1}{e}}\right)^{e} = -\left(\frac{c}{1+\frac{1}{e}}\right)^{e+1}\cdot\frac{1}{e}.\end{aligned} \tag{13.19}$$

Si se divide esta expresión entre la ecuación 13.16 tendremos

$$\frac{\pi_m}{EC_c} = \left(\frac{e+1}{e}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{e}}\right)^{e+1} = \left(\frac{e}{1+e}\right)^{e} \tag{13.20}$$

Para $e = -2$, este cociente es $\frac{1}{4}$. En consecuencia, una cuarta parte del excedente del consumidor en competencia perfecta es transferido a los beneficios del monopolio. Por tanto, en este caso, la pérdida de eficiencia económica del monopolio también es $\frac{1}{4}$ del excedente del consumidor en competencia perfecta.

Pregunta: Supongamos que $e = -1.5$. ¿Qué parte del excedente del consumidor se pierde por la monopolización? ¿Qué parte es transferida a los beneficios del monopolio? ¿Estos resultados por qué difieren del caso donde $e = -2$?

Monopolio, calidad del producto y durabilidad

El monopolio puede ejercer su poder de mercado en otras dimensiones además del precio de mercado de su producto. Si el monopolio tiene cierta injerencia en el tipo, la calidad o la diversidad de los bienes que produce, entonces no sería nada extraño que sus decisiones no sean iguales a las que habría tomado si fuera una organización que compite en ese mercado. Sin embargo, no está claro si el monopolio producirá bienes de mayor o de menor calidad que los que produciría en competencia perfecta. Todo depende de la naturaleza de la demanda de consumo y de los costos de la empresa.

Un análisis formal de la calidad

Supongamos que la disposición de los consumidores a pagar por la calidad (X) está determinada por una función de demanda inversa $P(Q, X)$, donde

$$\partial P/\partial Q < 0, \partial P/\partial X > 0.$$

Si los costos de producción de Q y X están determinados por $C(Q, X)$, el monopolio elegirá Q y X para maximizar

$$\pi = P(Q, X)Q - C(Q, X). \qquad (13.21)$$

Las condiciones de primer orden para obtener un máximo son

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = P(Q, X) + Q\frac{\partial P}{\partial Q} - C_Q = 0 \qquad (13.22)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = Q\frac{\partial P}{\partial X} - C_X = 0. \qquad (13.23)$$

La primera de estas ecuaciones repite la regla acostumbrada de que el ingreso marginal es igual al costo marginal para las decisiones del nivel de producción. La segunda ecuación expresa que, cuando Q está determinado debidamente, el monopolio debe elegir el nivel de calidad en el cual el ingreso marginal que puede alcanzar aumentando la calidad de su producto en una unidad sea igual al costo marginal por realizar ese aumento. Como cabría esperar, el supuesto de la maximización del beneficio exige que el monopolista proceda al margen de rentabilidad a lo largo de todas las dimensiones que pueda. Nótese, concretamente, que multiplicamos la valoración marginal que hace el demandante de la calidad, por el nivel de producción del monopolista.

El nivel de calidad del producto por el cual optaría en condiciones de competencia también será el que maximiza el bienestar social neto:

$$BS = \int_0^{Q^*} P(Q, X)dQ - C(Q, X), \qquad (13.24)$$

donde Q^* es el nivel de producción determinado por medio del proceso para fijar precios con base en el costo marginal, en competencia, dado el nivel de calidad X. La derivada de la ecuación 13.24 respecto a X ofrece la condición de primer orden para tener un máximo:

$$\frac{\partial BS}{\partial X} = \int_0^{Q^*} P_X(Q, X)dQ - C_X = 0. \qquad (13.25)$$

La diferencia entre la elección de la calidad especificada en la ecuación 13.23 y la de la ecuación 13.25 es que la primera toma en cuenta la valoración marginal de una unidad más de calidad suponiendo que Q está en el nivel que maximiza el beneficio, mientras que la segunda toma en cuenta el valor marginal de la calidad promedio de todos los niveles de producción.[6] Por tanto, incluso si un monopolio y una industria en competencia perfecta eligen el mismo nivel de producción, podrían optar por distintos niveles de calidad porque consideran márgenes diferentes para tomar su decisión. Sin embargo, sólo podremos prever la dirección de estas diferencias si se conocen los elementos específicos del problema. Encontrará un ejemplo en el problema 13.10.

[6]La valoración marginal promedio (VMP) de la calidad del producto está dada por

$$VMP = \int_0^{Q^*} P_X(Q, X)dQ/Q.$$

Por tanto $Q \cdot VMP = C_X$ es la regla de calidad adoptada para maximizar el bienestar neto en competencia perfecta. Compare este resultado con el de la ecuación 13.23.

Durabilidad de los bienes

Gran parte de las investigaciones sobre el efecto que la monopolización tiene en la calidad han girado en torno a los bienes duraderos. Se trata de bienes, como automóviles, casas o refrigeradores, que brindan servicios a sus dueños a lo largo de varios periodos, en lugar de ser consumidos por completo poco después de que son adquiridos. El elemento de tiempo que interviene en la teoría de los bienes duraderos lleva a muchos problemas y paradojas sumamente interesantes. El interés inicial por el tema surgió con la interrogante que preguntaba si los monopolios producirían bienes que duraran tanto tiempo como bienes similares producidos en competencia perfecta. El economista australiano Peter Swan[7] demostró, a principios de los años setenta, que la noción intuitiva de que los monopolios "producirían poca" durabilidad, tal como elegían un nivel de producción por debajo del de competencia, era incorrecta.

La visión de Swan fue considerar que la demanda de los bienes duraderos era la demanda de un flujo de servicios (como transporte en automóvil), a lo largo de varios periodos. Afirmaba que tanto un monopolio como un mercado en competencia buscarían minimizar el costo por ofrecer este flujo a los consumidores. Por supuesto que el monopolio elegiría un nivel de producción que restringiera el flujo de servicios para así maximizar sus beneficios, pero si suponemos rendimientos constantes a la escala en la producción, no hay motivo alguno para que la estructura del mercado afecte la durabilidad en sí. Este resultado a veces se conoce como el "supuesto de la independencia de Swan". Es decir, las decisiones relativas a la producción pueden ser analizadas por separado de las decisiones relativas a la durabilidad del producto.

Investigaciones posteriores sobre el resultado de Swan se han concentrado en demostrar cómo distintos supuestos sobre la naturaleza de un bien duradero concreto, o relajando el supuesto implícito de que todos los demandantes son iguales, pueden socavar ese resultado. Por ejemplo, el resultado depende enormemente del deterioro que sufren los bienes duraderos. El caso de una bombilla que ofrece una corriente constante de servicios hasta que pierde todo su valor, ilustraría el tipo de deterioro más simple de un bien duradero. Con este tipo de bien, las ecuaciones 13.23 y 13.25 son idénticas, por tanto el resultado de independencia de Swan sería válido. Incluso cuando los bienes se deterioran paulatinamente, el resultado de la independencia sigue siendo válido si podemos mantener un flujo constante de servicios con tan sólo reemplazar lo que se ha usado; es decir, esto requiere que los bienes nuevos y los viejos sean sustitutos perfectos e infinitamente divisibles. Por ejemplo, la pintura exterior de una casa cumpliría, más o menos, este requisito. Por otra parte, es claro que la mayor parte de los bienes no lo cumplen. Simplemente no es posible reemplazar un refrigerador muy deteriorado, por decir, por un refrigerador nuevo. Cuando se consideran estas formas más complejas de deterioro, el resultado de Swan podría no ser válido, porque ya no es posible recurrir a la noción de ofrecer un flujo de servicios dado a costo mínimo a lo largo del tiempo. Sin embargo, en estos casos más complejos no siempre ocurre que el monopolio produzca menos durabilidad que un mercado en competencia, sino que todo depende de la naturaleza de la demanda de durabilidad.

Inconsistencia del tiempo y demanda heterogénea

Concentrarse en el flujo de servicios derivado de los bienes duraderos proporciona información importante sobre la durabilidad, pero deja sin respuesta una pregunta muy importante: ¿el monopolio cuándo debería producir los bienes duraderos reales que se necesitan para ofrecer el flujo de servicios deseado? Por ejemplo, supongamos que un monopolio de bombillas decide que el nivel de producción que maximiza sus utilidades es ofrecer los servicios que brindan un millón de bombillas de 60 watts. Si la empresa decide producir un millón de bombillas en el primer periodo, ¿qué hará en el segundo periodo, por decir, antes de que se fundan algunas de las bombillas originales? Dado que el monopolio elige un punto en la curva de demanda de servicios en el cual $P > CMg$, tiene un claro incentivo para producir más bombillas en el segundo periodo reduciendo el precio un poco. Sin embargo, los consumidores pueden anticipar lo anterior, por lo cual podrían reducir su demanda en el primer periodo, en espera de una ganga. Por tanto, el plan del monopolio para maximizar su beneficio no funcionará. Ronald Coase fue el primer economista en advertir esta "inconsistencia de tiempo" que surge cuando un monopolio produce un bien duradero.[8] Coase argumentó que su presencia socavaría seriamente el posible

[7]P. L. Swan. "Durability of Consumption Goods", *American Economic Review*, diciembre de 1970, pp. 884-894.

[8]R. Coase. "Durability and Monopoly", *Journal of Law and Economics*, abril de 1972, pp. 143-149.

poder del monopolio; es decir, en el límite, los precios en competencia son el único resultado que puede prevalecer en el caso de los bienes duraderos. El plan del monopolio para obtener un beneficio de monopolio con el flujo de servicios de los bienes duraderos sólo podrá tener éxito si el monopolio establece un compromiso creíble de que no producirá más en el segundo periodo.

Los modelos recientes de la cuestión de los bienes duraderos han estudiado la afectación que sufren las elecciones de un monopolista en situaciones en las cuales hay distintos tipos de demandantes.[9] En estos casos, las cuestiones relativas a la elección óptima de la durabilidad y los compromisos creíbles se vuelven mucho más complicadas. El monopolista no sólo debe optar por un plan óptimo para cada categoría de compradores, sino que también se debe asegurar de que el plan dirigido a, por decir, los demandantes del tipo 1 no le resulte atractivo también a los demandantes del tipo 2. Estudiar estos tipos de modelos nos alejaría mucho de nuestro campo, pero en las ampliaciones de este capítulo se presentan algunas ilustraciones de cómo operan estas "restricciones compatibles con los incentivos". Está claro que se necesitan más estudios para poder entender plenamente los complejos planes de precios que adoptan los productores de bienes duraderos que ofrecen muchos productos, como Microsoft o Panasonic.

Discriminación de precios

En algunas circunstancias, el monopolio podría aumentar su beneficio alejándose de la política de un precio único para sus productos. La posibilidad de vender productos idénticos a precios distintos se conoce como discriminación de precios.[10]

DEFINICIÓN

Discriminación de precios. Un monopolio practica la *discriminación de precios* si es capaz de vender, a precios diferentes, unidades de un producto que por lo demás son idénticas.

Una estrategia de discriminación de precios será viable o no dependiendo, fundamentalmente, de que los compradores del bien no sean capaces de aplicar el arbitraje. En ausencia de costos de transacción o de información, la "ley de precio único" implica que un bien homogéneo se debe vender en todas partes al mismo precio. Por tanto, los planes de discriminación de precios están condenados al fracaso porque los demandantes que puedan comprar al monopolio el producto a precios más bajos pasarán a ser oferentes del bien para quienes tienen que pagar precios superiores más atractivos que el propio monopolio. El intermediario que busca obtener un beneficio destruiría un plan cualquiera de discriminación de precios. Sin embargo, la discriminación de precios resulta posible cuando la reventa es costosa o es posible evitarla por completo.

Discriminación de precios de primer grado o perfecta

Si un monopolista puede identificar por separado a cada comprador, entonces podría cobrar a cada uno el precio máximo que ese individuo esté dispuesto a pagar por el bien. Así, esta estrategia de discriminación de precios *perfecta* o de *primer grado* extraería todo el excedente disponible del consumidor, dejando a los demandantes, como colectivo, indiferentes entre comprar el bien del monopolista o no comprarlo. La figura 13.4 ilustra esta estrategia y supone que los compradores siguen un orden descendente en función de su disposición a pagar. El primer comprador está dispuesto a pagar hasta P_1 por Q_1 unidades de producto, por lo cual el monopolista cobra P_1 y obtiene ingresos totales por P_1Q_1, como indica el primer rectángulo sombreado en tono claro. Un segundo comprador está dispuesto a pagar hasta P_2 por $Q_2 - Q_1$ unidades de producto, por lo cual el monopolista obtiene ingresos totales de este comprador por $P_2(Q_2 - Q_1)$. Nótese que, para que esta estrategia tenga éxito, el segundo comprador no podrá revender el producto que adquiere a P_2 al primer comprador (quien paga $P_1 > P_2$).

El monopolista seguirá actuando de esta manera hasta llegar al punto en el cual el comprador marginal ya no esté dispuesto a pagar el costo marginal del bien designado como CMg en la

[9]Encontrará un resumen en M. Waldman. "Durable Goods Theory for Real World Markets", *Journal of Economic Perspectives*, invierno de 2003, pp. 131-154.

[10]Un monopolio también podría vender productos diferenciados con distintos márgenes precio-costos. Sin embargo, aquí sólo analizaremos la discriminación de precios para un monopolio que elabora un único producto homogéneo.

FIGURA 13.4 **Discriminación de precios perfecta**

En el caso de una discriminación de precios perfecta, el monopolio fija un precio diferente para cada comprador. Vende Q_1 unidades a P_1, $Q_2 - Q_1$ unidades a P_2, etcétera. En este caso, la empresa producirá Q^*, y obtendrá ingresos totales por DEQ^*0.

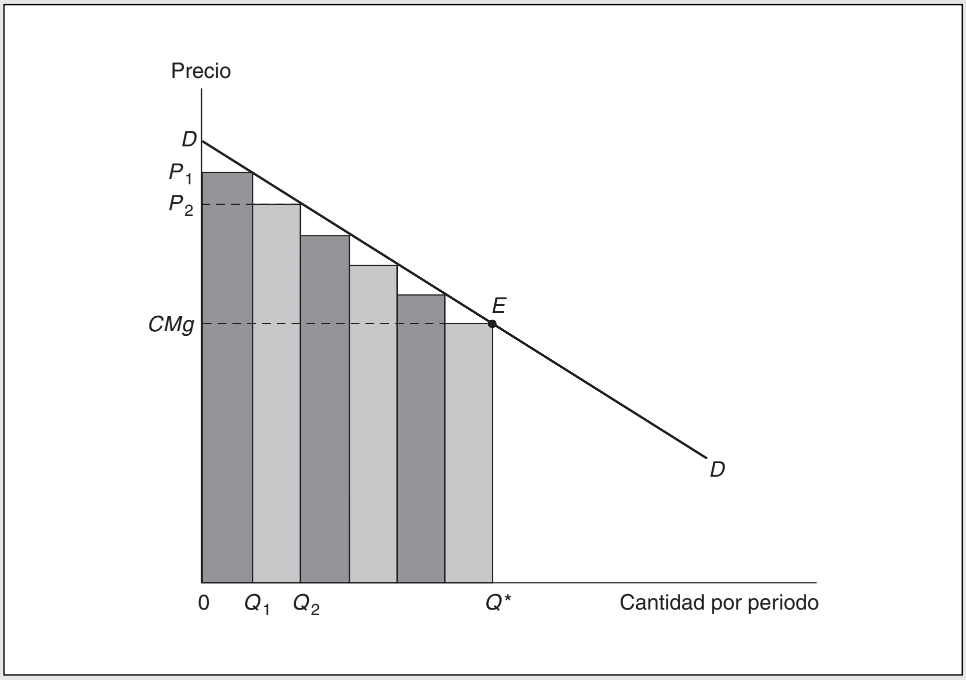


figura 13.3. Por tanto, la cantidad total producida será Q^*. Los ingresos totales recaudados estarán dados por el área DEQ^*0. En esta situación, el monopolista ha extraído todo el excedente del consumidor y no hay pérdida de eficiencia económica o de peso muerto alguna (compare las figuras 13.3 y 13.4). Por tanto, la asignación de recursos con discriminación de precios perfecta es eficiente, si bien entraña una importante transferencia del excedente del consumidor al beneficio del monopolio.

Discriminación de precios de primer grado

Consideremos de nueva cuenta el caso del monopolista fabricante de pesas del ejemplo 13.1. Dado que se venden relativamente pocas pesas de gran calidad, el monopolista podría encontrar que es posible discriminar perfectamente entre algunos deportistas de categoría mundial. En este caso, optará por producir la cantidad en la cual el comprador marginal paga exactamente el costo marginal de una pesa:

$$P = 100 - Q/20 = CMg = 0.1Q. \qquad (13.26)$$

Por tanto

$$Q^* = 666$$

y, en el margen, el precio y el costo marginal están determinados por

$$P = CMg = 66.6. \qquad (13.27)$$

Ahora podemos calcular los ingresos totales integrando:

$$R = \int_0^{Q^*} P(Q)dQ = 100Q - \frac{Q^2}{40}\Bigg|_0^{666} \tag{13.28}$$
$$= 55\,511$$

y los costos totales como

$$C(Q) = 0.05Q^2 + 10\,000 = 32\,178. \tag{13.29}$$

El beneficio total es

$$\pi = R - C = 23\,333, \tag{13.30}$$

que representa un incremento sustancial en comparación con el de la política del precio único que se analizó en el ejemplo 13.1, cuyo resultado era 15 000.

Pregunta: En este caso, ¿cuál es el precio máximo que pagaría un comprador cualquiera de pesas? Utilice este resultado para obtener una definición geométrica del beneficio.

Discriminación de precios de tercer grado por medio de la separación de mercados

La discriminación de precios perfecta coloca una importante carga de información necesaria para el monopolio; es decir, debe conocer la función de demanda de cada posible comprador. Un requisito menos estricto consistiría en suponer que el monopolio puede dividir a sus compradores en una cantidad relativamente pequeña de mercados identificables como "rural y urbano", "nacional y extranjero" o "temporada alta y baja" y aplicar una política por separado para determinar precios de monopolio en cada mercado. Para aplicar esta política basta con conocer la elasticidad-precio de la demanda en estos mercados.[11] A continuación el monopolio fija el precio en cada mercado aplicando la regla de la inversa de la elasticidad. Suponiendo que el costo marginal es el mismo en todos los mercados, esta regla da lugar a una política de determinación de precios en la cual

$$P_i\left(1 + \frac{1}{e_i}\right) = P_j\left(1 + \frac{1}{e_j}\right) \tag{13.31}$$

o

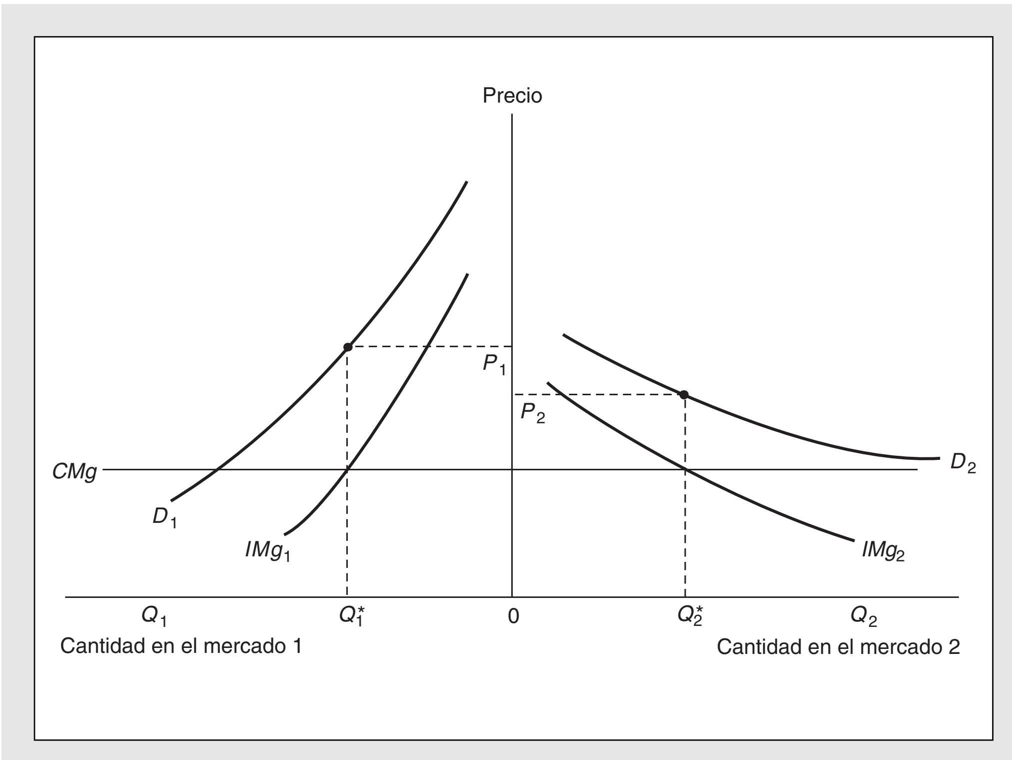
$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{\left(1 + \frac{1}{e_j}\right)}{\left(1 + \frac{1}{e_i}\right)}, \tag{13.32}$$

donde P_i y P_j son los precios que fija en los mercados i y j, cuyas elasticidad-precio de la demanda están determinadas por e_i y e_j. Una consecuencia inmediata de esta política para determinar los precios es que el precio que maximiza al beneficio será más alto en los mercados en los cuales la demanda sea menos elástica. Por ejemplo, si, $e_i = -2$ y $e_j = -3$, la ecuación 13.32 muestra que $P_i/P_j = 4/3$; es decir, los precios serán un tercio más altos en el mercado menos elástico.

[11] La discriminación de precios por medio de la separación de mercados, a veces, se conoce como discriminación de precios de *tercer grado*. En la siguiente sección abordaremos la discriminación de precios de *segundo grado*.

FIGURA 13.5 **Los mercados separados plantean la posibilidad de una discriminación de precios de tercer grado**

Si dos mercados están separados, el monopolista puede maximizar su beneficio vendiendo su producto a precios diferentes en los dos mercados. Esto implica elegir el nivel de producción en el cual $CMg = IMg$ en cada uno de los mercados. El diagrama muestra que la empresa que aplica la discriminación de precios fijará un precio más alto en el mercado que tiene la curva de demanda menos elástica.



La figura 13.5 ilustra este resultado en el caso de dos mercados que el monopolio puede atender con un costo marginal constante (*CMg*). La demanda es menos elástica en el mercado 1 que en el mercado 2 y, por tanto, la distancia entre el precio y el ingreso marginal es mayor en el primer mercado. Para maximizar su beneficio es necesario que la empresa produzca Q_1^* en el mercado 1 y Q_2^* en el mercado 2, lo cual da por resultado un precio más alto en el mercado menos elástico. Esta diferencia de precios persistirá siempre y cuando sea posible evitar el arbitraje entre los dos mercados. La política de discriminación con dos precios es, evidentemente, más rentable para el monopolio que una política de un precio único, porque la empresa siempre podrá optar por esta otra política si las condiciones del mercado ameritaran precio único.

Las consecuencias que la discriminación de precios de tercer grado tiene en el bienestar son, en principio, ambiguas. La política de discriminación, en comparación con la de precio único, requiere aumentar el precio en el mercado menos elástico y disminuirlo en el más elástico. Por tanto, los cambios tienen un efecto compensatorio en las pérdidas totales de la asignación. Un análisis más exhaustivo sugiere la conclusión, intuitivamente posible, de que la política de muchos precios será superior, desde el punto de vista de la asignación, a una política de un precio único tan sólo en aquellas situaciones en las cuales la producción total aumente gracias a la discriminación. El ejemplo 13.4 ilustra un sencillo caso de curvas de demanda lineales en cuyo caso la política de múltiples precios siempre da lugar a pérdidas más grandes en términos de asignación.[12]

---

[12]Encontrará un análisis detallado en R. Schmalensee. “Output and Welfare Implications of Monopolistic Third-Degree Price Discrimination”, *American Economic Review*, marzo de 1981, pp. 242-247.

EJEMPLO 13.4

Discriminación de precios de tercer grado

Supongamos que las curvas de demanda en dos mercados separados están determinadas por

$$Q_1 = 24 - P_1$$

y

$$Q_2 = 24 - 2P_2, \qquad (13.33)$$

y que el monopolio puede atender a estos dos mercados con un costo marginal constante igual a 6. Para maximizar el beneficio en los dos mercados es necesario que

$$IMg_1 = 24 - 2Q_1 = 6 = IMg_2 = 12 - Q_2, \qquad (13.34)$$

de modo que las elecciones óptimas son

$$\begin{aligned} Q_1 &= 9 \\ Q_2 &= 6. \end{aligned} \qquad (13.35)$$

Por tanto, los precios que prevalecen en los dos mercados son[13]

$$\begin{aligned} P_1 &= 15 \\ P_2 &= 9. \end{aligned} \qquad (13.36)$$

El beneficio del monopolio que aplica la política de dos precios son

$$\pi = (P_1 - 6)Q_1 + (P_2 - 6)Q_2 = 81 + 18 = 99. \qquad (13.37)$$

Podemos evaluar el efecto que esta política tiene en la asignación de recursos calculando las pérdidas de eficiencia económica en los dos mercados. Dado que la demanda en el mercado 1 en $P = CMg = 6$ es 18 y que la producción competitiva sería igual a 12 en el mercado 2, estas pérdidas están determinadas por

$$DW_1 = 0.5(P_1 - CMg)(18 - Q_1) = 0.5(15 - 6)\,(18 - 9) = 40.5 \qquad (13.38)$$

y

$$DW_2 = 0.5(P_2 - CMg)(12 - Q_2) = 0.5(9 - 6)\,(12 - 6) = 9. \qquad (13.39)$$

Políticas de precio único. Esta solución de la discriminación de precios de tercer grado es sostenible siempre y cuando sea posible mantener la separación de los mercados. Sin embargo, los demandantes del mercado 1 mirarán con envidia los precios más bajos que se pagan en el mercado 2 y podrían tratar de buscar alguna suerte de resarcimiento. Una posibilidad sería presionar a las autoridades del gobierno para que impongan que todos los bienes sean vendidos a un precio único. En este caso, la elección óptima del monopolista es proseguir con su política de precios en el mercado 1 ($P_1 = 15$, $Q_1 = 9$). Esta decisión excluiría las ventas en el mercado 2, porque el máximo que un demandante del mercado 2 está dispuesto a pagar es $P_2 = 12$. Es evidente que esta solución no sería óptima, dado que aumentaría la pérdida del excedente del consumidor del mercado 2, sin ganancia alguna para los participantes del mercado 1.

Otro planteamiento sería eliminar las barreras que separan a estos dos mercados, de modo que el monopolista tendría que tratar a todos los demandantes de forma idéntica. En este caso, la demanda de mercado sería

$$Q = Q_1 + Q_2 = 48 - 3P. \qquad (13.40)$$

(*continúa*)

[13] A estos precios, $e_1 = -15/9$, $e_2 = -2(9/6) = -3$. Por tanto, estas elecciones cumplen la ecuación 13.32 porque $P_1/P_2 = 5/3$.

EJEMPLO 13.4 *CONTINUACIÓN*

Ahora la función del ingreso marginal que afronta la empresa es

$$IMg = 16 - 2\,Q/3. \tag{13.41}$$

Por tanto, para maximizar el beneficio es necesario que $Q = 15$, $P = 11$. Dado que la fusión de estos mercados ha provocado que la demanda sea más sensible al precio, el monopolista optará por un precio más bajo que en el plan de un precio único regulado por el gobierno. Nótese también que el beneficio ($\pi = (P - 6) \cdot Q = 75$) es más bajo en este caso que en los dos anteriores. Las pérdidas de eficiencia económica totales también son menores en este caso:

$$DW = 0.5 \cdot (P - 6) \cdot (30 - Q) = 0.5 \cdot (5) \cdot (15) = 37.5. \tag{13.42}$$

Pregunta: Nótese que la cantidad de equilibrio de los mercados fusionados es igual que la del equilibrio con los mercados separados ($Q = 15$). ¿Esto siempre ocurre con las curvas lineales de demanda? ¿Qué implica esta situación respecto a la eficiencia de la discriminación de precios de tercer grado con esta demanda?

Discriminación de precios de segundo grado con listas de precios

Los ejemplos de discriminación de precios que se analizaron en la sección anterior exigen que el monopolio divida a los demandantes en una serie de categorías y elija un precio que maximice el beneficio en cada una de esas categorías. Otro planteamiento sería que el monopolio optara por una lista de precios, posiblemente bastante compleja, que ofreciera incentivos a los demandantes para que se separen ellos mismos en función de la cantidad que quieran comprar. Estos planes incluyen los descuentos por volumen, el requisito de una compra mínima o el pago de una cantidad fija y las ventas atadas. Los monopolios adoptarán estos planes si ofrecen un beneficio más alto que la política de un precio único, después de tener en cuenta los posibles costos de la aplicación de las listas de precios. Dado que el resultado de estas listas es que los demandantes paguen distintos precios por bienes idénticos, esta forma de discriminación de precios de segundo grado sólo es factible cuando no existe posibilidad alguna de que ocurra un arbitraje.

Tarifas en dos partes

Una forma de lista de precios que ha sido objeto de muchos estudios es la tarifa lineal en dos partes, en cuyo caso los demandantes tienen que pagar una cuota fija por el derecho a consumir el bien y un precio uniforme por cada unidad consumida. El caso típico, que Walter Oi fuera el primero en estudiar, es el del parque temático, tal vez Disneylandia, que establece un precio base de entrada y un precio marginal conocido para cada juego.[14] Podemos representar este plan en términos matemáticos empleando la tarifa que un demandante cualquiera debe pagar para adquirir q unidades del bien:

$$T(q) = a + pq, \tag{13.43}$$

donde a es la cuota fija y p el precio marginal que será pagado. Por tanto, el objetivo del monopolista consiste en elegir a y p de tal manera que maximicen sus utilidades, dada la demanda de su producto. Como el precio promedio pagado por un demandante cualquiera está determinado por

$$\bar{p} = \frac{T}{q} = \frac{a}{q} + p, \tag{13.44}$$

[14]W. Y. Oi. "A Disneyland Dilemma: Two-Part Tariffs for a Mickey Mouse Monopoly", *Quarterly Journal of Economics*, febrero de 1971, pp. 77-99. Es interesante señalar que el imperio Disney empleó una tarifa de dos partes alguna vez, pero la abandonó porque los costos de administración de los planes de pago para cada una de las diversiones resultaban demasiado elevados. Al igual que otros parques temáticos, Disney adoptó una política de precio único de admisión (el cual le seguía ofreciendo muchas posibilidades de aplicar la discriminación de precios, sobre todo en los múltiples parques de Disney World).

esta tarifa sólo es factible cuando los que pagan un precio promedio bajo, aquellos que tienen un q alto, no pueden revender el bien a los que deben pagar un precio promedio alto, aquellos que tienen un q bajo.

Un planteamiento factible descrito por Oi para establecer los parámetros de esta tarifa lineal sería que la empresa fije el precio marginal, p, igual a CMg y a continuación, fije a de forma que le permita extraer el excedente del consumidor máximo posible de un conjunto dado de compradores. Cabe suponer que los compradores están ordenados en función de su disposición a pagar. Así pues, la elección de $p = CMg$ maximizaría el excedente del consumidor de este grupo y sería posible fijar a en igualdad con el excedente correspondiente al comprador que tuviera la menor disposición a pagar. Por tanto, a este consumidor le sería indiferente comprar el bien o no, pero todos los demás compradores obtendrían ganancias netas de la compra.

Sin embargo, esta tarifa factible podría no ser la más rentable. Consideremos los efectos que un pequeño incremento de p por encima de CMg tendrá en el beneficio. Éste no provocaría cambio alguno en el beneficio obtenido del comprador menos dispuesto a pagar. La cantidad demandada bajaría ligeramente en el margen donde $p = CMg$, y una parte de lo que antes era excedente del consumidor y, por tanto, parte de la cuota fija a ahora sería un beneficio variable, dado que ahora $p > CMg$. El aumento del precio incrementaría el beneficio en el caso de todos los demás demandantes. Cada uno pagaría un poco menos por concepto de la cuota fija, pero el beneficio por unidad adquirida aumentaría en mayor cantidad.[15] En algunos casos, es posible hacer un cálculo explícito de la tarifa óptima de dos partes. El ejemplo 13.5 ilustra el caso. Sin embargo, por lo general, las tarifas óptimas dependerán de una serie de contingencias. En las ampliaciones de este capítulo se analizarán algunas de las posibilidades.

EJEMPLO 13.5

Tarifas de dos partes

Para poder ilustrar el aspecto matemático de las tarifas de dos partes, volvamos a las ecuaciones de la demanda que se presentaron en el ejemplo 13.4, pero ahora supondremos que se aplican a dos demandantes específicos:

$$\begin{aligned} q_1 &= 24 - p_1 \\ q_2 &= 24 - 2p_2, \end{aligned} \tag{13.45}$$

donde ahora p se refiere al precio marginal que afrontan los dos compradores.[16]

Una tarifa Oi. Para poder aplicar una tarifa de dos partes como la sugerida por Oi sería preciso que el monopolista estableciera $p_1 = p_2 = CMg = 6$. En consecuencia, en este caso, $q_1 = 18$ y $q_2 = 12$. Con este precio marginal, el demandante 2, el menos dispuesto a pagar de los dos, obtiene un excedente del consumidor de 36 [$= 0.5 \cdot (12 - 6) \cdot 12$]. Ésta es la cuota de admisión máxima que podría cobrar sin provocar que la persona salga del mercado. Por tanto, en este caso, la tarifa de dos partes sería $T(q) = 36 + 6q$. Si el monopolista optara por este plan de precios, sus utilidades serían

$$\begin{aligned} \pi = R - C &= T(q_1) + T(q_2) - CP(q_1 + q_2) \\ &= 72 + 6 \cdot 30 - 6 \cdot 30 = 72. \end{aligned} \tag{13.46}$$

Este beneficio es menor que aquel que obtendría con todos los planes de precios que se analizaron en el ejemplo 13.4.

La tarifa óptima. En este caso, podemos calcular la tarifa óptima de dos partes señalando que el beneficio total con esta tarifa es $\pi = 2a + (p - CMg)(q_1 + q_2)$. Por tanto, la cuota de entrada,

(*continúa*)

[15]Esto se debe a que $q_i(mc) > q_1(mc)$, donde $q_i(mc)$ es la cantidad demandada cuando $p = CMg$ para todos los compradores menos el que tiene menor disposición a pagar (persona 1). Por tanto, la ganancia que se deriva de un aumento del precio por encima del CMg $\Delta p q_i(mc)$, excede a la pérdida de utilidades de una cuota fija más baja, $\Delta p q_1(mc)$.

[16]La teoría de la maximización de la utilidad que fundamenta estas curvas de demanda es que el precio marginal pagado determina la cantidad demandada, mientras que, la cuota de admisión a determina si $q = 0$ podría ser un óptimo.

EJEMPLO 13.5 ***CONTINUACIÓN***

a, debe ser igual al excedente del consumidor que obtiene la persona 2. Al introducir los parámetros específicos de este problema tendremos

$$\begin{aligned}\pi &= 0.5 \cdot 2q_2(12-p) + (p-6)(q_1+q_2)\\ &= (24-2p)(12-p) + (p-6)(48-3p)\\ &= 18p - p^2.\end{aligned} \tag{13.47}$$

Por tanto, el beneficio máximo se obtiene cuando $p = 9$ y $a = 0.5(24 - 2p)(12 - p) = 9$. Por tanto, la tarifa óptima es $T(q) = 9 + 9q$. Con esta tarifa, $q_1 = 15$, $q_2 = 6$, y el beneficio del monopolista es 81 [$= 2(9) + (9 - 6) \cdot (15 + 6)$]. El monopolista podría optar por este plan de precios si estuviera sujeto a la presión política de tener una política de precios uniforme y de aceptar que no "sacaría del mercado" al demandante 2 con sus precios. La tarifa de dos partes permite cierto grado de diferenciación de precios ($\bar{p}_1 = 9.60$, $\bar{p}_2 = 9.75$) pero parece ser "justa", dado que todos los compradores afrontan la misma lista de precios.

Pregunta: Suponga que un monopolista pudiera optar por una cuota de admisión diferente para cada demandante. ¿Qué política de precios estaría siguiendo?

Regulación del monopolio

La regulación del monopolio natural es un tema muy importante del análisis de la economía aplicada. En casi todos los países, los sectores de los servicios públicos, de las comunicaciones y del transporte están sumamente regulados, por lo cual diseñar los procedimientos normativos que permiten que estas industrias operen de forma adecuada es un importante problema práctico. Aquí se analizarán algunos aspectos de regulación del monopolio que tienen que ver con las políticas de fijación de precios.

Fijación de precios en función del costo marginal y el dilema del monopolio natural

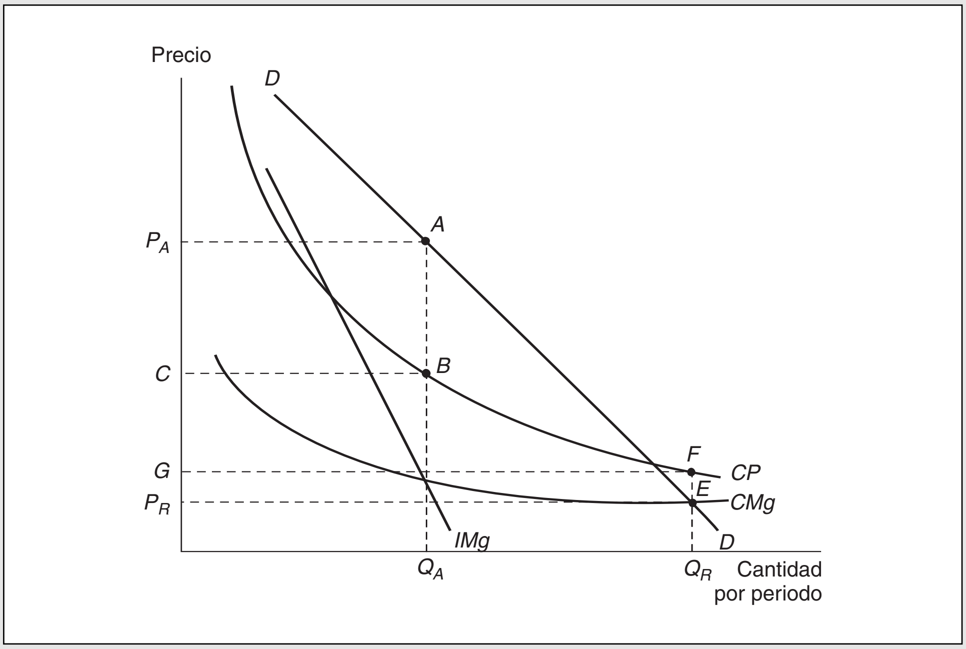
Muchos economistas consideran que es importante que los precios que fijan los monopolios regulados reflejen con precisión el costo marginal de la producción. De tal suerte, sería posible minimizar la pérdida de eficiencia económica. El principal problema que plantea una política obligatoria de fijación de precios en función del costo marginal es que requiere que los monopolios naturales operen con pérdidas. Los monopolios naturales, por definición, exhiben un costo promedio decreciente dentro de un amplio intervalo de niveles de producción. Las curvas de costos de una empresa así lucirán similares a las que muestra la figura 13.6. En ausencia de regulación, el monopolio produciría el nivel de producción Q_A y recibiría un precio de P_A por su producto. En esta situación el beneficio está dado por el rectángulo P_AABC. Por el contrario, una autoridad reguladora podría determinar un precio de P_R para el monopolio. A este precio, la demanda será Q_R y el costo marginal de producir este nivel de producción también será P_R. Por tanto, se habrá logrado una fijación de precios en función del costo marginal. Por desgracia, dada la pendiente negativa de la curva del costo promedio de la empresa, el precio P_R (= costo marginal) está por debajo del costo promedio. Con este precio regulado, el monopolio debe operar con pérdidas por una cantidad igual a $GFEP_R$. Dado que ninguna empresa puede operar indefinidamente con pérdidas, esto plantea un dilema para la autoridad reguladora: deberá abandonar su objetivo de fijación de precios en función del costo marginal o el gobierno deberá subsidiar al monopolio eternamente.

Sistema de precios de dos estratos

Una salida para el dilema de la fijación de precios en función de los costos marginales consiste en aplicar un sistema de precios múltiples. Con este sistema, se permite que el monopolio fije un precio alto para algunos usuarios, mientras que mantiene un precio bajo para los usuarios

FIGURA 13.6 **Regulación de precios en el caso de un monopolio con costos decrecientes**

Dado que el monopolio natural exhibe costos promedio decrecientes, el costo marginal queda por debajo del costo promedio. Por tanto, la imposición de una política que obliga la fijación del precio en función del costo marginal implicará que la empresa opere con pérdidas. Por ejemplo, con un precio de P_R, se logrará el objetivo de fijación del precio igual al costo marginal, pero necesariamente habrá pérdidas operativas por la cantidad de $GFEP_R$.



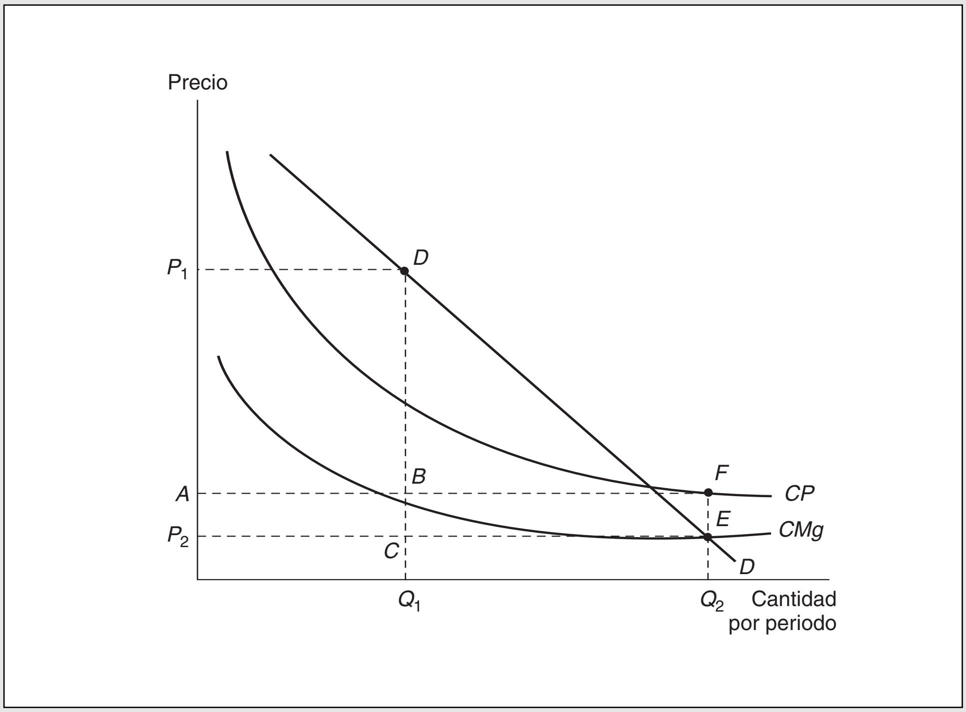
marginales. Así, los demandantes que pagan el precio alto, están subsidiando las pérdidas provocadas por los consumidores que pagan un precio bajo. La figura 13.7 muestra este sistema de fijación de precios. En este caso, la comisión reguladora ha decidido que algunos usuarios paguen un precio relativamente alto, P_1. A ese precio la demanda es Q_1. Además, se ofrece a otros usuarios, supuestamente los que no comprarían el bien al precio de P_1 un precio más bajo, P_2. Este precio menor genera una demanda adicional de $Q_2 - Q_1$. Por tanto, se produce una cantidad total de Q_2 a un costo promedio *A*. Con este sistema de precios, el beneficio de las ventas a los demandantes que pagan el precio alto (dadas por el rectángulo P_1DBA) compensa las pérdidas de las ventas a un precio reducido (*BFEC*). Es más, en el caso del "usuario marginal", se está siguiendo la regla de fijación de precios en igualdad al costo marginal; es decir, el usuario "dentro del margen" es el que subsidia a la empresa para que ésta no opere con pérdidas. En la práctica tal vez no sea tan sencillo implementar planes de precios que mantengan la fijación de precios en función del costo marginal y que cubran los costos operativos, de hecho muchas comisiones reguladoras emplean estos planes de precios que, intencionalmente, discriminan a ciertos usuarios, por ejemplo, a las empresas y benefician a otros, los consumidores.

Regulación de la tasa de rendimiento

Otro planteamiento que se aplica en muchas situaciones reguladas consiste en permitir que el monopolio fije un precio por encima del costo marginal suficiente para obtener una tasa de rendimiento sobre su inversión "justa". A continuación, se dedica un gran esfuerzo analítico a definir el concepto de tasa "justa" y a desarrollar formas que permitirían medirla. Desde el punto de vista de la economía, algunas de las interrogantes más interesantes respecto a este procedimiento giran en torno a cómo la actividad reguladora afecta los factores que elige la empresa. Por ejemplo, si la tasa de rendimiento que se permite a las empresas excede a la que podrían obtener los propietarios sobre sus inversiones en condiciones de competencia, entonces tendrán un

FIGURA 13.7 **Plan de precios en dos estratos**

Si una comisión reguladora fija un precio alto (P_1) a algunos usuarios y un precio bajo (P_2) ésta podrá 1) imponer que los precios sean fijados en función del costo marginal y 2) crear una situación en la cual el beneficio derivado de una clase de usuario (P_1DBA) subsidie a la pérdida de la otra clase ($BFEC$).



incentivo para emplear una cantidad relativamente mayor del factor capital que la que realmente minimizaría los costos. Asimismo, si los reguladores normalmente tardan en tomar las decisiones de cuál será la tasa permitida, podrían estar dando a las empresas incentivos, que de lo contrario no tendrían, para minimizar costos. A continuación se analizará brevemente un modelo formal de estas posibilidades.[17]

Un modelo formal

Supongamos que una compañía de electricidad regulada tiene una función de producción de forma

$$q = f(k, l). \tag{13.48}$$

La tasa de rendimiento real sobre el capital de esta empresa se definirá como

$$s = \frac{pf(k, l) - wl}{k}, \tag{13.49}$$

donde p es el precio del producto de la empresa, que depende de q, y w es el salario del factor trabajo. Si la regulación limita s que sea igual a, por ejemplo, $\bar{s}$, entonces el problema de la empresa consistirá en maximizar el beneficio

$$\pi = pf(k, l) - wl - vk \tag{13.50}$$

[17]Este modelo está basado en H. Averch y L. L. Johnson. "Behavior of the Firm Under Regulatory Constraint", *American Economic Review*, diciembre de 1962, pp. 1052-1069.

sujeto a la restricción de la regulación. La expresión lagrangiana de este problema será

$$\mathscr{L} = pf(k, l) - wl - vk + \lambda[wl + \bar{s}k - pf(k, l)]. \tag{13.51}$$

Nótese que si $\lambda = 0$, la regulación es ineficaz y el monopolio se comporta como una empresa cualquiera que maximiza su beneficio. Si $\lambda = 1$, la ecuación 13.51 se reduce a

$$\mathscr{L} = (\bar{s} - v)k, \tag{13.52}$$

que, suponiendo que $\bar{s} > v$ (como debe ser para que la empresa no gane una cantidad inferior a la tasa de rendimiento sobre el capital que prevalece en otras partes), significa que este monopolio contratará cantidades infinitas de capital, el cual es un resultado poco plausible. De ahí que $0 < \lambda < 1$. Las condiciones de primer orden para obtener un máximo son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial l} &= pf_l - w + \lambda(w - pf_l) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k} &= pf_k - v + \lambda(\bar{s} - pf_k) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= wl + \bar{s}k - pf(k, l) = 0. \end{aligned} \tag{13.53}$$

La primera de estas condiciones implica que el monopolio regulado contratará cantidades adicionales del factor trabajo hasta el punto en el cual $pf_l = w$; resultado que es válido para toda empresa que maximiza el beneficio. Sin embargo, en el caso del factor capital, la segunda condición implica que

$$(1 - \lambda)pf_k = v - \lambda\bar{s} \tag{13.54}$$

o

$$pf_k = \frac{v - \lambda\bar{s}}{1 - \lambda} = v - \frac{\lambda(\bar{s} - v)}{1 - \lambda}. \tag{13.55}$$

Dado que $\bar{s} > v$ y que $\lambda < 1$, la ecuación 13.55 implica que

$$pf_k < v. \tag{13.56}$$

La empresa contratará más capital, y obtendrá una menor productividad marginal del capital, que el que contrataría en condiciones sin regular. Por tanto, el "exceso de capitalización" puede constituir una mala asignación de recursos provocada por la regulación en el caso de algunas compañías de servicios públicos. Si bien aquí no se empleará este marco analítico general para analizar otras cuestiones relativas a la regulación, es importante señalar esa posibilidad.

Concepción dinámica del monopolio

La concepción estática de que las prácticas monopolistas distorsionan la asignación de recursos representa el razonamiento económico principal a favor de las políticas antimonopolio. Sin embargo, no todos los economistas consideran que el análisis estático debería ser determinante. Algunos autores, el más notable J. A. Schumpeter, han destacado el papel favorable que el beneficio del monopolio desempeña en el proceso de desarrollo económico.[18] Estos autores ponen un énfasis considerable en la innovación y en la capacidad de determinados tipos de empresas para lograr adelantos técnicos. En este contexto, el beneficio que obtienen las empresas monopolistas aporta fondos que podrían invertir en investigación y desarrollo. Mientras que las empresas en competencia perfecta se deben conformar con una tasa de rendimiento normal sobre el capital invertido, los monopolios tienen fondos "excedentes" que les permiten emprender el arriesgado proceso de investigación. Sin embargo, lo más importante tal vez sería que la posibilidad de lograr una posición monopolista, o el deseo de mantener esa posición, ofrece un

[18]Véase, por ejemplo, J. A. Schumpeter. *Capitalism, Socialism and Democracy,* 3a. ed., Harper & Row, Nueva York, 1950, especialmente el capítulo 8.

importante incentivo para mantenerse un paso delante de los posibles competidores. Las innovaciones en nuevos productos y en tecnologías productivas que ahorran costos pueden estar totalmente relacionadas con la posibilidad de monopolización. Sin esta posición monopolista, la empresa innovadora no podría captar todo el beneficio de la innovación.

Schumpeter destacaba que la monopolización de un mercado puede hacer que a la empresa le resulte más barato planificar sus actividades. El hecho de ser la única fuente de suministro de un producto suprime muchas de las contingencias que debe afrontar una empresa en un mercado competitivo. Por ejemplo, un monopolio tal vez no tenga que erogar tanto para gastos de ventas (por ejemplo, publicidad, identificación de la marca, visitas a los minoristas) como tendría que erogar en el caso de una industria más competitiva. Por otra parte, un monopolio puede saber más sobre la curva de demanda concreta de su producto y se puede adaptar más rápidamente a las condiciones cambiantes de la demanda. Por supuesto que determinar si estas supuestas cualidades del monopolio compensa o no sus desventajas en términos de asignación y distribución es una cuestión empírica. No es posible recurrir a argumentos *a priori* para responder a estas interrogantes sobre la innovación y al ahorro de costos. Es necesario analizar los mercados del mundo real.

RESUMEN

En este capítulo se analizaron modelos de mercados en los cuales sólo hay un oferente monopolista. A diferencia del caso de la competencia perfecta que analizamos en la parte 4, los monopolios no exhiben un comportamiento precio aceptante. Por el contrario, el monopolista puede elegir la combinación de precio-cantidad sobre la curva de demanda del mercado que le resulte más rentable. Así, este poder de mercado da lugar a una serie de consecuencias:

- El nivel de producción más rentable para el monopolista será aquél en el cual el ingreso marginal sea igual al costo marginal. En este nivel de producción, el precio excederá al costo marginal. La rentabilidad del monopolista dependerá de la relación entre el precio y el costo promedio.
- En comparación con la competencia perfecta, el monopolio implica que los demandantes registran una pérdida del excedente del consumidor. Una parte de este excedente se transfiere al beneficio del monopolio, mientras que parte de la pérdida del excedente del consumidor representa una pérdida de eficiencia económica del bienestar económico general. Es un indicador de una ineficiencia en el sentido de Pareto.
- Los monopolistas pueden optar por distintos niveles de calidad respecto a los de las empresas en competencia perfecta. Los mercados de los bienes de segunda mano pueden limitar las elecciones de los monopolios de bienes duraderos.
- Un monopolio podría aumentar su beneficio todavía más por medio de la discriminación de precios; es decir, fijando diferentes precios para distintas categorías de compradores. La posibilidad de que el monopolio pueda aplicar la discriminación de precios dependerá de su capacidad para evitar que ocurra arbitraje entre los compradores.
- Los gobiernos muchas veces optan por regular al monopolio natural, empresa cuyo costo promedio es decreciente dentro de un amplio intervalo de niveles de producción. El tipo de mecanismos de regulación adoptados puede afectar el comportamiento de la empresa regulada.

PROBLEMAS

13.1

Un monopolista puede producir con costos marginales y medios constantes de $CP = CMg = 5$. La empresa afronta una curva de demanda del mercado de su producto que está determinada por $Q = 53 - P$.

a. Calcule la combinación precio-cantidad que maximiza el beneficio del monopolista. También calcule el beneficio del monopolista.

b. ¿Qué nivel de producción fabricaría esta industria en competencia perfecta, cuando el precio es igual al costo marginal?

c. Calcule el excedente del consumidor obtenido por los consumidores en el inciso anterior. Demuestre que éste excede a la suma del beneficio del monopolista y el excedente del consumidor del inciso a. ¿Cuál es el valor de la pérdida de eficiencia económica debida a la monopolización?

13.2

Un monopolista afronta una curva de demanda del mercado que está determinada por

$$Q = 70 - P.$$

a. Si el monopolista produce con costos medios y marginales constantes e iguales a $CM = CMg = 6$, ¿qué nivel de producción elegirá el monopolista para maximizar el beneficio? ¿Cuál será el precio para este nivel de producción? ¿A cuánto ascenderá el beneficio del monopolista?

b. Supongamos, por el contrario, que el monopolista tiene una estructura de costos en la cual los costos totales están descritos por

$$C(Q) = 0.25Q^2 - 5Q + 300.$$

Si el monopolista afronta la misma demanda de mercado e ingreso marginal, ¿qué combinación precio-cantidad elegirá ahora para maximizar el beneficio? ¿A cuánto ascenderá el beneficio?

c. Supongamos ahora que una tercera estructura de costos explica la posición del monopolista, con costos totales determinados por

$$C(Q) = 0.0133Q^3 - 5Q + 250.$$

De nueva cuenta, calcule la combinación de precio-cantidad del monopolista que maximiza el beneficio. ¿A cuánto ascenderá el beneficio? (*Pista:* como siempre, iguale $CMg = IMg$ y utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación de segundo orden para Q.)

d. Dibuje la curva de demanda del mercado, la curva del ingreso marginal y las tres curvas del costo marginal correspondientes a los incisos a, b y c. Nótese que la capacidad del monopolista para obtener utilidades está limitada por 1) la curva de demanda del mercado, con su correspondiente curva del ingreso marginal, y 2) la estructura de costos que fundamenta la producción.

13.3

Una sola empresa monopoliza todo el mercado de artefactos y puede producir con costos promedio y marginales constantes de

$$CM = CMg = 10.$$

Inicialmente, el producto de la empresa tiene una curva de demanda del mercado determinada por

$$Q = 60 - P.$$

a. Calcule la combinación de precio-cantidad que maximiza el beneficio de la empresa. ¿A cuánto asciende el beneficio de la empresa?

b. Supongamos ahora que la curva de demanda del mercado se desplaza hacia fuera, pronunciándose más, y que está determinada por

$$Q = 45 - 0.5P.$$

¿Cuál es ahora la combinación de precio-cantidad que maximiza el beneficio de la empresa? ¿A cuánto asciende el beneficio?

c. En vez de emplear los supuestos del inciso b, supongamos que la curva de demanda del mercado se desplaza hacia fuera, y se hace más plana, y está determinada por

$$Q = 100 - 2P.$$

¿Cuál es ahora la combinación de precio-cantidad que maximiza el beneficio de la empresa? ¿A cuánto asciende el beneficio?

d. Dibuje las tres situaciones de los incisos a, b y c. Utilizando sus resultados, explique por qué no hay una auténtica curva de oferta en el caso del monopolio.

13.4

Supongamos que el mercado de Hula Hoops está monopolizado por una sola empresa.

a. Dibuje el equilibrio inicial de este mercado.

b. Supongamos ahora que la demanda de Hula Hoops se desplaza ligeramente hacia fuera. Demuestre que, por lo general y, contrariamente a lo que ocurre en competencia perfecta, no es posible predecir el efecto que este desplazamiento de la demanda tendrá en el precio de mercado de los Hula Hoops.

c. Consideremos tres formas posibles en que la elasticidad-precio de la demanda podría cambiar cuando la curva de demanda se desplaza: podría aumentar, disminuir o permanecer constante. Consideremos también que los costos marginales del monopolista podrían estar aumentando, disminuyendo o ser constantes en el intervalo en el cual el ingreso marginal es igual al costo marginal. Por tanto, hay nueve combinaciones distintas de tipos de desplazamiento de la demanda y de configuraciones de la pendiente del costo marginal. Analice cada una de estas posibilidades para determinar cuándo es posible hacer una predicción exacta sobre el efecto que un desplazamiento de la demanda tendrá en el precio de los Hula Hoops.

13.5

Supongamos un mercado monopolista con una función de demanda en la cual la cantidad demandada depende no sólo del precio de mercado (P) sino también de la cantidad de publicidad que contrata la empresa (A, medida en dólares). La forma específica de esta función es

$$Q = (20 - P)(1 + 0.1A - 0.01A^2).$$

La función de costos de la empresa monopolista está determinada por

$$C = 10Q + 15 + A.$$

a. Supongamos que no se contrata publicidad ($A = 0$). ¿Qué nivel de producción elegirá la empresa que maximiza el beneficio? ¿Qué precio de mercado tendrá este nivel de producción? ¿A cuánto ascenderá el beneficio del monopolio?

b. Ahora dejemos que la empresa también elija el nivel óptimo de sus gastos en publicidad. En esta situación, ¿qué nivel de producción elegirá? ¿Cuál será el precio de mercado de esta producción? ¿Cuál será el nivel de publicidad? ¿A cuánto ascenderá el beneficio de la empresa en este caso?

Pista: Podrá resolver más fácilmente el inciso b suponiendo que, en lugar de la cantidad, el monopolio elige el precio que maximiza el beneficio.

13.6

Los impuestos aplicados al monopolio a veces producen resultados diferentes a los del caso de la competencia perfecta. Este problema analiza algunos de esos casos. Podemos analizar la mayor parte de ellos empleando la regla de la inversa de la elasticidad (ecuación 9.13 o 13.1).

a. Consideremos primero un impuesto *ad valorem* sobre el precio de un bien del monopolio. Este impuesto disminuye el precio neto que recibe el monopolio de P a $P(1 - t)$, donde t es la tasa fiscal proporcional. Demuestre con una curva lineal de demanda y un costo marginal constante que la imposición de este impuesto provoca que el precio aumente una cantidad inferior al monto completo del impuesto.

b. Supongamos que la curva de demanda del inciso a fuera una curva de elasticidad constante. Demuestre que el precio ahora aumentaría en cantidad exactamente igual al monto completo del impuesto. Explique la diferencia entre estos dos casos.

c. Describa un caso en el cual la imposición de un impuesto *ad valorem* a un monopolio provocaría que el precio aumentara en una cantidad superior al monto del impuesto.

d. Un impuesto específico es un monto fijo por unidad de producto. Si la tasa fiscal es de τ por unidad, la recaudación fiscal total será τQ. Demuestre que la imposición de un impuesto específico a un monopolio disminuirá la producción y aumentará el precio más que la imposición de un impuesto *ad valorem* que recauda la misma cantidad de ingresos.

13.7

Supongamos que un monopolio puede producir un nivel de producción cualquiera que desee, con un costo marginal (y promedio) constante de \$5 por unidad. Supongamos que el monopolio vende sus bienes en dos mercados distintos, separados por cierta distancia. La curva de demanda del primer mercado está determinada por

$$Q_1 = 55 - P_1,$$

y la curva de demanda del segundo mercado está determinada por

$$Q_2 = 70 - 2P_2.$$

a. Si el monopolista puede mantener la separación entre los dos mercados, ¿qué nivel de producción debería fabricar en cada mercado y qué precio habrá en cada uno? ¿Cuál será el beneficio total en esta situación?

b. ¿Cómo cambiaría su respuesta si a los demandantes sólo les costara \$5 transportar los bienes entre los dos mercados? ¿Cuál sería el nuevo nivel de utilidades del monopolista en esta situación?

c. ¿Cómo cambiaría su respuesta si los costos de transporte fueran nulos y la empresa se viera obligada a aplicar una política de precio único?

d. Supongamos que la empresa puede adoptar una tarifa lineal de dos partes, en la cual los precios marginales deben ser iguales en los dos mercados, pero la cuota única para entrar podría variar. ¿Qué política de fijación de precios deberá seguir la empresa?

13.8

Supongamos que una industria en competencia perfecta produce artefactos a un costo marginal constante de \$10 por unidad. Los costos marginales monopolizados aumentan a \$12 por unidad porque se deben pagar \$2 a los grupos de cabilderos para mantener la posición privilegiada de los productores de artefactos. Supongamos que la demanda de mercado de estos artefactos está determinada por

$$Q_D = 1000 - 50P.$$

a. Calcule el nivel de producción y los precios en competencia perfecta y en el caso del monopolio.

b. Calcule la pérdida total del excedente del consumidor con la monopolización de la producción de artefactos.

c. Dibuje sus resultados y explique en qué difieren del análisis habitual.

13.9

Supongamos que el gobierno desea combatir los efectos indeseables que la monopolización tiene en la asignación empleando un subsidio.

a. ¿Por qué un subsidio de pago único no lograría el objetivo del gobierno?

b. Utilice una gráfica para demostrar cómo un subsidio por unidad de producto podría lograr el objetivo del gobierno.

c. Supongamos que el gobierno quiere que su subsidio maximice la diferencia entre el valor total del bien para los consumidores y el costo total del bien. Demuestre que para conseguir este objetivo debería igualar

$$\frac{t}{P} = -\frac{1}{e_{Q,P}},$$

donde t es el subsidio por unidad y P es el precio competitivo. Explique sus resultados intuitivamente.

13.10

Supongamos que un monopolista fabrica pilas alcalinas que pueden tener distintas vidas útiles (X). Supongamos también que la demanda (inversa) de los consumidores depende de la vida útil de las pilas y de la cantidad (Q) adquirida de acuerdo con la función

$$P(Q, X) = g(X \cdot Q),$$

donde $g' < 0$. Es decir, a los consumidores sólo les importa el producto de la cantidad por la vida útil. Están dispuestos a pagar lo mismo por muchas pilas de poca duración que por unas pocas de larga duración. Supongamos que los costos de las pilas están determinados por

$$C(Q, X) = C(X)Q,$$

donde $C'(X) > 0$. Demuestre que, en este caso, el monopolio optará por el mismo nivel de X que una industria en competencia, a pesar de que los niveles de producción y los precios podrían diferir. Explique su resultado.

(*Pista:* considere que XQ es un bien compuesto.)

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Posner, R. A. "The Social Costs of Monopoly and Regulation", *Journal of Political Economy 83*, 1975, pp. 807-827.

Un análisis de la probabilidad de que los monopolios destinen recursos a crear barreras a la entrada y, por lo mismo, pudieran entrañar costos más altos que las empresas en competencia perfecta.

Schumpeter, J. A. *Capitalism, Socialism and Democracy,* 3a. ed., Harper & Row, Nueva York, 1950.

Defensa clásica del papel que el emprendedor y la utilidad económica desempeñan en el proceso de crecimiento de la economía.

Spence, M. "Monopoly, Quality, and Regulation", *Bell Journal of Economics*, abril de 1975, pp. 417-429.

Desarrolla el enfoque de calidad en el producto utilizado en este libro y proporciona un análisis detallado de los efectos del monopolio.

Stigler, G. J. "The Theory of Economic Regulation", *Bell Journal of Economics and Management Science 2*, primavera de 1971, p. 3.

Uno de los primeros planteamientos de la hipótesis del comportamiento que "captura" al regulador; es decir que la industria captura a la autoridad que presuntamente la regula y que usa a dicha autoridad para que imponga barreras a la entrada y así poder aumentar más sus utilidades.

Tirole, J. *The Theory of Industrial Organization,* MIT Press, Cambridge, MA, 1989, caps. 1-3.

Un análisis muy completo de la teoría de la determinación de precios y la elección de producción en los monopolios.

Varian, H. R. *Microeconomic Analysis,* 3a. ed., W. W. Norton, Nueva York, 1992, cap. 14.

Presenta un análisis sucinto del papel que las restricciones de la compatibilidad de incentivos desempeñan en la discriminación de precios de segundo grado.

AMPLIACIONES

Planes de tarifas óptimas

En el capítulo 13 se analizaron algunos ejemplos sencillos de formas en las que un monopolio puede aumentar sus utilidades aplicando una discriminación de precios de segundo grado; es decir, estableciendo listas de precios (o "cuotas") que animan a los compradores a dividirse solos en distintos segmentos del mercado. Aquí se verá este tema un poco más a fondo, porque el análisis de las tarifas óptimas tiene gran variedad de aplicaciones en muchos campos de la teoría microeconómica.

Estructura del problema

Para analizar, en un contexto sencillo, las cuestiones relativas a las listas de precios para cada demandante, se define la "función de valoración" como

$$V_i(q) = P_i(q) \cdot q + S_i, \tag{i}$$

donde $P_i(q)$ es la función inversa de demanda del individuo i y S_i es el excedente del consumidor. Por tanto V_i representa el valor total que para el individuo i tiene que realizar una cantidad q, de transacciones, lo cual incluye el gasto total en el bien más el valor obtenido del excedente del consumidor. Aquí también supondremos que sólo hay dos demandantes,[1] o grupos homogéneos de demandantes, y que la persona 1 tiene mayor preferencia por este bien que la persona 2, en el sentido que

$$V_1(q) > V_2(q) \tag{ii}$$

para todos los valores de q. Suponemos que el monopolista tiene costos marginales constantes (denotados por c) y que elige una lista de tarifas (ingresos), $T(q)$, que maximiza el beneficio determinado por

$$\pi = T(q_1) + T(q_2) - c(q_1 + q_2), \tag{iii}$$

donde q_i representa la cantidad elegida por la persona i. Al seleccionar la lista de tarifas que consigue diferenciar a los consumidores, el monopolista afronta dos restricciones de "compatibilidad de incentivos". Para garantizar que la persona que tiene poca demanda (2) es atendida, de hecho, es necesario que

$$V_2(q_2) - T(q_2) \geq 0. \tag{iv}$$

Es decir, la persona 2 debe obtener un beneficio neto de su elección óptima, q_2. La persona 1 (el individuo con una demanda alta) también debe obtener una ganancia neta del nivel de consumo que haya elegido (q_1) y debe preferir esta elección a la de la persona 2:

$$V_1(q_1) - T(q_1) \geq V_1(q_2) - T(q_2). \tag{v}$$

Si el monopolista no reconoce esta restricción, puede descubrir que la persona 1 opta por la lista de precios destinada a la persona 2, destruyendo así el objetivo de lograr que los propios consumidores seleccionen solos la separación del mercado. Dada esta estructura general, podemos pasar a ilustrar una serie de características interesantes del problema del monopolista.

A13.1 Superioridad en el sentido de Pareto

Si permitimos que el monopolista se aparte de un plan simple de un solo precio tendremos la posibilidad de adoptar listas de tarifas "superiores en el sentido de Pareto", con las cuales todas las partes de la transacción mejoran su situación. Por ejemplo, supongamos que el precio que maximiza el beneficio del monopolista es P_M. Con este precio, la persona 2 consume q_2^M y recibe un valor neto de este consumo de

$$V_2(q_2^M) - P_M q_2^M. \tag{vi}$$

Una lista de tarifas en la cual

$$T(q) = P_M q \text{ por } q \leq q_2^M$$

y

$$T(q) = A + \bar{P}q \text{ por } q > q_2^M, \tag{vii}$$

donde $A > 0$ y $c < \bar{P} < P_M$, puede producir utilidades más altas para el monopolista y mayor bienestar para la persona 1. En concreto, consideremos el caso de valores de A y $\bar{P}$ de modo que

$$A + \bar{P}q_1^M = P_M q_1^M$$

o

$$A = (P_M - \bar{P})q_1^M, \tag{viii}$$

donde q_1^M representa el consumo de la persona 1 con una política de un precio único. Por tanto, en este caso, A y $\bar{P}$ están fijados de forma que la persona 1 siga teniendo capacidad para comprar q_1^M con esta nueva lista de precios. Sin embargo, dado que $\bar{P} < P_M$, la persona optará por $q_1^* > q_1^M$. Dado que la persona podría haber comprado q_1^M pero que en cambio ha elegido q_1^* la persona estará en mejor situación con la nueva lista. Ahora, el beneficio del monopolista está determinado ahora por

$$\pi = A + \bar{P}q_1 + P_M q_2^M - c(q_1 + q_2^M) \tag{ix}$$

y

$$\pi - \pi_M = A + \bar{P}q_1 - P_M q_1^M - c(q_1 - q_1^M), \tag{x}$$

[1]Las generalizaciones a casos con muchos demandantes no son triviales. Para un análisis de esta cuestión, véase Wilson (1993), capítulos 2-5.

donde π_M es el beneficio del monopolio con un precio único $[= (P_M - c)(q_1^M + q_2^M)]$. Si se sustituye A en la ecuación viii tendremos

$$\pi - \pi_M = (\bar{P} - c)(q_1 - q_1^M) > 0. \qquad \text{(xi)}$$

Por tanto, esta nueva lista de precios también proporciona más utilidades al monopolio; parte de las cuales podría compartir con la persona 2. La lista de precios es superior, en el sentido de Pareto, a un monopolio de precio único. El concepto de que las listas para distintas partes pueden ser superiores en el sentido de Pareto se ha empleado no sólo para el análisis de la discriminación de precios, sino también para el diseño de los planes de impuestos y de los mecanismos de subastas (véase Willig, 1978).

Fijación de precios en una reserva agrícola

La posible superioridad, en el sentido de Pareto, de las listas complejas de tarifas fue empleada por R. B. W. Smith (1995) para estimar un método de costo mínimo para que el gobierno de Estados Unidos financiara el Programa de Conservación de Reservas para Explotaciones Agrícolas. El plan específico que analiza el autor mantendría una reserva de 34 millones de acres sin producir en un año cualquiera. Smith calculó que si se empleaba un sistema de tarifas no lineales, cuidadosamente diseñado, entonces este programa podría costar únicamente 1000 millones de dólares anuales.

A13.2 Ventas atadas

A veces, un monopolio puede vender dos bienes que van juntos. Esta situación plantea una serie de posibilidades para aplicar planes de discriminación de precios. Por ejemplo, consideremos el caso de las impresoras láser que se venden con cartuchos de tinta o los aparatos de juegos electrónicos que se venden con juegos adicionales patentados. En este caso, la situación para la fijación de precios es análoga a la que se analizó en el capítulo 13; es decir, los consumidores normalmente compran una unidad del producto básico, la impresora o el aparato de juegos, y, con ello, pagan su cuota de "admisión". A continuación, consumen una cantidad variable de los productos atados, el cartucho o el juego patentado. Dado que el análisis del capítulo 13 sugiere que el monopolio del producto atado elegirá un precio que exceda al costo marginal, se producirá una pérdida de bienestar respecto a la situación en la cual el bien atado es producido en competencia. Esta razón tal vez explique por qué la ley prohíbe las ventas atadas en algunos casos. Sin embargo, la prohibición no necesariamente mejorará el nivel de bienestar si el monopolio se niega a atender a los consumidores que tienen poca demanda, en ausencia de las ventas atadas (Oi, 1971).

Automóviles y vino

Una forma en la cual se logran las ventas atadas es creando múltiples variantes de calidad que atraen a distintas clases de consumidores. Los fabricantes de automóviles han sido especialmente ingeniosos a la hora de diseñar variantes de calidad para sus modelos básicos (por ejemplo, el Accord de Honda viene en configuraciones DX, LX, EX y SX) que actúan como bienes atados porque separan a los consumidores en distintos nichos de mercado. Un estudio realizado por J. E. Kwoka en 1992, analiza el caso particular de un fabricante estadounidense (Chrysler) y muestra cómo se logra la segmentación del mercado por medio de las variantes de la calidad. El autor calcula que esta segmentación da por resultado una transferencia significativa del excedente del consumidor a las empresas.

Por lo general, este tipo de discriminación de precios en el caso de un bien atado no será posible si el bien también es producido en condiciones de competencia. En este caso, el bien atado se venderá al costo marginal, y la única posibilidad para que el monopolista observe un comportamiento discriminador será fijar el precio del bien básico, es decir, que varíe las "cuotas de admisión" de los distintos demandantes. Sin embargo, en algunos casos muy especiales, la elección de la cuota de admisión conferirá al monopolista poder de monopolio en el bien atado, a pesar de que pierda poder por las condiciones de competencia. Por ejemplo, Locay y Rodríguez (1992) analizan el caso de la fijación del precio de los vinos en los restaurantes. En este caso, las decisiones del grupo de preferir un determinado restaurante pueden conferir poder de monopolio al propietario del restaurante al permitirle aplicar la discriminación de los precios del vino en los comensales que tienen claras preferencias por distintas cosechas. Sin embargo, la necesidad de atraer a grupos de consumidores al restaurante limita al propietario, por lo cual su poder para la discriminación de precios no es tanta como en el escenario de un monopolio puro.

Referencias

Kwoka, J. E. "Market Segmentation by Price-Quality Schedules: Some Evidence from Automobiles", *Journal of Business*, octubre de 1992, pp. 615-628.

Locay, L. y A. Rodríguez. "Price Discrimination in Competitive Markets", *Journal of Political Economy*, octubre de 1992, pp. 954-968.

Oi, W. Y. "A Disneyland Dilemma: Two-Part Tariffs on a Mickey Mouse Monopoly", *Quarterly Journal of Economics*, febrero de 1971, pp. 77-90.

Smith, R. B. W. "The Conservation Reserve Program as a Least Cost Land Retirement Mechanism", *American Journal of Agricultural Economics*, febrero de 1995, pp. 93-105.

Willig, R. "Pareto Superior Non-Linear Outlay Schedules", *Bell Journal of Economics*, enero de 1978, pp. 56-69.

Wilson, W. *Nonlinear Pricing*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

Capítulo 14

MODELOS TRADICIONALES DE COMPETENCIA IMPERFECTA

En este capítulo se analizan algunos modelos para fijar los precios en mercados que se encuentran entre los polos de la competencia perfecta, en un extremo, y el monopolio en el otro. Si bien no podemos emplear un modelo único para explicar todas las formas posibles de esta competencia imperfecta, se analizarán algunos elementos básicos comunes a muchos de los modelos que se emplean en la actualidad. Con este fin, nos centraremos en tres temas específicos: 1) la determinación de los precios de bienes homogéneos en mercados en los cuales hay relativamente pocas empresas; 2) la diferenciación de productos y la publicidad en estos mercados, y 3) el efecto que la posibilidad de que una empresa pueda entrar o salir de la industria tiene en los resultados, a largo plazo, de los mercados en competencia imperfecta. Así pues, en cierto sentido, este capítulo habla de cómo podemos relajar los supuestos del modelo de competencia perfecta, así como de los resultados que se derivan de cambiar dichos supuestos. En este análisis, las conclusiones del modelo de la competencia perfecta ofrecen un útil punto de referencia porque todo aquello que se aleje de la norma de la competencia puede implicar pérdidas de eficiencia. Se emplearán dos criterios concretos para esta comparación: 1) si los precios en competencia imperfecta son iguales a los costos marginales o no lo son, y 2) si habrá producción, a largo plazo, con el costo promedio mínimo. Veremos que los mercados en competencia imperfecta con frecuencia carecen de una de estas características deseables de la competencia perfecta o de las dos. En el capítulo 15 volveremos a analizar muchos de estos temas desde la perspectiva de la teoría de juegos.

Los precios en un oligopolio homogéneo

En esta sección se analizará la teoría general de cómo se fijan los precios en mercados en los cuales unas cuantas empresas producen un bien homogéneo único. Al igual que antes, supondremos que el mercado está en competencia perfecta del lado de la demanda; es decir, supondremos que hay muchos demandantes y que cada uno de ellos es precio aceptante. Asimismo, supondremos que no hay costos de transacción ni de información, de modo que el bien en cuestión obedece a la ley de un precio y que podemos hablar, sin ambigüedades, de "*un*" precio del bien. Más adelante, en este mismo capítulo, se relajará este supuesto cuando analicemos la diferenciación de productos. En esta sección también supondremos que hay una n cantidad fija de empresas idénticas, considerando que n será un número relativamente pequeño. Más adelante, se analizará un ejemplo numérico del duopolio, en cuyo caso $n = 2$, pero por el momento, no existe motivo alguno para restringir nuestro análisis a un número específico dado. A lo largo de esta sección supondremos que n es fijo, pero posteriormente, en este mismo capítulo, se permitirá que varíe en razón de la entrada y la salida de empresas que ocurren en respuesta a la rentabilidad de las mismas.

Estructura básica del modelo

Se denotará la producción de cada empresa de nuestro modelo como $q_i (i = 1 \ldots n)$. Dado que hemos supuesto que las empresas son idénticas, la simetría de los costos exigirá normalmente que estas producciones sean iguales, si bien es cosa simple permitir que haya ciertas diferencias entre las empresas. Denotaremos la función inversa de la demanda del bien analizado con $f(Q)$, que muestra el precio, P, que los demandantes, como colectivo, están dispuestos a pagar por un nivel cualquiera de producción de la industria. Es decir,

$$P = f(Q) = f(q_1 + q_2 + \cdots + q_n). \tag{14.1}$$

El problema de la decisión de cada una de las empresas consiste en maximizar su propio beneficio (π_i), dado el precio de mercado del bien y el costo total de la empresa, que están dados por $C_i(q_i)$. Por lo tanto, la meta de la empresa será maximizar

$$\begin{aligned}\pi_i &= Pq_i - C_i(q_i)\\ &= f(Q)q_i - C_i(q_i)\\ &= f(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)q_i - C_i(q_i).\end{aligned} \tag{14.2}$$

Al final de cuentas, la mayor parte de las cuestiones que se abordan en esta sección giran en torno a la forma en la cual las empresas eligen el nivel de producción que maximiza su beneficio. Los resultados, en términos matemáticos tal vez demasiado simplificados, dependerán precisamente de lo que supongamos en cuanto a cómo debemos diferenciar la ecuación 14.2 para calcular el beneficio máximo. En términos económicos, la interrogante central es cómo supone una empresa que reaccionarán otras ante las decisiones que tome.

Aquí se analizarán cuatro modelos posibles, los cuales aparecen resumidos en las siguientes definiciones. Veremos que estos distintos modelos ofrecen resultados bastante diferentes y que los equilibrios que surgen del modelo, con variaciones en las conjeturas, generalmente son indefinidos, salvo en algunos casos especiales.

DEFINICIÓN

Modelos para fijar el precio de los oligopolios. *Modelo cuasi competitivo:* Supone un comportamiento precio aceptante de todas las empresas (se considera que P es fijo).

Modelo del cártel: Supone que las empresas se pueden coludir perfectamente para elegir el nivel de producción de la industria y, por tanto, P.

Modelo de Cournot: Supone que la empresa i cuando toma sus decisiones, considera que la producción de la empresa j es fija ($\partial q_j/\partial q_i = 0$).

Modelo de las conjeturas sobre las variaciones: Supone que el nivel de producción de la empresa j estará en función de las variaciones de la producción de la empresa i ($\partial q_j/\partial q_i \neq 0$).

Modelo cuasi competitivo

En este modelo, como ocurre en el caso de la competencia perfecta, cada una de las empresas es precio aceptante. Es decir, cada una de ellas supone (es muy probable que erróneamente) que sus decisiones no afectarán al precio de mercado. En este caso, la condición de primer orden para maximizar las utilidades es que

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = P - \frac{\partial C_i(q_i)}{\partial q_i} = 0 \tag{14.3}$$

o

$$P = CMg_i(q_i) \qquad (i = 1, n). \tag{14.4}$$

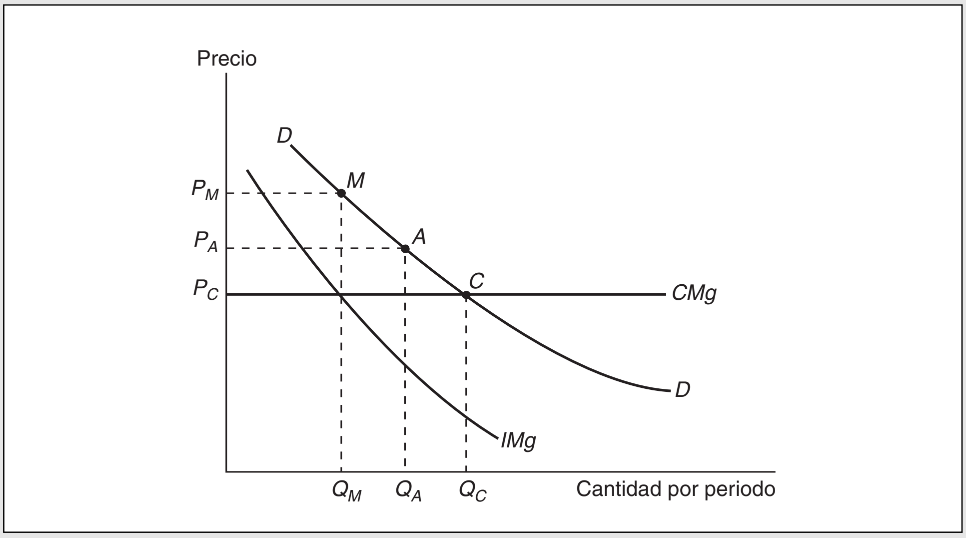
Estas n ecuaciones de la oferta, junto con la ecuación de la demanda que vacía el mercado,

$$P = f(Q) = f(q_1 + q_2 + \cdots + q_n), \tag{14.5}$$

garantizarán que este mercado alcance una solución de competencia a corto plazo. En la figura 14.1, esta solución está ilustrada como el punto C para el caso de un costo marginal constante.

FIGURA 14.1 **Distintas soluciones al problema de fijación de precios en el oligopolio**

El equilibrio de mercado en un oligopolio se puede dar en muchos puntos sobre la curva de demanda. En esta figura, que supone que el costo marginal es constante en todos los niveles de producción, el equilibrio cuasi competitivo se produce en el punto *C*, el equilibrio del cártel se produce en el punto *M* y la solución de Cournot en el punto *A*. Entre los puntos *M* y *C*, se pueden dar muchas otras soluciones, dependiendo del supuesto específico que planteemos en tanto de las relaciones estratégicas entre las empresas.



Si bien n puede ser un número pequeño, en este caso, el supuesto de comportamiento precio aceptante da lugar a un resultado de competencia.

Modelo del cártel

Cabe aclarar que el supuesto del comportamiento tomador de precios puede ser particularmente incorrecto para las industrias que tienen pocas empresas, en las cuales cada una reconoce que su decisión tiene un efecto evidente en el precio. Una alternativa sería suponer que las empresas, como colectivo, reconocen que pueden afectar el precio y se las arreglan para coordinar sus decisiones de forma que les permita obtener un beneficio de monopolio. En este caso, el cártel actúa como un monopolio con múltiples fábricas y elige $q_1, q_2, \ldots, q_n$ para poder maximizar el beneficio total de la industria.

$$\pi = PQ - [C_1(q_1) + C_2(q_2) + \cdots + C_n(q_n)] \tag{14.6}$$

$$= f(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)[q_1 + q_2 + \cdots + q_n] - \sum_{i=1}^{n} C_i(q_i). \tag{14.7}$$

Las condiciones de primer orden para obtener un máximo son

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = P + (q_1 + q_2 + \cdots + q_n)\frac{\partial P}{\partial q_i} - CMg_i(q_i) = 0 \tag{14.8}$$

$$= IM(Q) - CMg_i(q_i) = 0 \tag{14.9}$$

Nótese que podemos expresar el ingreso marginal como una función de la producción combinada de todas las empresas porque su valor es el mismo, independientemente de cuál sea la empresa cuyo nivel de producción varía. En el punto en el cual se maximiza el beneficio, este ingreso marginal común será igual al costo marginal de producción de cada empresa. Si suponemos que estos costos marginales son iguales y constantes para todas las empresas, entonces el punto *M* de la figura 14.1 indicará la elección del nivel de producción. Dado que este plan coordinado exige un nivel de producción específico para cada empresa, éste también dictará cómo se debe distribuir el beneficio de monopolio entre todos los miembros del cártel. En conjunto, este beneficio será el más grande posible, dada la curva de demanda del mercado y la tecnología de la industria.

Viabilidad de la solución del cártel

La solución del cártel tiene tres problemas. El primero, y el más evidente, es que estas decisiones monopólicas pueden ser ilícitas. Por ejemplo, en Estados Unidos, la Sección I de la Ley Sherman (1890) prohíbe "las conspiraciones que restrinjan el comercio", por lo cual los posibles miembros de un cártel pueden esperar la visita del FBI. Existen leyes similares en muchos otros países. El segundo problema de la solución del cártel es que requiere que los directores del cártel dispongan de una cantidad de información considerable; en concreto, deben conocer la función de demanda del mercado y la función del costo marginal de cada empresa. Conseguir esta información puede ser muy caro y algunos miembros del cártel pueden ser reacios a proporcionarla. El último problema, y él más importante, es que la solución del cártel es, básicamente, inestable. Dado que cada miembro del cártel producirá un nivel de producción en el cual $P > CMg_i$, cada uno de ellos tendrá un incentivo para expandir su producción. Si los directores del oligopolio no son capaces de controlar estas "trampas", la solución de monopolio podría fallar. Las dificultades del cártel de la OPEP para fijar metas precisas para los niveles de producción de sus miembros reflejan estos problemas. En el capítulo siguiente se analizará la estabilidad de las estrategias para fijar los precios de un cártel con más detalle.

Solución de Cournot

Uno de los primeros investigadores que desarrollara un modelo de mercado con pocas empresas fue el economista francés Augustin Cournot, quien presentó un análisis formal del comportamiento del duopolio en 1838.[1] Cournot suponía, siguiendo con nuestra notación, que cada empresa reconoce que sus decisiones respecto a q_i afectan el precio, pero que sus decisiones respecto al nivel de producción no afectan las decisiones de otra empresa cualquiera. Es decir, cada empresa reconoce que $\partial P/\partial q_i \neq 0$ pero supone que $\partial q_j/\partial q_i = 0$ para todo $j \neq i$. A partir de estos supuestos, las condiciones de primer orden para maximizar las utilidades en nuestro modelo son

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = P + q_i \frac{\partial P}{\partial q_i} - CMg_i(q_i) = 0 \qquad \textbf{(14.10)}$$

(para todo $i = 1, n$). Nótese que, por esta ecuación, la empresa supone que las variaciones de q_i afecta su ingreso total tan sólo en razón de su efecto directo en el precio de mercado de sus propias ventas. Por tanto, la ecuación difiere de la solución del cártel, que toma en cuenta el efecto que una variación del precio tiene en el ingreso total de la industria (véase la ecuación 14.8) y también del caso de las conjeturas respecto a las variaciones, que veremos a continuación, el cual toma en cuenta los efectos indirectos que la producción de la empresa i tiene en la producción de la empresa j. Por lo general, las n ecuaciones de 14.10, junto con la ecuación 14.5 de la demanda que vacía el mercado, permitirán una solución de equilibrio para las variables q_1, q_2, . . . , q_n y P. Un análisis de la ecuación 14.10 que maximiza el beneficio muestra que, siempre y cuando el costo marginal esté aumentando, como suele ocurrir para alcanzar un verdadero máximo, en la solución de Cournot, la producción de cada empresa será mayor que la producción del cártel, porque el ingreso marginal "específico de cada empresa" en esa ecuación es mayor que la noción del ingreso marginal del mercado en la ecuación 14.8. Por otra parte, la producción de la empresa será inferior a la producción en competencia perfecta porque el término $q_i \cdot \partial P/\partial q_i$ de la ecuación 14.10 es negativo. Por tanto, el equilibrio del mercado se produce en un punto como A en la figura 14.1. En este punto, el precio excede al costo marginal, pero la producción es más alta y el beneficio de la industria más bajo que en el caso del monopolio.

En general, también podemos suponer que, cuanto mayor sea la cantidad de empresas en la industria, tanto más cerca estará el punto de equilibrio de Cournot al punto competitivo C. Con

[1]A. Cournot. *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth,* traducción al inglés de N. T. Bacon, Macmillan, Nueva York, 1897.

una mayor cantidad de empresas, el término $q_i \cdot \partial P/\partial q_i$ de la ecuación 14.10 se acerca a cero y, por tanto, es similar a la solución cuasi-competitiva. Encontrará una ilustración[2] de esta propiedad del límite del modelo de Cournot en el ejemplo 14.1, más adelante en este mismo capítulo. Cabe señalar que el equilibrio de Cournot descrito aquí también es un equilibrio de Nash en las estrategias de producción. Encontrará una formulación del problema de fijación de precios, en términos de la teoría de juegos, en el capítulo 15.

Modelo de las conjeturas respecto a las variaciones

Hasta ahora, nuestros modelos para determinar los precios en un oligopolio no han dado cabida a las relaciones estratégicas entre las empresas. Este supuesto es particularmente insostenible en los mercados con pocas empresas. Es evidente que Ford tiene que tomar en cuenta cómo reaccionará Toyota a sus decisiones de producción y de precios. Todas las empresas de software se deben preocupar por lo que hará Microsoft y los miembros del cártel de la OPEP se deben preocupar por las nuevas exploraciones petrolíferas en cualquier lugar del mundo. El problema que afrontan los teóricos de la economía consiste en poder captar estas consideraciones estratégicas en algún tipo de modelo analítico manejable. Un planteamiento consiste en emplear la teoría de juegos para analizar las elecciones estratégicas en un marco simplificado. En el capítulo siguiente se ilustrará cómo aplicar estos instrumentos al análisis de los mercados duopólicos. Aquí se analizan algunas de las formas que permiten integrar las cuestiones estratégicas a los modelos que ya hemos desarrollado.

La principal forma de incorporar las cuestiones estratégicas a nuestro modelo consiste en analizar los supuestos que se podría plantear una empresa respecto al comportamiento de las demás. En términos matemáticos, queremos analizar los posibles supuestos que la empresa i se puede plantear sobre cómo sus decisiones afectarán a las de la empresa j. En concreto, en el caso de cada empresa i nos interesa el valor supuesto para la derivada $\partial q_j/\partial q_i$ para todas las empresas j que no sean la propia empresa i. Dado que el valor de esta derivada será una especulación, los modelos fundados en diversos supuestos sobre su valor se conocen como modelos de las *conjeturas respecto a las variaciones*; es decir, se ocupan de las "conjeturas" de la empresa i respecto a las variaciones de la producción de la empresa j.

Hasta ahora, en nuestros modelos hemos supuesto que $\partial q_j/\partial q_i = 0$ para todo $j \neq i$. Por tanto, hemos supuesto que no existe relación estratégica alguna entre las empresas. Cuando relajamos este supuesto, la decisión de maximizar las utilidades de cada empresa se torna más compleja. Ahora, la condición de primer orden para maximizar la ecuación 14.2 pasa a ser

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = P + q_i\left[\frac{\partial P}{\partial q_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial P}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right] - CMg_i(q_i) = 0. \qquad \textbf{(14.11)}$$

Es decir, la empresa ahora no sólo se debe preocupar por cómo su propia producción afecta directamente el precio de mercado, sino que también debe tener en cuenta cómo las variaciones de su propia producción afectarán el precio de mercado en razón de los efectos en las decisiones del nivel de producción de las demás empresas. Dado que se puede plantear la cantidad que queramos de supuestos posibles sobre estas respuestas, no existe una teoría aceptada, generalmente, sobre el tipo de equilibrio que podría surgir de las respuestas que da la ecuación 14.11. Algunos modelos interesantes han sido desarrollados para el caso del duopolio y, más adelante, se mostrará un sencillo ejemplo numérico de estos modelos.

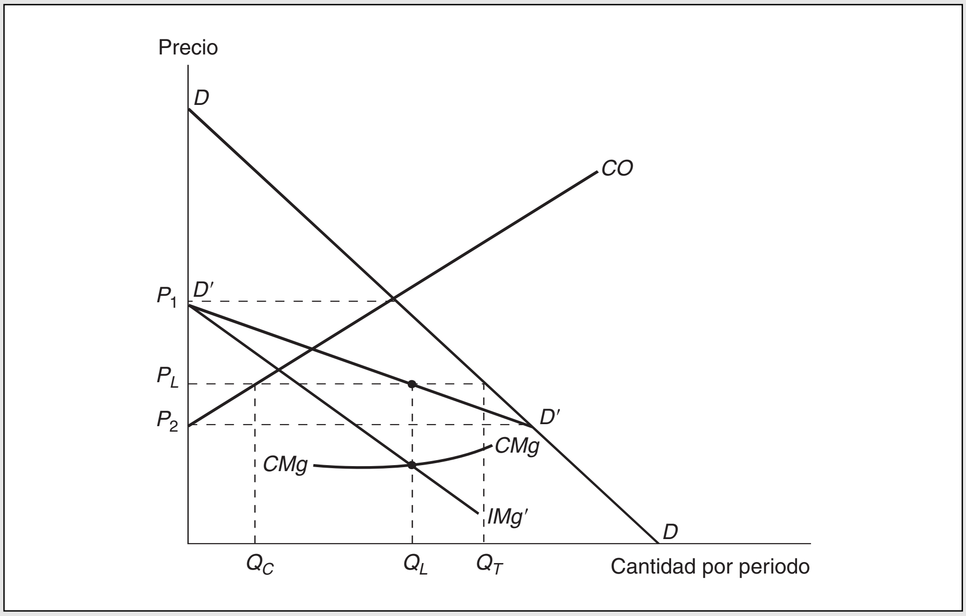
Modelo de liderazgo en precios

Una forma manejable del modelo de las conjeturas respecto a las variaciones parte del supuesto que el mercado en cuestión está compuesto por un único líder en precios y una serie de competidores cuasi-competitivos. Si suponemos que el líder es la empresa 1, una representación matemática de este mercado incluiría una reacción precio-aceptante tal como la que muestra la ecuación 14.4 para las empresas 2 . . . n, y sólo la empresa 1 tendrá una función de reacción

[2]Encontrará un análisis formal de estas cuestiones en J. Friedman. "Oligopoly Theory", en K. J. Arrow y M. D. Intriligator, eds. *Handbook of Mathematical Economics,* vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1982.

FIGURA 14.2 **Modelo formal del comportamiento de liderazgo en precios**

La curva $D'D'$ muestra la curva de demanda que afronta el líder en precios; la derivamos con una resta de la demanda del mercado (DD) menos lo que producen las empresas competitivas (CO). Dada $D'D'$, el nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa es Q_L, y el precio que prevalecerá en el mercado será P_L.



compleja del tipo que presenta la ecuación 14.11. La figura 14.2 presenta un análisis gráfico de este mercado. La curva de demanda de la figura representa la curva de la demanda total del producto de la industria, y la curva de oferta, CO representa las decisiones de oferta de todas las $n - 1$ empresas del tramo competitivo. Se trata, sencillamente, de la suma horizontal de sus curvas de costos marginales a corto plazo. Empleando estas dos curvas, derivamos la curva de demanda ($D'D'$) que afronta el líder de la industria de la manera siguiente. En el caso de un precio igual a P_1 o superior, el líder no venderá nada, porque el tramo competitivo estará dispuesto a ofertar todo lo que se demanda. En el caso de precios por debajo de P_2 el líder se queda con todo el mercado, porque el tramo competitivo no está dispuesto a ofrecer nada. Entre P_2 y P_1 construimos la curva $D'D'$ haciendo una resta del total de la demanda de mercado menos lo que ofrecerá el tramo competitivo; es decir, el líder se queda con la parte de la demanda que no es satisfecha por las empresas competitivas.

Dada la curva residual de la demanda $D'D'$, el líder puede construir la curva de su ingreso marginal (IMg') y después referirse a la curva de su costo marginal (CMg) para determinar el nivel de producción que maximiza el beneficio, Q_L. Por consiguiente, el precio de mercado será P_L. Dado este precio, el tramo competitivo producirá Q_C, y la producción total de la industria será $Q_T(= Q_C + Q_L)$.

Por supuesto que este modelo no responde preguntas tan importantes como cuál es el camino para elegir al líder en precios de una industria o qué pasa cuando un miembro del tramo competitivo decide desafiar al líder para quedarse con su puesto y su beneficio del líder. Sin embargo, este modelo sí ilustra un caso manejable del modelo de las conjeturas respecto a las variaciones que puede explicar el comportamiento para determinar precios en algunas circunstancias. Por ejemplo, se dice que el modelo, en ocasiones, ha ofrecido una explicación adecuada de cómo se fijan los precios en mercados como los de los préstamos comerciales preferentes (en este caso, los bancos centrales son los "líderes"), los productos de acero estandarizado en los años cincuenta y sesenta (U.S. Steel era la líder) y, tal vez, el cártel de la OPEP (en el cual Arabia

Saudita, por cuestiones de política y geología, desempeña el papel de líder). Por supuesto que todos estos ejemplos exigen una cantidad sustancial de investigaciones empíricas para poder determinar la validez y el alcance del modelo de liderazgo en precios.

EJEMPLO 14.1

Duopolio de los manantiales de Cournot

Como ejemplo numérico de algunas de estas ideas, veremos un caso muy sencillo con sólo dos empresas, y en el cual no hay costos de producción. Partiendo del ejemplo de dos manantiales, elaborado por Cournot en el siglo XIX, suponemos que el propietario de cada manantial tiene una gran oferta de agua, posiblemente curativa, y afronta el problema de calcular cuánta debe ofrecer al mercado. La demanda de agua de manantial está dada por la curva de demanda lineal

$$Q = q_1 + q_2 = 120 - P \tag{14.12}$$

que muestra la figura 14.3. Ahora se analizarán diversos equilibrios del mercado a lo largo de esta curva de demanda.

Solución cuasi competitiva. Dado que cada empresa tiene un costo marginal nulo, la solución cuasi competitiva dará lugar a un precio de mercado igual a 0. La demanda total será igual a 120. En este ejemplo concreto, el reparto de la producción entre los dos manantiales es indefinido porque ambos tienen un costo marginal nulo en todos los intervalos de producción. El punto *C* de la figura 14.3 señala el nivel de producción cuasi competitivo.

Solución del cártel. En este ejemplo, podemos calcular la solución del cártel maximizando el ingreso total y el beneficio de la industria:

$$\pi = PQ = 120Q - Q^2. \tag{14.13}$$

La condición de primer orden para obtener un máximo es

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 120 - 2Q = 0$$

o

$$\begin{aligned} Q &= 60 \\ P &= 60 \\ \pi &= 3600. \end{aligned} \tag{14.14}$$

De nueva cuenta, el reparto exacto de los niveles de producción y beneficios entre los dos manantiales es indefinido. El punto *M* de la figura 14.3 muestra la solución del cártel.

Solución de Cournot. Con la ecuación 14.12 resulta fácil ver que los ingresos (y los beneficios) de las dos empresas están dados por

$$\begin{aligned} \pi_1 &= Pq_1 = (120 - q_1 - q_2)q_1 = 120q_1 - q_1^2 - q_1q_2 \\ \pi_2 &= Pq_2 = (120 - q_1 - q_2)q_2 = 120q_2 - q_2^2 - q_1q_2. \end{aligned} \tag{14.15}$$

Si el propietario de uno de los manantiales supone que el otro no reaccionará a sus decisiones de producción, $\partial q_1/\partial q_2 = \partial q_2/\partial q_1 = 0$, y las condiciones de primer orden para alcanzar un máximo son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_i}{\partial q_1} &= 120 - 2q_1 - q_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} &= 120 - 2q_2 - q_1 = 0. \end{aligned} \tag{14.16}$$

(*continúa*)

EJEMPLO 14.1 *CONTINUACIÓN*

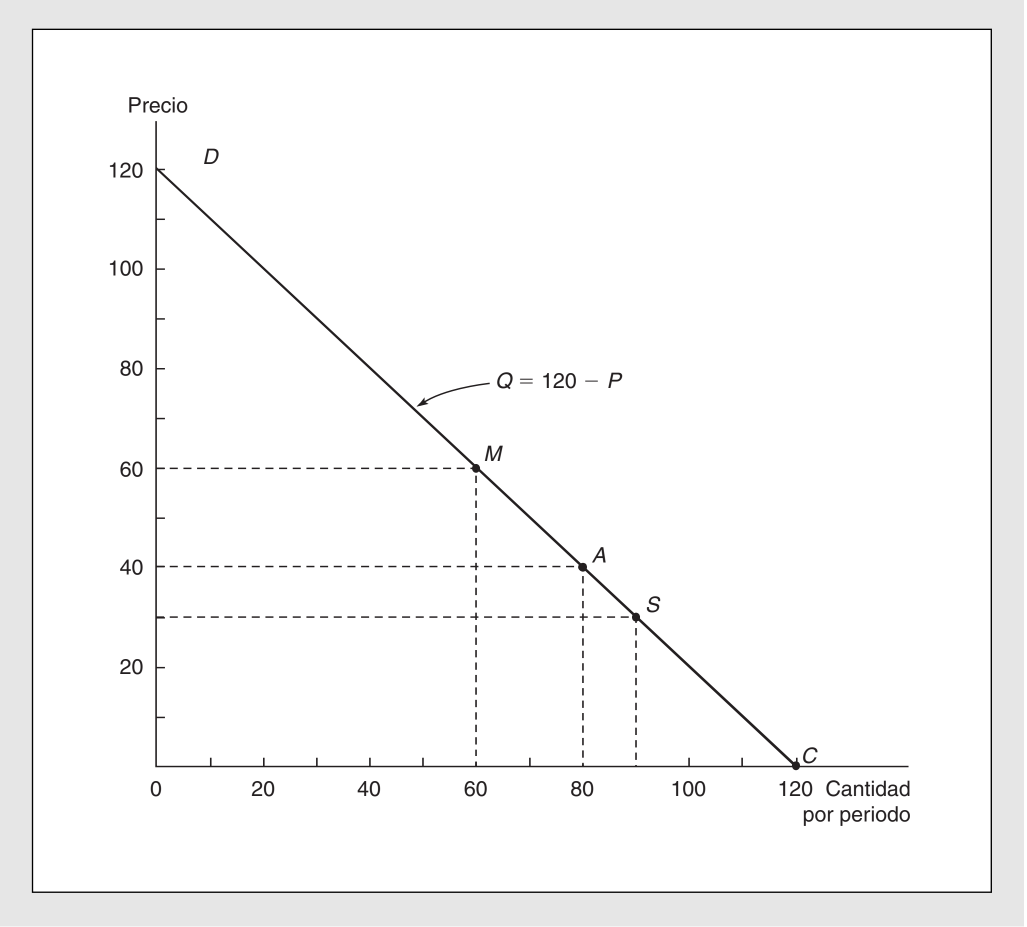
Las ecuaciones 14.16 se conocen como *funciones de reacción* porque muestran cómo reacciona cada empresa al nivel de producción de la otra. En equilibrio, estas ecuaciones deben ser mutuamente consistentes; es decir, cada empresa debe producir lo que la otra cree que producirá. Dado este supuesto, podemos resolver las ecuaciones 14.16 simultáneamente para obtener los valores de equilibrio de q_1 y q_2 para obtener

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 = 40 \\ P &= 120 - (q_1 + q_2) = 40 \\ \pi_1 &= \pi_2 = Pq_1 = Pq_2 = 1600. \end{aligned} \tag{14.17}$$

Con los supuestos de Cournot se ofrecerá una cantidad superior que en el caso del cártel, y el beneficio de la industria (3200) será un poco inferior que cuando se coordinan plenamente las decisiones de producción. El punto *A* de la figura 14.3 representa la solución de Cournot. En este caso particular, resulta fácil demostrar que, a medida que se introducen más empresas

FIGURA 14.3 **Soluciones al problema del duopolio**

Dada la curva de demanda $Q = 120 - P$, los puntos *M, A, S* y *C* representan, respectivamente, las soluciones del cártel, de Cournot, de Stackelberg y la solución cuasi competitiva al problema del duopolio.



en el análisis, el equilibrio se desplazará hacia el punto competitivo.[3] Para un caso algo más realista que también llega a esta solución, véase el problema 14.2.

Pregunta: Dado que la producción del propietario de un manantial es 40 en el modelo de Cournot, ¿por qué no puede salir ganando el otro propietario si produce más de 40 unidades? ¿Esta conclusión contradice nuestro análisis del cártel en el cual esperamos que haya trampas siempre que $P > CMg$? (Véase el capítulo 15 para una mayor explicación de este punto.)

EJEMPLO 14.2

Modelo de líder-seguidor de Stackelberg

El supuesto de un costo marginal constante hace que el modelo de líder-seguidor en precios no sea adecuado para resolver el problema de los manantiales de Cournot. En este caso, el "tramo competitivo" simplemente acapararía todo el mercado fijando un precio igual al costo marginal, en este caso cero, por lo cual no quedaría lugar en el mercado para el líder en precios. Sin embargo, existe la posibilidad de que haya otro tipo de liderazgo estratégico, la cual fue reconocida, por primera vez, por el economista alemán Heinrich von Stackelberg.[4] Éste analizó las consecuencias de suponer que una empresa (por ejemplo, la empresa 1) reconociera el proceso empleado por la otra empresa para tomar sus decisiones de producción. Es decir, supuso que la empresa 1 sabe, a partir de la ecuación 14.16, que la empresa 2 elige q_2 de forma que

$$q_2 = \frac{120 - q_1}{2}. \tag{14.18}$$

La empresa 1 ahora podrá calcular la conjetura respecto a la variación de la producción,

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}. \tag{14.19}$$

En otras palabras, la empresa 2 reduce su producción en 0.5 unidades por cada unidad que aumenta q_1. Ahora podemos reconsiderar el problema de maximización del beneficio de la empresa 1 de modo que tome en cuenta esta reacción:

$$\pi_1 = Pq_1 = 120q_1 - q_1^2 - q_1 q_2 \tag{14.20}$$

y la condición de primer orden para el máximo será

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} &= 120 - 2q_1 - q_1 \frac{\partial q_2}{\partial q_1} - q_2 = 0 \\ &= 120 - \frac{3}{2} q_1 - q_2 = 0. \end{aligned} \tag{14.21}$$

(*continúa*)

[3]Con n empresas, la ecuación 14.16 pasa a ser

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 120 - 2q_i - \sum_{j \neq i} q_j = 0 \qquad (i = 1, n).$$

Por simetría, pues cada empresa enfrenta la misma restricción de tecnología y de mercado, todas las q son iguales, por lo que $\bar{q}$,

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 120 - (n+1)\bar{q} = 0.$$

Por tanto, $\bar{q} = 120/(n+1)$ y la producción total se acerca a 120 (la producción competitiva) $= n\bar{q} = [n/(n+1)](120)$, para valores elevados de n.

[4]H. von Stackelberg. *The Theory of the Market Economy,* traducción de A. T. Peacock, Oxford University Press, Nueva York, 1952.

EJEMPLO 14.2 *CONTINUACIÓN*

Si resolvemos esta ecuación simultáneamente con la función de reacción de la empresa 2 (ecuación 14.18), se obtendrán valores de equilibrio distintos a los del modelo de Cournot:

$$\begin{aligned} q_1 &= 60 \\ q_2 &= 30 \\ P &= 120 - (q_1 + q_2) = 30 \\ \pi_1 &= Pq_1 = 1800 \\ \pi_2 &= Pq_2 = 900. \end{aligned} \tag{14.22}$$

La empresa 1 ha podido aumentar su beneficio empleando lo que conoce de la reacción de la empresa 2. El beneficio de la empresa 2 se ha visto seriamente perjudicado en este proceso. El punto *S* de la curva de demanda de la figura 14.3 muestra esta solución.

Elección del líder y competencia ruinosa. Una característica ambigua del modelo de Stackelberg es la falta de una teoría sobre cómo se elige al líder. Si cada empresa supone que la otra es la seguidora, cada una producirá 60 y se sentirá decepcionada por el resultado final (con una producción total de 120, en este ejemplo, el precio de mercado caerá a 0). Por otra parte, si cada una actúa como seguidora, la situación vuelve al equilibrio de Cournot. Sin embargo, desde la perspectiva de Stackelberg, el equilibrio de Cournot es inestable: cada empresa puede percibir el beneficio de ser líder y, en consecuencia, puede tratar de elegir su producción. Como se verá en el capítulo 15, tenemos que analizar los aspectos de la teoría de juegos de este problema más a fondo para poder evaluar todas las posibilidades que pueden surgir.

Pregunta: ¿La decisión del propietario del primer manantial de incrementar la producción porque aumenta el beneficio en este caso, mientras que no lo hizo en el propuesto en la pregunta del ejemplo 14.1?

Diferenciación del producto

Hasta este momento hemos supuesto que las empresas en oligopolio analizadas producen un bien homogéneo. Por tanto, hemos supuesto que a los demandantes les era indiferente adquirir el producto de una u otra empresa, por lo cual hemos supuesto que era válida la ley de un único precio en el mercado. Este supuesto difiere mucho de lo que ocurre en muchos mercados del mundo real. Las empresas con frecuencia destinan muchos recursos a diferenciar sus productos de los de sus competidores, empleando recursos como la calidad, las garantías y la seguridad, los servicios especiales y la publicidad de los productos. Todas estas actividades exigen que las empresas empleen recursos adicionales, y éstas optarán por emplearlos si, con ello, consiguen aumentar el beneficio. Estos intentos por variar los productos también darán lugar a que se relaje la ley del precio único, porque ahora el mercado estará compuesto por bienes que varían de una empresa a otra y los demandantes pueden tener preferencias sobre el proveedor que eligen. Esta posibilidad esfuma un poco la claridad de lo que entendemos por "mercado de un bien". Ahora se producen muchos bienes muy similares, pero no idénticos. Por ejemplo, una vez que hemos reconocido que las marcas de crema dental varían un poco de un oferente a otro, ¿deberíamos considerar que todos estos productos están en el mismo mercado? O, por el contrario, ¿deberíamos diferenciar, por ejemplo, entre productos con flúor, en forma de gel, crema dental tricolor, crema dental para fumadores, etc.? Además, considere el problema de la diferenciación espacial. Dado que los demandantes estarán más cerca de algunos vendedores que de otros, podrían ver a los vendedores más próximos de forma más favorable, porque comprarles a ellos involucra menos costos de transporte. Aquí supondremos que el mercado está compuesto por n empresas y que cada una produce un producto ligeramente distinto, pero consideramos que todos estos productos están en un solo grupo de productos. Podemos plantear este concepto con más precisión de la manera siguiente:

DEFINICIÓN

Grupo de productos. Las producciones de un conjunto de empresas constituyen un *grupo de productos* si la posibilidad de sustituir la demanda de los productos (medida por la elasticidad precio-cruzado) es muy alta con respecto a la posibilidad de sustituir los productos de esas empresas, y por otros bienes en general.

Si bien esta definición tiene sus ambigüedades (por ejemplo, los argumentos sobre la definición de un grupo de productos suelen dominar en los juicios por casos de monopolio) bastará para nuestros propósitos.[5] A continuación, se presentará un análisis formal, si bien simplificado, de cómo se fijan los precios en el mercado de este grupo de productos.

Elecciones de las empresas

De nueva cuenta, supondremos que hay n empresas compitiendo con un grupo de productos determinado. Sin embargo, ahora cada empresa puede elegir la cantidad que gastará para tratar de diferenciar su producto del de sus competidores. Para este efecto, se denotará con z_i, los recursos empleados por la i-ésima empresa, los cuales podrían incluir el gasto para opciones especiales, la calidad, la publicidad de la marca o mudarse a un lugar mejor. Ahora los costos de la empresa están determinados por

$$\text{Costo total} = C_i(q_i, z_i). \tag{14.23}$$

Dado que hay n bienes ligeramente diferentes en el grupo de productos, se debe dar cabida a la posibilidad de que haya distintos precios de mercado para cada uno de estos bienes. Se denotarán estos precios con $p_1, \ldots, p_n$ (si bien algunos de ellos podrían ser iguales). La demanda que afronta la i-ésima empresa muestra cómo el precio recibido depende de la cantidad que produzca esa empresa (q_i), de los precios que fijen todas las demás empresas (p_j para $j \neq i$), y de los intentos de la i-ésima empresa, y de todas las demás empresas, por diferenciar sus productos (z_j, $j = 1, n$). Por lo tanto, en su forma más general,

$$p_i = g(q_i, p_j, z_i, z_j), \tag{14.24}$$

donde los términos p_j y z_j pretenden incluir, respectivamente, todos los precios y las actividades de diferenciación de las demás empresas. Cabe suponer que, $\partial p_i/\partial q_i \leq 0$, $\partial p_i/\partial p_j \geq 0$, $\partial p_i/\partial z_i \geq 0$ y $\partial p_i/\partial z_j \leq 0$. Es decir, la curva de demanda que afronta la empresa individual tiene pendiente negativa y los aumentos de precio de sus competidores la desplazan hacia fuera. Las actividades de diferenciación del producto de la i-ésima empresa también pueden desplazar la curva de demanda hacia fuera, mientras que este tipo de actividades de los competidores la desplazarán hacia dentro.

El beneficio de la i-ésima empresa está determinado por

$$\pi_i = p_i q_i - C_i(q_i, z_i), \tag{14.25}$$

y, en el sencillo caso en el que $\partial z_j/\partial q_i$, $\partial z_j/\partial z_i$, $\partial p_j/\partial q_i$ y $\partial p_j/\partial z_i$ las condiciones de primer orden para un máximo son

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p_i + q_i \frac{\partial p_i}{\partial q_i} - \frac{\partial C_i}{\partial q_i} = 0 \tag{14.26}$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial z_i} = q_i \frac{\partial p_i}{\partial z_i} - \frac{\partial C_i}{\partial z_i} = 0. \tag{14.27}$$

La ecuación 14.26 es una reformulación de la condición de que el ingreso marginal debe ser igual al costo marginal para poder maximizar el beneficio. La ecuación 14.27 muestra que, al igual que en el caso de un factor productivo cualquiera, las actividades adicionales de diferenciación se deben realizar hasta el punto en el cual los ingresos adicionales que generan sean iguales a su costo marginal.[6]

---

[5]Podemos presentar una definición más precisa con fundamento en el concepto de "atributo" que presentamos en el capítulo 6. Según ese planteamiento, los bienes que comparten un conjunto común de atributos constituirían un grupo de productos.

[6]Encontrará un planteamiento alternativo en el problema 14.4.

Equilibrio de mercado

Si bien esta descripción de las elecciones de las empresas parece sencilla, éstas en realidad son bastante complejas. Dado que la curva de demanda que afronta cualquiera de las empresas depende de los precios y de las actividades de diferenciación de los productos de sus competidoras, esa curva de demanda se desplaza con gran frecuencia y, por lo mismo, sólo podremos comprender parcialmente su posición en un momento dado. Al igual que en el modelo de Cournot, la empresa se debe plantear algunos supuestos para poder tomar sus decisiones. Y, como en el modelo de las conjeturas respecto a las variaciones, lo que una empresa decida hacer puede afectar los actos de sus competidoras. Por tanto, el modelo de oligopolio diferenciado plantea cuestiones de estrategia incluso más complejas que los modelos analizados para el caso de un bien homogéneo. No es raro que sólo podamos llegar a unas cuantas conclusiones definitivas respecto a la naturaleza del equilibrio de mercado que se derivan de una situación como esta. En el ejemplo 14.3 se ilustra un tipo de equilibrio en mercados diferenciados espacialmente y más adelante, en este mismo capítulo, se retoma el modelo de competencia monopolística de Chamberlin. El problema 14.6 y varios modelos de la teoría de juegos descritos en el capítulo 15 también ofrecen información interesante sobre la diferenciación de productos.

EJEMPLO 14.3

Diferenciación espacial

Para poder desarrollar un sencillo modelo de diferenciación de productos, consideremos el caso de los puestos de helados ubicados en una playa, problema que H. Hotelling fuera el primero en estudiar allá en la década de 1920.[7] La figura 14.4 muestra esta playa (lineal) con dos puestos de helados situados en los puntos A y B. Supongamos que los demandantes se encuentran repartidos de forma uniforme a lo largo de la playa, uno por cada unidad de longitud, y que cada uno compra exactamente un barquillo de helado por periodo. Suponemos que la producción de los barquillos de helado no cuesta nada, pero que trasladarlos a la sombrilla de la persona en la playa genera un costo de c por unidad de distancia recorrida, dado que el helado se derrite. Si p_A representa el precio de un helado del puesto A y p_B el del puesto B a la persona que se encuentre en el punto E le será indiferente comprar en el puesto A o B si

$$p_A + cx = p_B + cy. \tag{14.28}$$

Como muestra la figura 14.4,

$$a + x + y + b = L, \tag{14.29}$$

donde L es la longitud de la playa. Por tanto, la coordenada del punto E es

$$x = \frac{p_B - p_A + cy}{c} \tag{14.30}$$

$$= \frac{p_B - p_A}{c} + L - a - b - x \tag{14.31}$$

o

$$x = \frac{1}{2}\left(L - a - b + \frac{p_B - p_A}{c}\right) \tag{14.32}$$

y

$$y = \frac{1}{2}\left(L - a - b + \frac{p_A - p_B}{c}\right). \tag{14.33}$$

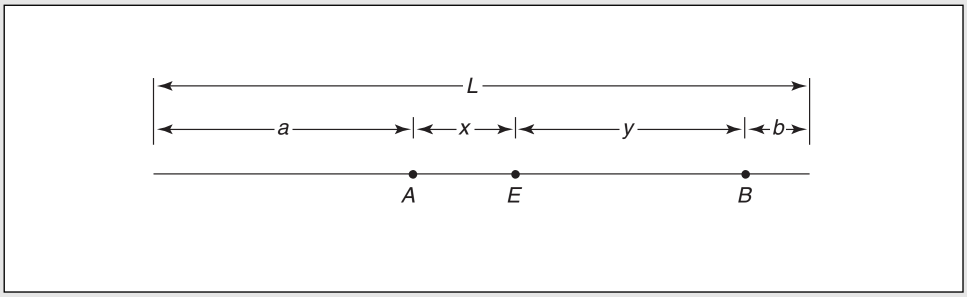
Los beneficios de las dos empresas son

$$\pi_A = p_A(a + x) = \frac{1}{2}(L + a - b)p_A + \frac{p_A p_B - p_A^2}{2c} \tag{14.34}$$

[7]H. Hotelling. "Stability in Competition", *Economic Journal*, enero de 1929, pp. 41-57.

FIGURA 14.4 **Diferenciación espacial y determinación de precios**

Los puestos de helados están ubicados en los puntos A y B a lo largo de una playa lineal de longitud L. En el equilibrio, los consumidores que estén a la izquierda de E preferirán el puesto A y los que estén a la derecha preferirán el puesto B. Los dos puestos tendrán precios distintos. Si los puestos se pueden reubicar, se podrían desplazar hacia al centro de la playa o hacia los extremos, dependiendo de los supuestos estratégicos planteados.



y

$$\pi_B = p_B(b + y) = \frac{1}{2}(L - a + b)p_B + \frac{p_A p_B - p_B^2}{2c}. \tag{14.35}$$

Cada empresa elegirá su propio precio para maximizar sus beneficios:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} &= \frac{1}{2}(L + a - b) + \frac{p_B}{2c} - \frac{p_A}{c} = 0 \\ \frac{\partial \pi_B}{\partial p_B} &= \frac{1}{2}(L - a + b) + \frac{p_A}{2c} - \frac{p_B}{c} = 0. \end{aligned} \tag{14.36}$$

Las cuales podemos resolver con facilidad para obtener

$$\begin{aligned} p_A &= c\left(L + \frac{a - b}{3}\right) \\ p_B &= c\left(L - \frac{a - b}{3}\right). \end{aligned} \tag{14.37}$$

Por lo general, estos precios dependerán de la ubicación exacta de los dos puestos y los de uno diferirán de los del otro. Por ejemplo, si suponemos que la playa tiene 100 metros de longitud, $a = 40$ metros, $b = 10$ metros y $c = \$0.01$ por metro, entonces

$$\begin{aligned} p_A &= 0.01\left(100 + \frac{30}{3}\right) \\ &= \$1.10 \\ p_B &= 0.01\left(100 - \frac{30}{3}\right) \\ &= \$0.90 \end{aligned} \tag{14.38}$$

En este problema, estas diferencias de precios surgen exclusivamente debido a los aspectos de ubicación, porque los helados son idénticos y se fabrican sin costo alguno. Dado que el puesto

(*continúa*)

EJEMPLO 14.3 *CONTINUACIÓN*

A está un poco mejor ubicado que el puesto *B* puede fijar un precio más alto por sus helados sin perder demasiados clientes. Si se emplea la ecuación 14.32 tendremos que

$$x = \frac{1}{2}(100 - 40 - 10 - 20) = 15, \tag{14.39}$$

por lo cual el puesto *A* vende 55 helados, a pesar de su precio más alto, mientras que el puesto *B* sólo vende 45. En el punto *E* a un consumidor le es indiferente caminar 15 metros hasta *A* y pagar \$1.10 o caminar 35 metros hasta *B* y pagar \$0.90. La solución es ineficiente porque un consumidor que estuviera ligeramente a la derecha del punto *E* tendría que caminar menos si prefiriera el puesto *A*, pero opta por *B* dado el poder de *A* para fijar un precio más alto.

Elecciones de ubicación. Las ideas más importantes que podemos derivar de este ejemplo podrían ser las que surgen si permitimos que los puestos cambien de ubicación con un costo nulo. Es decir, permitimos que las empresas cambien la naturaleza del producto que ofrecen (en teoría, la ubicación desempeña el papel de la variable *z* en la ecuación 14.27). El análisis formal de esta posibilidad da origen a una serie de complejidades, por lo cual bastará con una explicación intuitiva. Si nos centramos exclusivamente en la cantidad de barquillos de helado vendidos, al parecer queda claro que cada puesto tiene un incentivo para desplazarse hacia el centro de la playa. El puesto que opte por una posición alejada del centro estará sujeto a la posibilidad de que su rival se sitúe entre él y el centro y a que cubra una mayor parte del mercado. Este efecto es similar a la tendencia de los candidatos políticos a situarse en el centro cuando se trata de cuestiones polémicas; es decir, optar por una posición extrema hace que el candidato sea vulnerable a jugadas que permitirán que su rival se lleve la mayoría de los votos. En el caso de la diferenciación de productos, estos motivos tienden a fomentar la homogeneidad de los productos.

Sin embargo, en este caso, los puestos de helados están más interesados en el beneficio que en la participación de mercado. El desplazarse más cerca del rival de uno provoca que los clientes estén menos dispuestos a pagar por las ventajas de la localización y, por tanto, el beneficio bajará como consecuencia de este desplazamiento. Por tanto, al final de cuentas, las decisiones de la ubicación óptima de las empresas dependerán de las características específicas de las demandas de los consumidores por productos diferenciados espacialmente y, en algunos casos, el resultado podría ser una diferenciación máxima, ubicarse en los extremos de la playa.[8] Independientemente de las elecciones de ubicación que den por resultado un equilibrio sostenible, parece poco probable que las empresas opten por las ubicaciones socialmente óptimas que minimicen el costo total del desplazamiento.[9]

Pregunta: En este problema, ¿cambiaría algo si pudiéramos producir los helados con un costo marginal constante? ¿Si suponemos que la producción de helados tuviera un costo marginal creciente?

---

[8]Véase C. d'Aspremont, J. Gabszewicz y J. Thisse. "On Hotelling's Stability in Competition", *Econometrica*, septiembre de 1979, pp. 1145-1151.

[9]Los costos totales por caminar hasta *A* son

$$\int_0^a z dz + \int_0^x z dz = (a^2 + x^2)/2.$$

Por otra parte, los costos por caminar hasta *B* son $(b^2 + y^2)/2$. La suma de ambos se minimiza cuando

$$a = x = b = y = L/4.$$

Entrada

La posibilidad de que nuevas empresas entren en una industria desempeña un papel muy importante en el desarrollo de la teoría de la determinación de precios perfectamente competitivos. Garantiza que las nuevas empresas eliminarán el beneficio de largo plazo y que las empresas producirán en los puntos mínimos de su curva de costo promedio de largo plazo. En condiciones de oligopolio, la primera de estas fuerzas sigue operando. En la medida que la entrada sea posible, el beneficio a largo plazo estará limitado. Si la entrada no entraña costo alguno, el beneficio económico a largo plazo será nulo, como en el caso de la competencia perfecta.

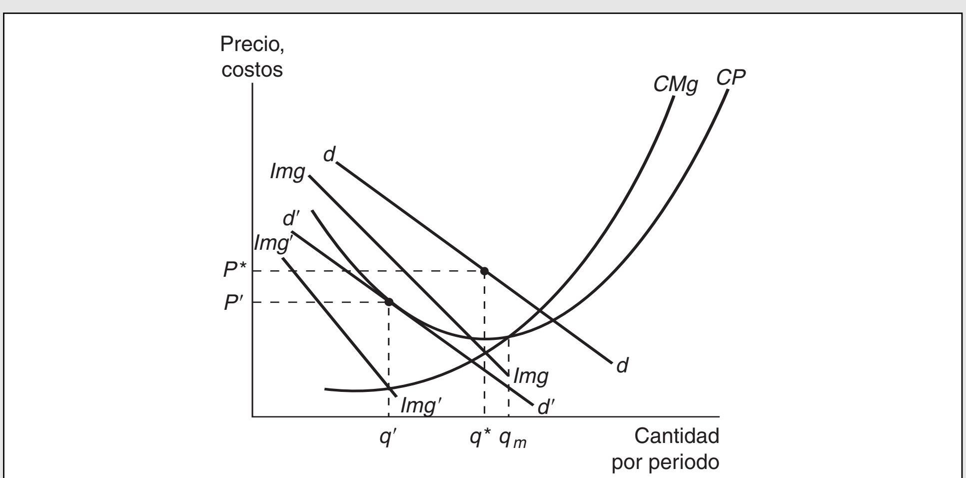
Equilibrio con un beneficio nulo

La posibilidad de que las empresas en una industria en oligopolio con libre entrada se dirijan hacia el punto mínimo de su curva de costo promedio dependerá de la naturaleza de la curva de demanda que afronten. Si las empresas son tomadoras de precios, podemos trasladar directamente el análisis presentado para el caso de la competencia perfecta; es decir, como $P = IMg = CMg$ para poder maximizar el beneficio de las empresas precio-aceptante y como $P = CP$ para que la entrada dé por resultado un beneficio nulo, la producción ocurrirá en el punto en el cual $CMg = CP$, es decir, al costo promedio mínimo.

Si las empresas en oligopolio tienen algún control sobre el precio que reciben (tal vez porque cada una produce un bien ligeramente diferenciado), cada una de ellas afrontará una curva de demanda de su producto con pendiente negativa y el análisis de la competencia perfecta no será válido. Sin embargo, la entrada puede seguir reduciendo el beneficio a cero, pero ahora la producción en el costo promedio mínimo no estará garantizada. La figura 14.5 ilustra esta situación. Al inicio, la curva de demanda que afronta la empresa está dada por *dd*, y estará obteniendo un beneficio económico. Este beneficio atraerá a nuevas empresas y la entrada desplazará la curva *dd* hacia dentro, porque ahora hay más empresas que compiten dentro de una curva dada de demanda del mercado. De hecho, la entrada puede reducir el beneficio a cero si la curva de demanda se desplaza a *d′d′*. Sin embargo, el nivel de producción que maximiza el beneficio con esta curva de demanda (q') no es el mismo nivel en el cual se minimiza el costo promedio

FIGURA 14.5 **La entrada reduce la rentabilidad en un oligopolio**

Al inicio, la curva de demanda que afronta la empresa es *dd*. El ingreso marginal está dado por *Img* y q^* es el nivel de producción que maximiza el beneficio. Si la entrada no tiene costo alguno, las nuevas empresas atraídas por la posibilidad de obtener utilidades podrían desplazar la curva de demanda del producto de la empresa hacia dentro hasta *d′d′*, donde el beneficio es nulo. En un nivel de producción de q', el costo promedio no es mínimo y la empresa exhibe un exceso de capacidad dado por $q_m - q'$.



(q_m). Por el contrario, la empresa producirá una cantidad inferior a la del nivel de producción "eficiente" y exhibirá un "exceso de capacidad", dado por $q_m - q'$. Algunos economistas plantean la hipótesis de que este resultado caracteriza a industrias como las gasolineras, las tiendas y las franquicias de restaurantes de comida rápida, en las cuales prevalece la diferenciación de productos, pero la entrada prácticamente no entraña costos.

EJEMPLO 14.4

Competencia monopolística

Edward Chamberlin fue el primero en describir el equilibrio de beneficio nulo que ilustra la figura 14.5 y lo llamó *competencia monopolística*.[10] En este modelo, cada empresa fabrica un producto ligeramente diferenciado y la entrada se realiza sin costo alguno. Como ejemplo numérico, supongamos que en un mercado hay n empresas y que cada una de ellas tiene la misma curva de costo total de forma:

$$c_i = 9 + 4q_i. \tag{14.40}$$

Cada empresa afronta también una curva de demanda de su producto de forma

$$q_i = -0.01(n-1)p_i + 0.01\sum_{j\neq i} p_j + \frac{303}{n}, \tag{14.41}$$

donde p_j son los precios que cobran las demás empresas y n es la cantidad de empresas que hay en la industria. Nótese que la curva de demanda de cada empresa es una función con pendiente negativa de su propio precio y depende de forma positiva de los precios que fijan las competidoras. Aquí se definirá un equilibrio para esta industria como una situación en la cual los precios deben ser iguales ($p_i = p_j$ para todo i y j). Otros modelos permiten cierta dispersión de los precios incluso en equilibrio, tal vez debida a una diferenciación espacial o de otro tipo. Dado nuestro equilibrio $p_i = p_j$, es evidente que $q_i = 303/n$ y $Q = nq_i = 303$. Esta solución es válida para una n cualquiera.

Estructura de mercado para el equilibrio. Para encontrar el equilibrio n, primero se analizará la elección de p_i de cada empresa maximizando el beneficio. Dado que

$$\pi_i = p_i q_i - c_i, \tag{14.42}$$

la condición de primer orden para obtener un máximo es

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} &= -0.02(n-1)p_i + 0.01\sum_{j\neq i} p_j + \frac{303}{n} \\ &\quad + 0.04(n-1) = 0,\end{aligned} \tag{14.43}$$

de modo que

$$p_i = \frac{0.5\sum_{j\neq i} p_j}{n-1} + \frac{303}{0.02(n-1)n} + 2. \tag{14.44}$$

Si se aplica la condición de equilibrio $p_j = p_i$ tendremos

$$p_i = \frac{30\,300}{(n-1)(n)} + 4. \tag{14.45}$$

Nótese que, en este caso, el precio se aproxima al costo marginal (4) a medida que aumenta n. Por lo tanto, este modelo tiene una solución competitiva en su caso extremo. El equilibrio n está determinado por la condición de cero utilidades, porque la entrada es ilimitada.

$$p_i q_i - c_i = 0. \tag{14.46}$$

[10]Véase E. Chamberlin. *The Theory of Monopolistic Competition*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1933.

Si se sustituye en esta expresión el valor de p_i calculado en la ecuación 14.44 y el valor de q calculado en la ecuación 14.41 tendremos

$$\frac{30\,300 \cdot 303}{n^2(n-1)} + \frac{4(303)}{n} = 9 + \frac{4(303)}{n}, \tag{14.47}$$

o $n = 101$. Por tanto, el equilibrio final es

$$\begin{aligned} p_i &= p_j = 7 \\ q_i &= 3 \\ \pi_i &= 0. \end{aligned} \tag{14.48}$$

Naturaleza del equilibrio. En el equilibrio calculado en la ecuación 14.48, cada empresa tiene $p_i = CP_i$ pero $p_i > CMg_i = 4$. Además, dado que

$$CP_i = 4 + \frac{9}{q_i}, \tag{14.49}$$

cada empresa tiene un costo promedio decreciente en todo el intervalo de producción, por lo cual la producción no ocurre al costo promedio mínimo. Por tanto, el equilibrio de beneficio nulo de cada empresa sería similar al de la figura 14.5. Las características de este equilibrio llevaron a Chamberlin a plantear la hipótesis de que la competencia monopolística es ineficiente en el sentido de Pareto.

Si cada posible entrante afronta una función de demanda similar a la de la ecuación 14.41, el equilibrio descrito en la ecuación 14.48 será sostenible. Ninguna nueva empresa encontraría rentable entrar en esta industria. Sin embargo, esta visión de que es sostenible podría ser demasiado estrecha. Si una posible entrante adopta un plan de producción de escala bastante grande, ella podría alcanzar un costo promedio relativamente bajo con este modelo, por ejemplo con $q = 9$, $CP = 5$. Este costo promedio bajo, otorga a la posible entrante un margen considerable para fijar el precio de su producto de forma que tiente a los consumidores de las empresas existentes a cambiar de alianzas.[11]

Pregunta: ¿Cuál es la solución eficiente en el sentido de Pareto para este mercado? ¿La solución eficiente cómo depende de la forma de la utilidad de los demandantes?

Mercados disputables y estructura de la industria

Varios economistas han puesto en duda la conclusión de que el equilibrio de Chamberlin con beneficio nulo que muestra la figura 14.5 es sostenible a largo plazo.[12] Argumentan que el modelo no toma en cuenta el efecto que las *posibles entradas* tienen en el equilibrio del mercado y que se centra exclusivamente en el comportamiento de las que entran. Por tanto, vuelven a introducir a la economía la diferencia, que H. Demsetz fuera el primero en señalar, entre competencia *en el* mercado y competencia *por el* mercado y demuestran que este segundo concepto ofrece una perspectiva más adecuada para analizar el supuesto de libre entrada.[13] Con esta perspectiva más genérica, la "mano invisible" de la competencia limita todavía más el comportamiento de las empresas, por lo cual es más probable que surjan equilibrios de competencia perfecta.

[11] En términos más generales, cabe decir que el modelo de la competencia monopolística de Chamberlin es seriamente incompleto porque no especifica las razones exactas que explican por qué la curva de demanda que afronta cada empresa tiene pendiente negativa. Si suponemos que la pendiente se debe a algún tipo de diferencia de renombre de la marca, de reputación o de ubicación entre los bienes, un modelo más completo debería analizar las elecciones de las empresas relativas a estas estrategias. Encontrará un ejemplo de este análisis en el problema 14.6.

[12] Véase W. J. Baumol. "Contestable Markets: An Uprising in the Theory of Industry Structure", *American Economic Review*, marzo de 1982, pp. 1-19; y W. J. Baumol, J. C. Panzar y R. D. Willig. *Contestable Markets and the Theory of Industry Structure*, Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, CA, 1982.

[13] H. Demsetz. "Why Regulate Utilities?", *Journal of Law and Economics*, abril de 1968, pp. 55-65.

El análisis más amplio de la entrada empieza por la definición de un "mercado perfectamente disputable":

DEFINICIÓN

Mercado perfectamente disputable. Un mercado es *perfectamente disputable* si las empresas tienen completa libertad para entrar y salir. Por otra parte, un mercado perfectamente disputable es aquél en el cual ningún posible competidor externo puede entrar reduciendo el precio y, no obstante, obtener un beneficio, porque si existieran estas oportunidades para obtener un beneficio, las posibles entrantes las aprovecharían.

Así, un mercado perfectamente disputable abandona el supuesto de la competencia perfecta respecto a un comportamiento precio aceptante, pero amplía un poco el concepto de la libre entrada, porque permite que las posibles entrantes aprovechen aquellas oportunidades de obtener un beneficio. Este supuesto, como señalaremos más adelante, no necesariamente es cierto en muchas situaciones de mercado, pero ofrece un punto de partida distinto para una teoría simplificada de la determinación de precios.

El equilibrio que muestra la figura 14.5 es insostenible en un mercado perfectamente disputable, siempre y cuando haya dos o más empresas en el mercado. En este caso, una posible entrante, que asaltara el mercado y se escondiera, podría obtener beneficio rápido acaparando las ventas de la primera empresa si vendiera q' a un precio ligeramente por debajo de P' y compensando la consiguiente pérdida vendiendo un incremento marginal de la producción a los clientes de otra u otras empresas a un precio por encima del costo marginal. Es decir, dado que el equilibrio de la figura 14.5 es $P > CMg$, ello permite que una posible entrante arrebate el mercado de una empresa con un beneficio nulo y haga pequeñas incursiones en los mercados de otras empresas en los cuales, en el margen, puede obtener algún beneficio. El único tipo de equilibrio de mercado impenetrable para este tipo de tácticas de atacar y esconderse sería un equilibrio en el cual las empresas obtuvieran beneficio nulo y el precio fuera igual al costo marginal. Como se vio en el capítulo 10, esto exige que las empresas produzcan en el punto mínimo de su curva de costo promedio a largo plazo donde $P = CMg = CP$. Incluso en ausencia de un comportamiento precio-aceptante en mercados que contienen relativamente pocas empresas, la disputabilidad perfecta ofrece una "mano invisible" que guía al equilibrio del mercado hacia un resultado de tipo competitivo.

Estructura del mercado

Podemos llevar este análisis de la disputabilidad perfecta un paso más allá demostrando cómo se determina la estructura de la industria. Si, como en el capítulo 10, q^* representa el nivel de producción en el cual se minimiza el costo promedio y Q^* representa la demanda total del mercado para el bien cuando el precio es igual al costo promedio mínimo, entonces la cantidad de empresas de equilibrio de la industria está determinada por

$$n = \frac{Q^*}{q^*}, \tag{14.50}$$

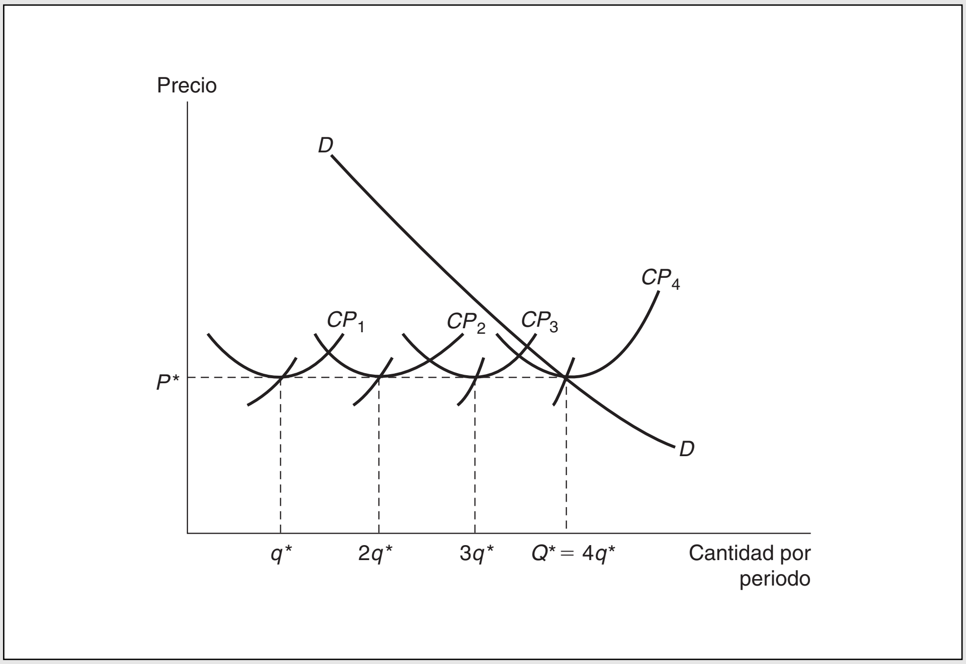
y, a diferencia del caso de la competencia perfecta, esta cifra puede ser relativamente pequeña. Por ejemplo, en la figura 14.6 hay exactamente cuatro empresas que satisfacen la demanda de mercado de Q^*, y el supuesto de mercado perfectamente disputable garantizará el comportamiento competitivo, incluso si estas empresas reconocen las relaciones estratégicas que existen entre ellas. La capacidad de las posibles entrantes de aprovechar todas las oportunidades posibles de obtener un beneficio limita notablemente los tipos de comportamiento posibles y, por tanto, genera una estructura determinada para el equilibrio del mercado.

Barreras a la entrada

Todo el análisis que hemos presentado hasta ahora, en esta sección, parte del supuesto de la libre entrada y salida. Cuando diversas barreras impiden esta flexibilidad, los resultados serán distintos. Las posibles barreras a la entrada en el caso del oligopolio incluyen muchas de las que

FIGURA 14.6 **Disputabilidad perfecta y estructura de la industria**

En un mercado perfectamente disputable, el equilibrio exige que $P = CMg = CP$. La demanda de mercado (Q^*) y el nivel de producción que minimiza el costo promedio (q^*) determinan por completo la cantidad de empresas.



analizamos en relación con el monopolio en el capítulo anterior. También incluyen aquellas que surgen específicamente de algunas características de los mercados oligopólicos. Por ejemplo, la diferenciación de productos puede crear barreras a la entrada porque fomenta una fuerte fidelidad a la marca. Asimismo, los productores pueden crear tantas marcas que no queda espacio para que las posibles entrantes hagan algo diferente (se dice que éste es lo que ocurre en la industria de los cereales preparados para el desayuno). La posibilidad de tomar decisiones estratégicas para los precios también puede evitar la entrada si las empresas existentes pueden convencer a las que quieren entrar en la industria de que no sería rentable hacerlo. Las empresas pueden, durante cierto tiempo, adoptar precios bajos, que desincentiven la entrada, para lograr su fin, pero con la intención de incrementar los precios tan pronto hayan desaparecido las posibles entrantes, suponiendo que desaparecen.

Por último, el tipo de comportamiento de atacar y esconderse totalmente flexible que supone la teoría de los mercados disputables puede estar sujeto a otros dos tipos de barreras en el mundo real. En primer término, algunos tipos de inversiones de capital realizadas por las empresas pueden ser irreversibles. Una empresa no puede construir una planta armadora de automóviles para usarla tan sólo durante una semana y después desmantelarla sin registrar pérdidas. En este caso, existen costos de salida que hacen que las incursiones recurrentes a la industria no sean rentables. Por supuesto que, en otros casos, como el de la industria camionera, no es difícil alquilar el capital durante periodos breves y, por ello, la salida planteará pocos costos. En segundo, el modelo de mercados disputables exige que la cantidad demandada responda inmediatamente a las diferencias de precios. Por el contrario, si los demandantes cambian lentamente a un nuevo producto, las posibles entrantes no podrán penetrar en el mercado con rapidez y su capacidad para disciplinar a las empresas que hay en el mercado se verá limitada. La importancia que todas estas restricciones tienen para el comportamiento del mercado es, al final de cuentas, una cuestión empírica.

EJEMPLO 14.5

Un monopolio natural disputable

Supongamos que el costo total de producir energía eléctrica (Q, medida en miles de kilowatts-hora) está determinado por

$$C(Q) = 100Q + 8000. \tag{14.51}$$

Es evidente que esta función exhibe un costo promedio decreciente en todos los intervalos de producción, por lo cual la producción de electricidad constituye un monopolio natural. La demanda de electricidad depende de su precio, en dólares por miles de kilowatts-hora, siguiendo la ecuación

$$Q_D = 1000 - 5P. \tag{14.52}$$

Si un único productor de electricidad se comporta como un monopolista, elegirá la cantidad que maximiza las utilidades como

$$IMg = 200 - \frac{2Q}{5} = CMg = 100 \tag{14.53}$$

o

$$\begin{aligned} Q_m &= 250 \\ P_m &= 150. \end{aligned} \tag{14.54}$$

Con esta elección del monopolio, las utilidades serán 4500 (= $R - C$ = 37 500 – 33 000). Este beneficio representará una meta tentadora para las posibles entrantes al sector de la electricidad. Si no hay barreras a la entrada (por ejemplo, la compañía existente no cuenta con una licencia de exclusividad) esta entrante puede ofrecer a los consumidores de electricidad un precio más bajo y, no obstante, cubrir costos. Por tanto, la solución de monopolio de las ecuaciones 14.54 podría no representar un equilibrio viable.

Una solución disputable. Si la producción de electricidad es totalmente disputable, el único precio viable bajo la amenaza de una entrada potencial es el costo promedio. Sólo ante la determinación de precios en función del costo promedio, las posibles entrantes no tendrán incentivos para amenazar la posición del monopolista. Podemos calcular este equilibrio de la manera siguiente

$$\begin{aligned} Q &= 1000 - 5P = 1000 - 5(PC) \\ &= 1000 - 5\left(100 + \frac{8000}{Q}\right), \end{aligned} \tag{14.55}$$

que da lugar a la expresión cuadrática

$$Q^2 - 500Q + 40\,000 = 0. \tag{14.56}$$

Si se obtiene factor común tendremos

$$(Q - 400)(Q - 100) = 0, \tag{14.57}$$

pero sólo la solución $Q = 400$ es una solución que evita la entrada de manera sostenida. Por tanto, con la posibilidad de disputar el mercado, el equilibrio del mercado es

$$\begin{aligned} Q_c &= 400 \\ P_c &= 120. \end{aligned} \tag{14.58}$$

La disputabilidad ha incrementado el bienestar del consumidor considerablemente respecto al que existía en la solución del monopolio. De hecho, la solución disputable es precisamente lo que podría haber elegido una comisión reguladora interesada en fijar el precio en función del costo promedio.

Pregunta: En este caso, ¿el excedente del consumidor es el máximo posible dada la restricción de que los productores de energía eléctrica no están recibiendo subsidios? ¿Cómo podríamos aumentar todavía más el excedente del consumidor con un subsidio adecuado?

RESUMEN

Muchos mercados se ubican entre los polos extremos de la competencia perfecta y el monopolio. En este capítulo hemos iniciado nuestro análisis de estos mercados introduciendo algunos de los modelos más empleados. Hemos visto que en estos mercados en competencia imperfecta cada empresa, al tomar sus decisiones, debe tener en cuenta las acciones de sus rivales, y esto agrega un elemento de muchas conjeturas al análisis. En el capítulo 15 seguiremos analizando estas interrelaciones empleando los modelos de la teoría de juegos. Aquí hemos llegado a algunas conclusiones generales sobre los modelos de mercados que contienen relativamente pocas empresas:

- Los mercados que contienen pocas empresas ofrecen posibles beneficios por medio de la formación de un cártel monopolista. Sin embargo, el cártel puede ser inestable y su mantenimiento será muy caro, porque cada miembro tiene incentivos para hacer trampas en el precio.
- En los mercados que contienen pocas empresas, las decisiones de producción y de determinación de precios son interdependientes. Cada empresa debe tener en cuenta las decisiones de sus rivales. Crear modelos de esta interdependencia es difícil, porque es necesario tener en cuenta las conjeturas respecto a las variaciones.
- El modelo de Cournot presenta un planteamiento manejable de los mercados de oligopolio, pero pasa por alto cuestiones estratégicas muy importantes.
- Podemos analizar la diferenciación de productos dentro del marco estándar de la maximización del beneficio. Habiendo productos diferenciados, la ley de un único precio deja de ser válida y las empresas pueden tener algo más de margen para tomar decisiones sobre sus precios.
- Las condiciones para la entrada son determinantes importantes de la posibilidad de sostener diversos equilibrios del mercado a largo plazo. Ante la disputabilidad perfecta, los equilibrios pueden ser similares a los de la competencia perfecta, incluso si hay relativamente pocas empresas en el mercado.

PROBLEMAS

14.1

Supongamos, en aras de la sencillez, que un monopolista no tiene costos de producción y que la curva de demanda de su producto está determinada por

$$Q = 150 - P.$$

a. Calcule la combinación de precio-cantidad que maximiza el beneficio del monopolista. Calcule también las utilidades del monopolista.

b. Supongamos que una segunda empresa entra en el mercado. Sea q_1 la producción de la primera empresa y q_2 la producción de la segunda. Ahora, la demanda del mercado estará determinada por

$$q_1 + q_2 = 150 - P.$$

Suponga que esta segunda empresa tampoco tiene costos de producción y emplee el modelo de duopolio de Cournot para determinar el nivel de producción que maximiza las utilidades de cada empresa, así como el precio de mercado. Calcule también las utilidades de cada empresa.

c. ¿Qué diferencia hay entre los resultados de los incisos a y b respecto al precio y la cantidad que prevalecerían en un mercado en competencia perfecta? Dibuje las curvas de demanda y de ingreso marginal e indique las tres combinaciones de precio-cantidad en la curva de demanda.

14.2

Un monopolista puede producir con costo promedio y marginales constantes de $CP = CMg = 5$. La empresa tiene una curva de demanda de mercado determinada por

$$Q = 53 - P.$$

a. Calcule la combinación de precio-cantidad que maximiza el beneficio de este monopolista. Calcule también el beneficio del monopolista.

b. Supongamos que una segunda empresa entra en el mercado. Sea q_1 la producción de la empresa 1 y q_2 la producción de la empresa 2. Ahora, la demanda de mercado está determinada por

$$q_1 + q_2 = 53 - P.$$

Suponga que la empresa 2 tiene los mismos costos que la empresa 1 y calcule el beneficio de las empresas 1 y 2 en función de q_1 y q_2.

c. Supongamos, siguiendo a Cournot, que cada una de estas dos empresas elige su nivel de producción de modo que maximiza las utilidades partiendo del supuesto de que la producción de la otra empresa es fija. Calcule la "función de reacción" de cada empresa, la cual expresa la producción que desea una empresa en función de la producción de la otra.

d. A partir de los supuestos del inciso c, ¿cuál es el único nivel de q_1 y q_2 con el cual estarán satisfechas ambas empresas (qué combinación de q_1 y q_2 satisface las dos curvas de reacción)?

e. Con q_1 y q_2 en los niveles de equilibrio calculados en el inciso d, ¿cuál será el precio de mercado, las utilidades de cada empresa y las utilidades totales?

f. Supongamos ahora que hay n empresas idénticas en la industria. Si cada empresa adopta la estrategia de Cournot respecto a todos sus rivales, ¿cuál será el nivel de producción de cada empresa que maximiza las utilidades? ¿Cuál será el precio de mercado? ¿A cuánto ascenderán las utilidades totales de toda la industria? (Todas estas soluciones dependerán de n.)

g. Demuestre que cuando n tiende a infinito, los niveles de producción, el precio de mercado y las utilidades tienden a los mismos que "prevalecerían" en competencia perfecta.

14.3

Utilice el análisis desarrollado en este capítulo para explicar el siguiente comportamiento de la industria:

a. Los bancos anuncian una tasa prima de interés con gran publicidad y tan sólo la modifican ocasionalmente.

b. Las computadoras personales de Apple y de IBM no son compatibles.

c. Las compañías aseguradoras siguen buscando contratar pólizas de seguros de automóviles a pesar de que se lamentan diciendo: "perdemos dinero con cada póliza que suscribimos".

d. Los automóviles estadounidenses tenían una calidad muy baja en las décadas de 1960 y 1980, pero mejoró a finales de esta última.

14.4

Supongamos que podemos expresar los costos de una empresa por cada dólar gastado en actividades de diferenciación de productos (o de publicidad) (z) y la cantidad (q) como

$$C = g(q) + z \qquad g'(q) > 0,$$

y que podemos expresar la función de demanda como

$$q = q(p, z).$$

Demuestre que las elecciones de p y z que maximizan las utilidades de la empresa darán lugar a que gaste una proporción de los ingresos totales en z dado por

$$\frac{z}{pq} = -\frac{e_{q,z}}{e_{q,p}}.$$

(Esta condición fue derivada por R. Dorfman y P. Steiner en "Optimal Advertising and Optimal Quality", *American Economic Review*, diciembre de 1954, pp. 826-836.)

14.5

Una forma de calcular el tamaño de la parte distribuida entre las empresas consiste en emplear el índice de Herfindahl, que se define como

$$H = \sum \alpha_i^2,$$

donde α_i es la parte que corresponde a la empresa i de los ingresos totales de la industria. Demuestre que si todas las empresas de la industria tienen funciones de producción con rendimientos constantes a escala y siguen las decisiones de producción de Cournot (ecuación 14.10), la proporción de las utilidades totales de la industria respecto a los ingresos totales será igual al índice de Herfindahl dividido entre la elasticidad-precio de la demanda. ¿Qué implica este resultado respecto a la relación entre la concentración en la industria y la rentabilidad de la industria?

14.6

S. Salop ofrece un modelo instructivo sobre la diferenciación de productos. Nos pide que pensemos en la demanda de un grupo de productos como una que varía a lo largo de un espectro circular de características, también podemos pensar en el modelo como uno espacial con los consumidores situados en torno a un círculo. Los demandantes se sitúan en cada punto de este círculo y cada uno demanda una unidad del bien. Los demandantes contraen costos si tienen que consumir un producto que no cumple estrictamente con las características que prefieren. Al igual que en el modelo de Hotelling, estos costos están dados por tx (donde x es la "distancia" que existe entre la característica preferida por el consumidor y la característica que ofrece el proveedor más cercano y t es el costo contraído por unidad de distancia). Al inicio hay n empresas y con funciones de costos idénticas, dada cada una por $C_i = f + cq_i$. En aras de la sencillez supondremos también que el círculo de características es una circunferencia que mide 1 exactamente y que las n empresas se ubican de manera homogénea en torno al círculo en intervalos de l/n.

a. Cada empresa puede elegir libremente su propio precio (p), pero está limitada por el precio que fija su vecina más próxima (p^*). Explique por qué el tamaño del mercado (x) de una empresa cualquiera está determinado por la ecuación

$$p + tx = p^* + t[(1/n) - x].$$

b. Dada la decisión de determinación de precios del inciso a, esta empresa vende $q_i = 2x$ porque tiene un mercado en "ambos lados". Calcule el precio que maximiza las utilidades de esta empresa en función de p^*, c y t.

c. Suponiendo que la existencia de simetría entre todas las empresas requerirá que todos los precios sean iguales, demuestre que esto dará lugar a un equilibrio en el cual $p = p^* = c + t/n$. Explique este resultado de forma intuitiva.

d. Demuestre que, en equilibrio, las utilidades de la empresa típica en esta situación son $\pi_i = t/n^2 - f$.

e. Suponiendo que existe libre entrada, ¿cuál sería el nivel de equilibrio de n en este modelo?

f. Calcule el nivel óptimo de diferenciación en este modelo (definido como la cantidad de empresas, y de productos, que minimiza la suma de los costos de producción más los costos de distancia de los demandantes). Demuestre que esta cifra es, precisamente, la mitad de la cifra calculada en el inciso e. Por tanto, este modelo adolece de un "exceso de diferenciación". (Para un análisis más detallado de este modelo, véase S. Salop en "Monopolistic Competition with Outside Goods", *Bell Journal of Economics,* primavera de 1979, pp. 141-156.)

14.7

Supongamos que la demanda de petróleo crudo está determinada por

$$Q = -2000P + 70\,000,$$

donde Q es la cantidad de petróleo en miles de barriles al año y P es el precio por barril en dólares. Supongamos también que hay 1000 pequeños productores idénticos de crudo, y cada uno tiene costos marginales determinados por

$$CMg = q + 5,$$

donde q es la producción de la empresa típica.

a. Suponiendo que cada pequeño productor de crudo actúa como tomador de precios, calcule la curva de oferta del mercado y el precio y la cantidad de equilibrio del mercado.

b. Supongamos que un posible líder en precios descubre una oferta prácticamente infinita de crudo en Nueva Jersey, el cual puede producir con un costo marginal y medio constante de \$15 por barril. Suponiendo que el comportamiento de oferta del tramo competitivo descrito en el inciso a no cambia en razón de este descubrimiento, ¿cuánto debería producir el líder en precios para poder maximizar las utilidades? ¿Qué precio y qué cantidad prevalecerán ahora en el mercado?

c. Dibuje sus resultados. ¿El excedente del consumidor aumenta debido al descubrimiento de petróleo en Nueva Jersey? ¿Qué diferencia hay entre el excedente del consumidor después del descubrimiento comparado con el que se produciría si el petróleo de Nueva Jersey se ofertara en competencia?

14.8

Supongamos que una empresa está considerando la posibilidad de invertir en una investigación que daría lugar a una innovación que reducirá costos. Suponiendo que la empresa se puede reservar la innovación para su uso exclusivo, ¿serán mayores las utilidades adicionales debidas a costos (marginales) más bajos si la empresa es una empresa competitiva tomadora de precios o si la empresa es un monopolio? Desarrolle un argumento gráfico detallado. En términos más generales, desarrolle un análisis oral que sugiera si es más probable que las empresas competitivas o las monopolistas adopten innovaciones que ahorren costos. Encontrará de los primeros análisis de esta cuestión en W. Fellner, "The Influence of Market Structure on Technological Progress", *Quarterly Journal of Economics*, noviembre de 1951, pp. 560-567.

14.9

La demanda de teléfonos en una ciudad de tamaño medio está determinada por

$$Q = 1000 - 50P,$$

donde Q es la cantidad de hogares que adquieren el servicio (en miles) y P es el costo mensual de conexión (en dólares). Los costos del sistema telefónico están determinados por

$$C = 550 \ln (0.1Q - 20) \text{ para } Q > 200.$$

a. ¿La producción de teléfonos es un monopolio natural en esta ciudad?

b. ¿Qué nivel de producción produciría un monopolio sin regular en esta situación? ¿Qué precio cobraría? ¿Cuáles serían las utilidades del monopolio?

c. Si hay una competencia activa (disputable) por la franquicia de la ciudad, ¿qué precio prevalecería?

REFERENCIAS

Bain, J. S. *Barriers to New Competition*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1956.
Tratamiento clásico de la teoría de las barreras a la entrada, con ciertos detalles empíricos.

Baumol, W. J., J. C. Panzar y R. D. Willig. *Contestable Markets and the Theory of Industry Structure,* Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, CA, 1982.
Tratamiento teórico detallado de las teorías recientes de los mercados disputables.

Mas-Collel, A., M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Nueva York, 1995.
El capítulo 12 contiene buenos resúmenes de varios modelos de diferenciación espacial.

Scherer, F. M. *Industrial Market Structure and Economic Performance,* 2a. ed., Rand McNally, Chicago, 1980.
Importante texto de la organización de las industrias. Cobertura enciclopédica. No es tan analítico como el texto de Tirole de fecha más reciente.

Schmalensee, R. *The Economics of Advertising*, North-Holland, Amsterdam, 1972, cap. 1.
Buen resumen de las teorías de la publicidad y algunas investigaciones empíricas, especialmente la publicidad de cigarrillos.

Shy, Oz. *Industrial Organization: Theory and Applications*, MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
El capítulo 7 ofrece un tratamiento muy amplio de modelos de productos diferenciados, inclusive un tratamiento detallado de varios modelos de ubicación.

Stiglitz, J. y G. F. Mathewson, eds. *New Developments in the Analysis of Market Structure*, MIT Press, Cambridge, MA, 1986.
Contiene una serie de reseñas de artículos y explicaciones. Recomendamos especialmente los de Baumol et al. *(disputabilidad), Schmalensee (publicidad) y Stiglitz (competencia e incentivos para la investigación y desarrollo).*

Tirole, J. *The Theory of Industrial Organization*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
Tratamiento muy completo de varios modelos de competencia imperfecta. Secciones especialmente útiles sobre la diferenciación de productos y la competencia ajena a los precios.

Capítulo 15

MODELO DE TEORÍA DE JUEGOS PARA DETERMINAR LOS PRECIOS

Los instrumentos de la teoría de juegos permiten estudiar muchas de las cuestiones estratégicas que surgen cuando creamos modelos de mercados que contienen tan sólo unos cuantos vendedores. En este capítulo se analizarán algunas de sus aplicaciones. Sin embargo, primero debemos presentar algunos de los conceptos básicos de la teoría de juegos, así como mostrar la forma en que se define el equilibrio en esta teoría.

Conceptos básicos

Los modelos de la teoría de juegos pretenden describir situaciones estratégicas complejas dentro de un marco muy simplificado y estilizado. De forma análoga a los demás modelos de este libro, los modelos de la teoría de juegos abstraen una gran parte de los detalles de las personas y las instituciones de un problema para llegar a una representación de la situación que se pueda manejar en términos matemáticos. Esta capacidad para llegar al centro del problema es el elemento fuerte de este tipo de modelos.

Cabe decir que un *juego* es una situación cualquiera en la cual los individuos o las empresas deben elegir estrategias, y el resultado final dependerá de la estrategia que elija cada persona. Todos los juegos tienen tres elementos básicos: 1) jugadores; 2) estrategias, y 3) pagos. Los juegos pueden ser *en cooperación*, en cuyo caso los jugadores establecen acuerdos que se obligan a respetar, o *sin cooperación*, porque no son capaces de establecer dichos acuerdos. Aquí nos ocuparemos fundamentalmente de los juegos sin cooperación. A continuación se presenta una relación de los elementos básicos de estos juegos.

Jugadores

Cada una de las personas que toma decisiones en un juego se llama *jugador*. Estos jugadores pueden ser individuos (como en un juego de póquer), empresas (como en los mercados con pocas empresas) o países enteros (como en los conflictos bélicos). Todos los jugadores se caracterizan porque son capaces de elegir una acción de entre un conjunto de estrategias que posiblemente podrían emprender.[1] Por lo general, la cantidad de jugadores que participan permanece fija y la cantidad de éstos suele ser característica de un juego determinado, es decir, juegos de dos jugadores, de tres jugadores o de *n* jugadores. En este capítulo se estudiarán fundamentalmente

[1]A veces se considera que uno de los jugadores es quien representa la "naturaleza". Este jugador no "elige" las acciones, sino que éstas ocurren de acuerdo con determinadas probabilidades. Por ejemplo, el tiempo climatológico puede influir en el resultado de un juego, pero la naturaleza no lo "elige". Por el contrario, se supone que los fenómenos climatológicos ocurren con diversas probabilidades. Los métodos que presentaremos en los capítulos 18 y 19 sirven para analizar los juegos contra la naturaleza.

los juegos de dos jugadores, llamados el jugador A o el B. Uno de los supuestos importantes que suele plantearse en la teoría de juegos, como en la mayor parte de la economía, es que la identidad específica de los jugadores es irrelevante. En un juego no hay "buenos" ni "malos" y se supone que los jugadores no tienen habilidades o deficiencias especiales de tipo alguno. Se supone, simplemente, que cada jugador elige el curso de acción que le producirá el resultado más favorable, después de tomar en cuenta las acciones de su contrincante.

Estrategias

Una *estrategia* es cada uno de los cursos de acción que puede seguir un jugador durante un juego. Dependiendo del juego que estemos analizando, una estrategia puede ser una acción muy sencilla (sacar otra carta en una juego de blackjack) o muy compleja (crear una defensa militar empleando antimisiles láser), pero suponemos que cada estrategia será un curso de acción concreto y bien definido.[2] Por lo general, cada jugador no tendrá una gran cantidad de estrategias a su disposición; por ejemplo, podemos ilustrar muchas facetas de la teoría de juegos en situaciones en las cuales cada jugador sólo tiene dos estrategias posibles. En el caso de los juegos sin cooperación, los jugadores no son capaces de llegar a acuerdos respecto a las estrategias del juego que las dos partes están obligadas a cumplir; es decir, un jugador no tendrá certeza de lo que hará el otro.

Pagos

Decimos que los "pagos" son el resultado final que alcanzan los jugadores cuando termina un juego. Normalmente medimos los pagos en términos de la utilidad que obtienen los jugadores, si bien, es frecuente que los pagos monetarios se usen en su lugar, por ejemplo, las utilidades que obtienen las empresas. Por lo general, suponemos que los jugadores clasifican ordinalmente los pagos que obtendrán de un juego, del más preferido al menos preferido, y que pretenden alcanzar el de orden más alto que sea posible. Los pagos incluyen todos los aspectos ligados a los resultados de un juego, entre otros, los pagos monetarios explícitos y los sentimientos implícitos de los jugadores; por ejemplo, si se sienten avergonzados o si han aumentado su autoestima. Los jugadores prefieren los pagos que les proporcionarán más utilidad en lugar de los que les proporcionarán menos.

Notación

Por lo general, no es necesario expresar un juego empleando una notación formal y basta con describir la situación con palabras. Sin embargo, para presentar los resultados de forma compacta, una notación puede aclarar mucho las cosas. Siguiendo la costumbre general, se denotará un juego dado (J) entre dos jugadores (A y B) como:

$$J[S_A, S_B, U_A(a,b), U_B(a,b)], \tag{15.1}$$

donde S_A y S_B representan, respectivamente, el conjunto de estrategias de los jugadores A y B, y donde U_A y U_B representan la utilidad que obtienen los jugadores cuando A y B eligen estrategias concretas ($a \subset S_A$, $b \subset S_B$).

Equilibrio de Nash en los juegos

En la teoría económica de los mercados, el concepto de *equilibrio* sirve para indicar una situación en la cual oferentes y demandantes están conformes con el resultado del mercado. Dado el precio y la cantidad de equilibrio, ninguno de los participantes del mercado tiene un incentivo para modificar su comportamiento. Por tanto, la interrogante será saber si en los modelos de la teoría de juegos hay conceptos similares de equilibrio. ¿Existen elecciones estratégicas que, una vez hechas, no ofrecen incentivo alguno a los jugadores para modificar su comportamiento? Asimismo, ¿estos equilibrios ofrecen explicaciones creíbles de los resultados de los juegos?

Si bien la teoría de juegos ofrece varios caminos para formalizar el concepto de equilibrio, el planteamiento que se utiliza con más frecuencia es el que fue propuesto originalmente por Cournot

---

[2]En los juegos que implican una secuencia de acciones (por ejemplo, la mayor parte de los juegos de mesa, como el ajedrez) la especificación de las estrategias puede implicar varios puntos de decisión (cada uno de los movimientos en un juego de ajedrez). Partiendo del supuesto de que los jugadores saben perfectamente cómo jugar, estos patrones complejos muchas veces son expresados mediante las elecciones de estrategias puras, elegidas de entre un conjunto muy grande pero finito, y cada una de ellas especifica el curso de acción completo que se seguirá hasta que termine el juego. Véanse nuestra explicación de la forma "normal" y la "extendida" de un juego, así como D. M. Kreps. *Game Theory and Economic Modeling,* Oxford University Press, 1990, cap. 3.

(véase el capítulo 14) en el siglo XIX, y que J. Nash generalizara a principios de la década de 1950.[3] Según el procedimiento de Nash, un par de estrategias, por decir (a^*, b^*), se definirá como un equilibrio si a^* representa la mejor estrategia del jugador A cuando el jugador B aplica b^* y si b^* representa la mejor estrategia del jugador B cuando el jugador A aplica a^*. En términos formales, un par de estrategias constituye un equilibrio de Nash si

$$U_A(a^*,b^*) \geq U_A(a',b^*) \text{ para toda } a' \subset S_A \tag{15.2}$$

y

$$U_B(a^*,b^*) \geq U_B(a^*,b') \text{ para toda } b' \subset S_B.$$

Incluso si uno de los jugadores revela la estrategia de equilibrio que aplicará, el otro no puede sacar provecho alguno de saberlo. En el caso de las estrategias que no constituyen un equilibrio, esto no será así. Como se verá, si un jugador sabe cuál será la estrategia del otro, con frecuencia puede sacar provecho de su conocimiento y podrá elegir otra estrategia. A su vez, esto puede reducir el pago que reciba el jugador que ha revelado su estrategia, creando un incentivo para que haga otra cosa.

No todos los juegos tienen un par de estrategias de equilibrio de Nash. Además, en algunos casos, un juego puede tener múltiples equilibrios, algunos de los cuales son más plausibles que otros. Algunos equilibrios de Nash pueden no ser especialmente deseables para los jugadores. Además, en algunos casos, otros conceptos de equilibrio podrían ser más razonables que los propuestos por Nash. No obstante, ahora tenemos una definición de equilibrio que servirá de punto de partida para empezar a analizar la teoría de juegos:

DEFINICIÓN

Estrategias de equilibrio de Nash. Un par de estrategias (a^*, b^*) representa una solución de equilibrio para un juego de dos jugadores si a^* es una estrategia óptima de A contra b^*, y si b^* es una estrategia óptima de B contra a^*.[4]

Un juego ilustrativo

Para ilustrar el planteamiento teórico de los juegos para crear modelos estratégicos, veamos un ejemplo sencillo en el cual dos estudiantes (A y B) deben decidir a qué volumen pueden escuchar la música en su dormitorio. Cada uno puede optar por poner la música a un volumen fuerte (F) o suave (S). Nuestro propósito es analizar las posibles elecciones de equilibrio en esta situación. Cabe señalar desde el principio que este juego no es demasiado realista, sino que persigue fines exclusivamente pedagógicos.

Forma extendida del juego

La figura 15.1 ilustra los detalles concretos del juego del dormitorio. En el "árbol" de este juego, la acción transcurre de izquierda a derecha, y cada "nodo" representa un punto de decisión para la persona indicada en el mismo. En este juego, A es el primero en jugar y debe elegir el nivel de decibeles: F o S. Dado que las decisiones de B se producen a la derecha de A, el árbol indica que B toma su decisión después de A. En esa etapa, se pueden dar dos versiones del juego, dependiendo de que B conozca o no la decisión que ha tomado A. Primero se analizará el caso en el cual B no cuenta con esta información. El óvalo más grande en torno de los dos nodos de decisión de B indica que ambos nodos comparten la misma (falta de) información. B debe elegir F o S sin saber lo que ha hecho A. Más adelante se analizará el caso en el cual B sí cuenta con esta información.

Los números al final de cada rama del árbol indican los pagos, que en este caso se medirán en función de la utilidad que obtienen los dos compañeros de habitación. Cada par de resultados muestra primero la utilidad de A. Por ejemplo, los pagos de la figura 15.1 indican que si A elige S y B elige F, A tendrá una utilidad de 6 y B una utilidad de 4. Así, de esta misma manera, podemos interpretar los demás pagos.

---

[3]John Nash. "Equilibrium Points in n-Person Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, 1950, pp. 48-49. Nash es el personaje principal de la película de 2001 titulada *A Beautiful Mind* (Una mente brillante). Encontrará un ejemplo de la teoría de juegos, tomado de la película, en el problema 15.5.

[4]Si bien esta definición está planteada para el caso de juegos de dos jugadores, su generalización para n personas es muy sencilla, pero su notación es sumamente tediosa.

FIGURA 15.1 **Forma extendida del juego del dormitorio**

En este juego, *A* elige un volumen fuerte (*F*) o suave (*S*) y, después, *B* hace una elección análoga. El óvalo en torno de los nodos de *B* indica que los dos jugadores cuentan con la misma (falta de) información; es decir, *B* no sabe cuál estrategia ha elegido *A*. Los pagos (primero los de *A*) aparecen a la derecha de la figura.

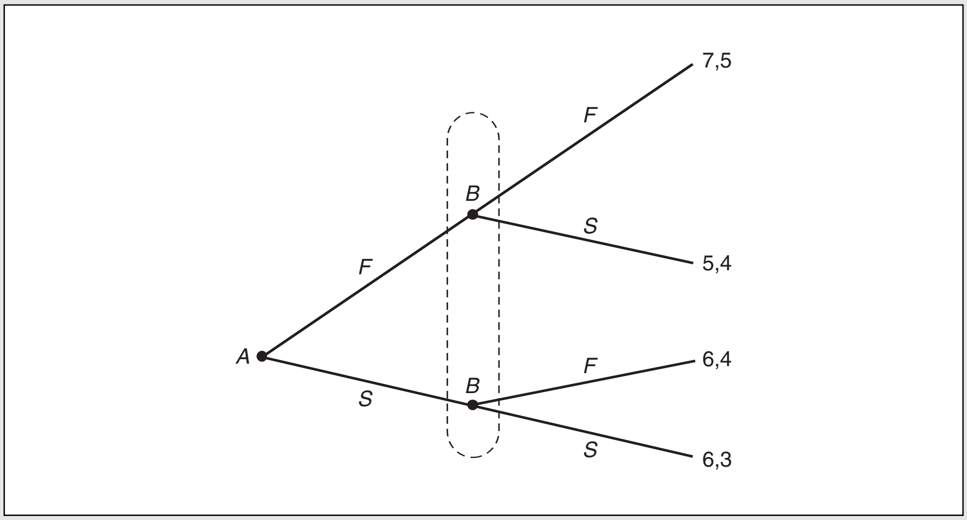


TABLA 15.1 **Forma normal de juego del dormitorio**

		Estrategias de *B*	
		F	***S***
Estrategias de *A*	***F***	7, 5	5, 4
	S	6, 4	6, 3

Forma normal del juego

Si bien el árbol del juego de la figura 15.1 ofrece una representación visual muy útil de la estructura completa de un juego, a veces es más conveniente describir los juegos en tablas, también llamada *normal* o *estratégica*. La tabla 15.1 ofrece tal presentación del juego del dormitorio. En la tabla, las estrategias de *A* (*S* o *F*) aparecen a la izquierda y las de *B* aparecen en la parte superior. Los pagos (de nuevo, los de *A* en primer lugar) que corresponden a las diversas elecciones estratégicas forman el cuerpo de la tabla. La figura 15.1 y la tabla 15.1 muestran exactamente la misma información sobre este juego, si bien suele ser más cómodo trabajar con la forma normal.

Estrategias dominantes y equilibrios de Nash

La tabla 15.1 deja en claro que la estrategia de un volumen fuerte es una estrategia dominante para la persona *B*. Independientemente de la estrategia que elija *A*, la de *F* ofrece mayor utilidad a *B* que la de *S*. Por supuesto que como los dos jugadores conocen la estructura del juego, *A* se dará cuenta que la estrategia dominante de *B* es ésta. Por tanto, *A* optará por la estrategia que funcione mejor contra la estrategia *F* que ha elegido *B*. Como podemos ver en la tabla 15.1, *A* elegirá, en consecuencia, un volumen fuerte (*F*). Por tanto, las consideraciones relativas a la estrategia dominante sugieren que las estrategias elegidas serán *A:F, B:F* y que los pagos, en términos de utilidad, serán de 7 (para *A*) y 5 (para *B*).

La elección de estrategias *A:F, B:F* también cumple con el criterio de Nash para alcanzar un equilibrio. Si *A* sabe que *B* optará por *F,* su mejor elección será *F.* Por otra parte, si *B* sabe que *A* optará por *F* su mejor elección también será *F* (de hecho, dado que *F* es la estrategia dominante de *B,* siempre será su mejor elección, independientemente de lo que haga *A*). Por tanto, la elección *A:F, B:F* cumple con la simetría que exige el criterio de Nash.

Para ver por qué los demás pares de estrategias de la tabla 15.1 no cumplen el criterio de Nash, analicémoslos uno a uno. Si los jugadores deciden *A:S, B:F,* esta opción ofrece a *A* la posibilidad de mejorar su posición; es decir, si *A* sabe que *B* optará por *F,* puede obtener mayor utilidad si elige *F.* Por tanto, la elección *A:S, B:F* no es un equilibrio de Nash. Cuando *B* elige *S* ninguno de los dos resultados cumple el criterio de Nash. Como ya hemos señalado, independientemente de lo que haga *A*, *B* siempre podrá mejorar su utilidad si elige *F* en lugar de *S.* Dado que *F* domina estrictamente en el caso de *S* para *B*, cuando *B* opte por *S* ningún resultado puede ser un equilibrio de Nash.

Existencia de los equilibrios de Nash

Si bien el juego del dormitorio que presenta la figura 15.1 contiene un único equilibrio de Nash, no se trata de una propiedad general de todos los juegos de dos personas. El ejemplo 15.1 ilustra un sencillo juego (Piedra, papel o tijeras), en el cual no existe un equilibrio de Nash, y otro juego (la Guerra de los sexos), el cual contiene dos equilibrios de Nash. Por tanto, estos ejemplos dejan en claro que el planteamiento de Nash tal vez no siempre identifique una solución única de equilibrio en un juego de dos personas. Por el contrario, es preciso explorar los detalles de cada situación del juego para poder determinar si existen equilibrios de Nash creíbles.

Ejemplo de equilibrios de Nash

La tabla 15.2 muestra dos conocidos juegos que reflejan las distintas posibilidades de que existan equilibrios de Nash. La parte a) de la tabla describe el juego infantil de manos, llamado Piedra, papel o tijeras. El resultado de cero a lo largo de la diagonal indica que si los jugadores adoptan la misma estrategia, nadie gana. En los demás casos, los pagos indican que el perdedor pagará un dólar al ganador siguiendo la jerarquía habitual (la piedra rompe las tijeras, las tijeras cortan el papel y el papel envuelve la piedra). Como sabe todo aquel que haya jugado a este juego, no hay equilibrio alguno. Todo par de estrategias es inestable porque ofrece, cuando menos a uno de los jugadores, un incentivo para adoptar otra estrategia. Por ejemplo (*A:* tijeras, *B:* tijeras), ofrece un incentivo para que *A* o *B* opten por elegir piedra. De otra parte (*A:* papel, *B:* piedra) evidentemente anima a *B* a elegir tijeras. El comportamiento cíclico irregular que caracteriza a este juego indica con claridad la ausencia de un equilibrio de Nash.

La Guerra de los sexos. En el juego de la Guerra de los sexos, un marido (*A*) y su esposa (*B*) están haciendo planes para sus vacaciones. *A* prefiere ir a la montaña y *B* prefiere ir a la playa. Los dos jugadores prefieren pasar las vacaciones juntos, en lugar de separados. Los resultados de la parte b) de la tabla 15.2 reflejan estas preferencias. En este caso, las vacaciones de los dos juntos constituyen equilibrios de Nash. Con (*A:* montaña, *B:* montaña) ninguno de los jugadores puede ganar aprovechando que conoce la estrategia del otro. Cabe decir lo mismo de (*A:* playa, *B:* playa). Por tanto, en este juego hay dos equilibrios de Nash.

Pregunta: ¿En estos dos juegos hay una estrategia que sea la dominante? En el caso de la Guerra de los sexos, ¿las vacaciones por separado por qué no constituyen equilibrios de Nash?

TABLA 15.2 **Dos juegos sencillos**

a) Piedra, papel o tijeras: sin equilibrios de Nash

		Estrategias de *B*		
		Piedra	**Tijeras**	**Papel**
	Piedra	0, 0	1, –1	–1, 1
Estrategias de *A*	**Tijeras**	–1, 1	0, 0	1, –1
	Papel	1, –1	–1, 1	0, 0

b) Guerra de los sexos: dos equilibrios de Nash

		Estrategias de *B*	
		Montaña	**Playa**
Estrategias de *A*	**Montaña**	2, 1	0, 0
	Playa	0, 0	1, 2

Sin embargo, hay algunos juegos de dos personas en los cuales necesariamente se presenta un equilibrio de Nash. La intuición nos dice que los juegos en los cuales los participantes tienen una gran cantidad de estrategias a su alcance normalmente ofrecerán flexibilidad suficiente como para poder asegurar que existe, cuando menos, un equilibrio de Nash. Estos juegos se dan en dos contextos. El primero es que los juegos en los cuales las estrategias que eligen *A* y *B* son una única variable continua, por lo que incluyen un número "infinito" de posibles estrategias y que derivará en un equilibrio de Nash. El tipo más importante de estos juegos son aquellos en los cuales los jugadores son dos empresas que deben elegir el precio que fijarán por el mismo producto. Más adelante, en este mismo capítulo, se describen algunos juegos de este tipo y se incluyen algunas ilustraciones de los tipos de equilibrios de Nash que presentan.

Otra forma de hacer que los juegos incluyan una cantidad suficientemente "grande" de estrategias radica en permitir que los jugadores apliquen estrategias "mixtas". En estos juegos, puede haber relativamente pocas estrategias "puras" como las que hemos estado analizando; tal vez sólo haya dos. Empero, éstas permiten que cada participante juegue con estas estrategias puras con probabilidades previamente escogidas. Por ejemplo, en el juego del dormitorio, *A* puede tirar una moneda al aire para determinar si pondrá la música a volumen fuerte o suave; es decir, aplicará cada una de las estrategias con una probabilidad de 0.5. Si cada jugador puede optar por jugar con las estrategias puras disponibles, con una probabilidad cualquiera que elija, el juego se convertirá en uno que tiene una cantidad infinita de estrategias (mixtas) y, de nueva cuenta, es seguro que existirá un equilibrio de Nash. El ejemplo 15.2 ilustra cómo la posibilidad de tener estrategias mixtas puede añadir equilibrios de Nash al caso del juego de la Guerra de los sexos analizada antes.

Por desgracia, demostrar la existencia de un equilibrio de Nash en juegos de dos personas que tienen a su alcance muchas estrategias es difícil y exige varios supuestos teóricos. Por tanto, aquí no se tratará de hacer tal demostración. Por el contrario, en la mayor parte de nuestro análisis de juegos de dos personas resolveremos explícitamente todo equilibrio de Nash que pudiera existir. Los lectores interesados pueden analizar las sofisticadas demostraciones matemáticas de la existencia del equilibrio por su propia cuenta.[5]

---

[5]Véanse, por ejemplo, D. Fudenberg y J. Tirole. *Game Theory*, MIT Press, Cambridge, MA, 1992, sección 1.3. Las comprobaciones de la existencia de los equilibrios de Nash con frecuencia emplean teoremas del punto fijo como los que vimos en el capítulo 12.

EJEMPLO 15.2

La guerra de los sexos con estrategias mixtas

Para poder demostrar cómo la introducción de estrategias mixtas puede añadir equilibrios de Nash a un juego dado, volvamos al juego de la Guerra de los sexos del ejemplo 15.1. Supongamos que los cónyuges del problema se cansan de los constantes conflictos por las vacaciones y deciden que la "suerte" decida. En concreto, supongamos que A decide elegir su estrategia para ir a la montaña con una probabilidad r y la de la playa con una probabilidad $1 - r$. Por otra parte, supongamos que B elige su estrategia para ir a la montaña con una probabilidad s y la de la playa con una probabilidad $1 - s$. Dadas estas probabilidades, los pagos de este juego se producirán sujetos a las siguientes probabilidades: montaña-montaña, rs; montaña-playa, $r(1 - s)$; playa-montaña, $(1 - r)(s)$; playa-playa, $(1 - r)(1 - s)$. La utilidad esperada de A está dada por

$$
\begin{aligned}
E(U_A) &= rs(2) + r(1 - s)(0) + (1 - r)(s)(0) + (1 - r)(1 - s)(1) \\
&= 1 - r - s + 3rs = 1 - s + r(3s - 1).
\end{aligned}
\tag{15.3}
$$

Evidentemente, para A la opción óptima de r depende de la probabilidad s de B. Si $s < 1/3$, maximiza la utilidad eligiendo $r = 0$. Si $s > 1/3$, A debería optar por $r = 1$. Y cuando $s = 1/3$, la utilidad esperada por A es de $2/3$ independientemente del valor que elija para r. La figura 15.2 representa las elecciones óptimas de r para A, dados estos distintos valores de s.

Para el cónyuge, B, la utilidad esperada está determinada por

$$
\begin{aligned}
E(U_B) &= rs(1) + r(1 - s)(0) + (1 - s)(r)(0) + (1 - r)(1 - s)(2) \\
&= 2 - 2r - 2s + 3rs = 2 - 2r + s(3r - 2).
\end{aligned}
\tag{15.4}
$$

Ahora, cuando $r < 2/3$, la utilidad esperada por B se maximizará si elige $s = 0$. Cuando $r > 2/3$, la utilidad se maximiza si elige $s = 1$. Y cuando $r = 2/3$, la utilidad esperada por B es independiente de la s que elija. La figura 15.2 también muestra estas elecciones óptimas.

Las intersecciones de las curvas de respuestas óptimas de A y B de la figura 15.2 muestran los equilibrios de Nash. Es decir, las intersecciones obedecen a las condiciones resumidas en las ecuaciones 15.2. Nótese que hay tres intersecciones. Dos ya las hemos visto antes: $r = 0$, $s = 0$ y $r = 1$, $s = 1$ y representan las estrategias de vacaciones de los cónyuges juntos que se analizaron en el ejemplo 15.1. Sin embargo $r = 2/3$, $s = 1/3$ es un nuevo equilibrio de Nash que no podía existir si no hubiéramos introducido las estrategias mixtas. En términos más generales, la figura 15.2 ofrece una pista del porqué los juegos con muchas estrategias tendrán equilibrios de Nash; es decir, en general, las funciones continuas de respuestas óptimas se cortarán en alguna parte y esos puntos de intersección constituirán equilibrios de Nash.

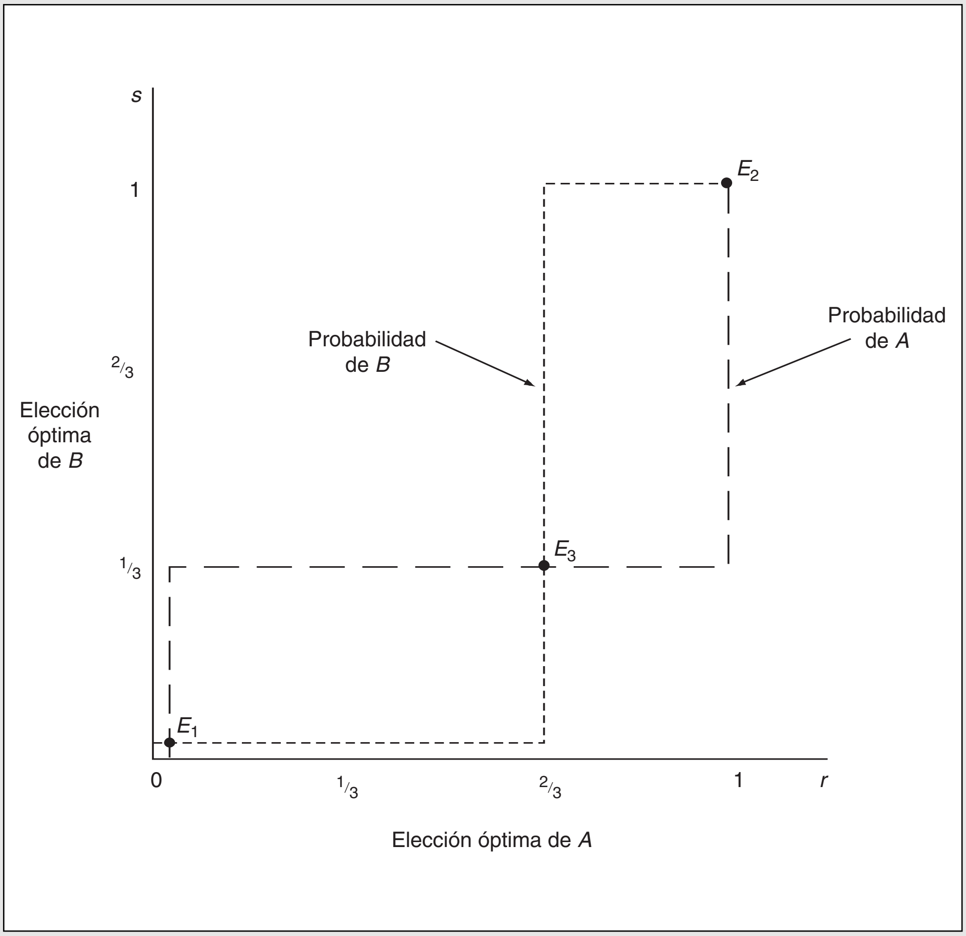
Pregunta: ¿El equilibrio de la estrategia mixta que ilustra este problema es particularmente deseable para los jugadores? Si los cónyuges pudieran cooperar para tomar una decisión, ¿optarían por la solución de una estrategia mixta?

El dilema del prisionero

Los equilibrios de Nash surgen debido a la incertidumbre de las estrategias inherente a una situación. No hay nada que garantice que estos equilibrios sean especialmente deseables desde el punto de vista de los jugadores. El ejemplo más famoso de un juego entre dos personas con un resultado de equilibrio de Nash indeseable probablemente sea el juego del Dilema del prisionero, que analizara A. W. Tucker por primera vez en la década de 1940. El nombre se debe a

FIGURA 15.2 **Equilibrios de Nash, con estrategias mixtas, en el juego de la Guerra de los sexos**

Con estrategias mixtas, A juega a ir a la "montaña" con una probabilidad r, y B juega a ir a la montaña con una probabilidad s. La figura muestra la elección óptima de cada jugador dada la elección del contrario. Este juego tiene tres equilibrios de Nash (que se reflejan en E): 1) $r = 0$, $s = 0$; 2) $r = 1$, $s = 1$, y 3) $r = 2/3$, $s = 1/3$.



la siguiente situación. Dos personas son aprehendidas porque han cometido un delito. La fiscal de distrito tiene pocas pruebas del caso y está deseando obtener una confesión. Separa a los dos sospechosos y le dice a cada uno: "Si tú confiesas, pero tu compañero no lo hace, te prometo una sentencia corta (seis meses), mientras que a tu compañero le caerán 10 años. Si los dos confiesan, cada uno recibirá una sentencia de tres años". Cada uno de los sospechosos también sabe que, si ninguno de los dos confiesa, la falta de pruebas hará que se les juzgue por un delito menor, por el cual recibirán una sentencia de dos años. La tabla 15.3 muestra la matriz de pagos, de forma normal, de esta situación. La estrategia de "confesar" es dominante para A y B. Por tanto, estas estrategias constituyen un equilibrio de Nash y la treta de la fiscal parece tener éxito. Sin embargo, nótese que un acuerdo férreo de ambos presos para no confesar reduciría la condena de cárcel de tres a dos años. Esta solución "racional" no es estable y cada preso tiene un incentivo para delatar a su compañero. Así, éste es el dilema: los pagos que parecen óptimos no son estables cuando se someten a los criterios de Nash. El ejemplo 15.3 muestra otro juego, esta vez con un toque ambiental, en el cual el equilibrio de Nash no es especialmente deseable desde el punto de vista de los jugadores.

TABLA 15.3 **El dilema del prisionero**

		B Confesar	*B* No confesar
A	**Confesar**	*A:* 3 años *B:* 3 años	*A:* 6 meses *B:* 10 años
	No confesar	*A:* 10 años *B:* 6 meses	*A:* 2 años *B:* 2 años

EJEMPLO 15.3

La tragedia de los comunes

La expresión "tragedia de los comunes" ahora se entiende como los problemas ambientales provocados por la sobreexplotación que ocurre cuando se considera que los recursos escasos son "ejidos" o "propiedad común".[6] Podemos desarrollar una ilustración del asunto, desde la perspectiva de la teoría de juegos, suponiendo que dos pastores, los conocidos *A* y *B*, están decidiendo cuántas de las ovejas de sus manadas pastarán en los terrenos comunales del pueblo. El problema es que éstos son bastante pequeños y que se podrían agotar muy rápido si demasiado ganado pasta en ellos.

Para dotar a este problema de cierta estructura matemática, sea Y_A, Y_B la cantidad de ovejas que pastan en los terrenos comunales y supongamos que el valor que tiene una oveja que se alimenta en los terrenos comunales (por ejemplo, en términos de más lana de oveja) está determinado por

$$V(Y_A, Y_B) = 200 - (Y_A + Y_B)^2. \tag{15.5}$$

Nótese que esta función implica que una oveja extra disminuye V ($V_i < 0$) y que este efecto marginal aumenta conforme haya más ganado pastando ($V_{ii} < 0$).

Para encontrar el equilibrio de Nash de las estrategias para pastar, resolvemos el problema del pastor *A* para maximizar el valor

$$\underset{Y_A}{\text{Max}}\ Y_A V = \underset{Y_A}{\text{Max}}\ [200Y_A - Y_A(Y_A + Y_B)^2]. \tag{15.6}$$

La condición de primer orden para el máximo es

$$200 - 2Y_A^2 - 2Y_AY_B - Y_A^2 - 2Y_AY_B - Y_B^2 = 200 - 3Y_A^2 - 4Y_AY_B - Y_B^2 = 0. \tag{15.7}$$

Asimismo, la estrategia óptima de *B* resuelve la ecuación:

$$200 - 3Y_B^2 - 4Y_BY_A - Y_A^2 = 0. \tag{15.8}$$

Para un equilibrio de Nash, los valores de Y_A y Y_B deben resolver la ecuación 15.7 y la 15.8. Empleando la condición de simetría $Y_A = Y_B$, podemos resolver estas ecuaciones como

$$200 = 8Y_A^2 = 8Y_B^2 \tag{15.9}$$

o

$$Y_A = Y_B = 5. \tag{15.10}$$

Por tanto, cada pastor llevará 5 ovejas a los terrenos comunales y obtendrá $500[= 5 \cdot (200 - 10^2)]$ a cambio. Dada esta elección, ninguno de los pastores tiene incentivos para modificar su comportamiento.

[6]Este término fue popularizado por G. Hardin. "The Tragedy of the Common", *Science 162*, 1968, pp. 1243-1248.

Podemos demostrar que el equilibrio de Nash no es el mejor uso que se puede dar a los terrenos comunales con sólo señalar que $\Upsilon_A = \Upsilon_B = 4$ proporciona un ingreso total mayor [544 = 4(200 – 64)] a cada uno de los pastores.[7] Pero $\Upsilon_A = \Upsilon_B = 4$ no es un equilibrio estable. Por ejemplo, si A anuncia que llevará $\Upsilon_A = 4$, el granjero B puede resolver la ecuación 15.8 como

$$3\Upsilon_B^2 + 16\Upsilon_B - 184 = 0, \qquad (15.11)$$

obteniendo un resultado de 5.6 ovejas. Si se redondea la cifra a 6, veremos que el valor de A ahora sería de 400, mientras que el de B sería 600. Al igual que en el juego del Dilema del prisionero, la solución $\Upsilon_A = \Upsilon_B = 4$ ofrece a cada uno de los pastores un incentivo para hacer trampa.

Pregunta: Si se jugaran varias partidas de este juego (por ejemplo, todos los días), ¿cabría esperar que el equilibrio de Nash persistiera?

Cooperación y repetición

Los juegos como los del Dilema del prisionero o la Tragedia de los comunes sugieren que la cooperación entre los jugadores puede dar por resultado pagos que los dos jugadores prefieren, en lugar del resultado de Nash. Sin embargo, en el caso de los juegos que hemos estado analizando es muy difícil presentar un modelo de cooperación, porque la lógica del concepto del equilibrio de Nash sugiere que cualquier otra solución será inestable. Por supuesto que podríamos fijarnos en instituciones que existen más allá de un juego dado (por ejemplo, las leyes de contratos) para investigar cómo se podrían fomentar resultados de cooperación, pero este planteamiento nos apartaría del objetivo de este capítulo.[8] En cambio, aquí se analizará cómo el hecho de jugar varias partidas de un mismo juego podría facilitar determinados tipos de comportamiento cooperativo. Dado que la repetición puede hacer que los jugadores se den cuenta directamente de las ineficiencias de un equilibrio de Nash dentro de un solo periodo, es posible que la repetición del juego pueda fomentar la cooperación. Por ejemplo, en el Dilema del prisionero sería dudoso que la treta de la fiscal pudiera tener éxito si la usara repetidas veces, sobre todo si los mismos dos sospechosos son siempre los involucrados. Sin duda, incluso el criminal más corto de luces terminaría dándose cuenta de la treta. Asimismo, parece poco probable que los pastores de ovejas del ejemplo 15.3 siguieran sobreexplotando el pastizal comunal todos los días sin, alguna vez, tratar de hacer otra cosa. Para analizar este tipo de posibilidades, tenemos que desarrollar algunas formas para describir los juegos que se repiten a lo largo del tiempo.

Un juego con dos periodos

Para poder ilustrar los equilibrios de Nash en juegos dinámicos de varios periodos, volvamos a una versión reformada del juego del dormitorio que se presentó al inicio de este capítulo. Presentamos esta nueva partida del juego en su forma extendida para poder comprender mejor los aspectos temporales. La figura 15.3 repite nuestro juego anterior, pero ahora suponemos que A es quien determina primero el nivel del volumen y que B puede oírlo antes de encender su aparato de música. En términos gráficos, el óvalo que circundaba los nodos de B ha sido suprimido en la figura 15.3 para indicar que existe esta información adicional. De hecho, este juego ahora se ha convertido en un juego con dos periodos. Con este cambio, la estrategia que elija B debe ser planteada de forma que tome en cuenta la información disponible al inicio del periodo dos. Si bien B hará su elección al inicio del juego, debemos plantear un conjunto completo de estrategias para todas las acciones posibles que B proponga que podría emprender.

La tabla 15.4 indica este conjunto extendido de estrategias. En total tenemos cuatro estrategias que cubren todas las contingencias posibles de información. Cada estrategia es planteada como un par de acciones que indican lo que B hará dependiendo de esta información. La estra-

[7]De hecho, el valor total de los terrenos comunales [$\Upsilon(200 - \Upsilon^2)$] se maximiza cuando $\Upsilon = \sqrt{66} = 8.1$, si bien es posible que llevar 0.1 ovejas al pastizal requiera de una habilidad muy superior a la que tendrían los pastores.

[8]No obstante, véase la explicación de las propiedades y los contratos en el capítulo 20.

FIGURA 15.3 **El juego del dormitorio en forma secuencial**

En esta forma del juego del dormitorio, *B* conoce la elección de *A*. Las estrategias de *B* deben ser planteadas tomando en cuenta esta información (véase la tabla 15.4).

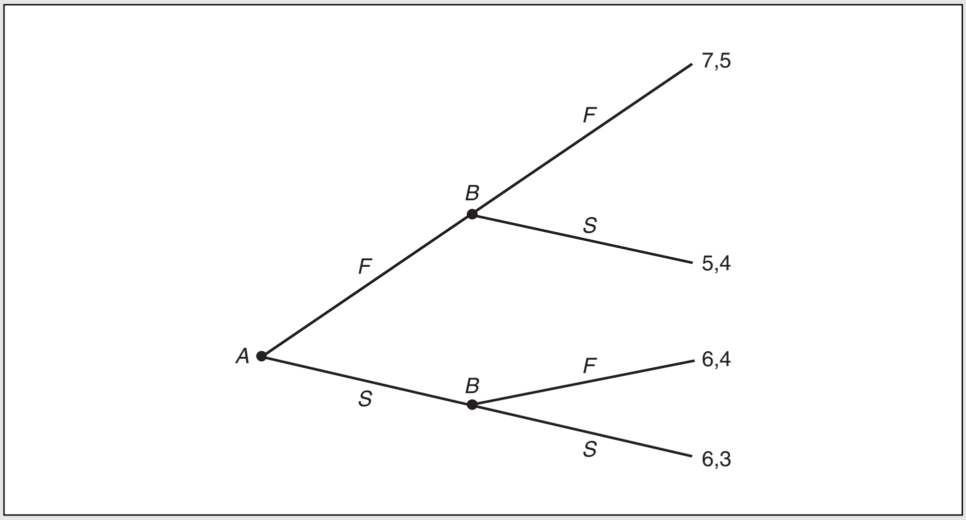


TABLA 15.4 **Estrategias contingentes en el juego del dormitorio**

		Estrategias de *B*			
		F, F	***F, S***	***S, F***	***S, S***
Estrategias de *A*	***F***	7, 5	7, 5	5, 4	5, 4
	S	6, 4	6, 3	6, 4	6, 3

tegia (*F, F*) indica que *B* elige *F* si *A* elige *F* (su primera estrategia) y también elige *F* si *A* elige *S* (su segunda estrategia). Por otra parte, la estrategia (*S, F*) indica que *B* elige *S* si *A* elige *F* y *B* elige *F* si *A* elige *S*. Si bien esta tabla señala poco más que la forma normal del juego del dormitorio que presentamos antes (tabla 15.1), la consideración explícita de las elecciones de estrategias contingentes permite analizar los conceptos de equilibrio en el caso de este juego con dos periodos.

Es sorprendente, de alguna manera, que en este juego haya tres equilibrios de Nash: 1) *A:F, B:*(*F, F*); 2) *A:F, B:*(*F, S*); y 3) *A:S, B:*(*S, F*). Cada estrategia cumple el criterio de ser óptima para cada jugador, dada la estrategia del contrario. Sin embargo, los pares 2) y 3) no son creíbles. Cada uno de estos pares incluye una amenaza, de parte del jugador *B* que no resulta veraz. De hecho, esta persona no emprendería la acción especificada si estuviera en posición de hacerlo. Por ejemplo, consideremos el par *A:F, B:*(*F, S*). En este equilibrio de Nash, *B* promete que pondrá la música a volumen suave *S* si *A* también la pone a un volumen suave, *S*. Un vistazo a la figura 15.3 demuestra que esta amenaza no es creíble. Si *B* se encuentra en la situación en que *A* ha elegido *S*, obtendría una utilidad de 3 si elige *S* pero de 4 si elige *F*. La amenaza implícita en la estrategia (*F, S*) no es, por tanto, creíble. Incluso si la estrategia (*F, S*) de *B* es un elemento de un equilibrio de Nash, la persona *A* debería ser capaz de inferir que la amenaza implícita en esta estrategia no es creíble.

Al eliminar las estrategias que implican amenazas no creíbles, *A* puede concluir que *B* nunca optará por (*F, S*) o (*S, F*). Procediendo de esta manera, el juego del dormitorio se reduce a la matriz de pagos que muestra la tabla 15.1; como analizamos anteriormente, en este caso la estrategia *F, F* (siempre poner un volumen fuerte) es una estrategia dominante para *B*. Así, *A* puede darse cuenta de esto y optar por la estrategia *F*. Por tanto, el equilibrio de Nash *A:F, B:*(*F, F*) es el único de los tres que aparecen en la tabla 15.4 que no implica amenazas no creíbles. Este equilibrio se conoce como un ***equilibrio de subjuego perfecto,*** que definimos en términos más formales de la manera siguiente:

Definición

Equilibrio de subjuego perfecto. Un equilibrio de Nash en el cual las estrategias que elige cada jugador no implican amenazas no creíbles. Es decir, ninguna estrategia de este equilibrio exige que un jugador realice una acción que no actúe a favor de su propio interés en el momento en que debe tomar su decisión.

Para poder comprender esta terminología, cabe señalar que un "subjuego" es, simplemente, la parte de un juego que inicia en un nodo de decisión e incluye todas las acciones futuras que se derivan de ese nodo. Para que un equilibrio de Nash pueda ser considerado un equilibrio de subjuego perfecto, también debe ser un equilibrio de Nash en cada subjuego. Un equilibrio de Nash que no cumpla con este criterio incluirá, al menos, una estrategia que contenga la amenaza de hacer una elección que el jugador, de hecho, nunca tomaría, según el criterio de Nash, cuando el juego llegase a ese punto. Por tanto, el aspecto fundamental de la perfección de este subjuego es que este equilibrio no puede incluir una amenaza no creíble.

Por ejemplo, en la figura 15.3, el equilibrio de Nash *A:F, B:*(*F, F*) es un subjuego perfecto porque cuando el juego llega a cualquiera de los nodos de decisión de *B*, la elección *B:F* es óptima. Sin embargo, el equilibrio de Nash *A:F, B:*(*F, S*) no es un equilibrio de subjuego perfecto, puesto que *B* no elegiría *S* en el subjuego que se deriva de su nodo de decisión cuando *A* ha optado por su segunda estrategia *S*. Es decir, *B:S* no es un equilibrio de Nash en el subjuego que parte de este nodo. Por tanto, lo que parece un equilibrio en este juego extendido, según el criterio de Nash, no cumple con el criterio de la perfección del subjuego.

Dado este concepto afinado del equilibrio para el caso de los juegos con muchas personas, ahora podemos pasar a analizar cómo se podría fomentar la cooperación en los juegos que se repiten varias veces.

Juegos repetidos

Podemos crear modelos de muchas situaciones económicas en forma de juegos que se repiten varias veces. Las compras que los consumidores hacen regularmente en una tienda dada, la competencia cotidiana entre empresas para conseguir clientes o los intentos de los trabajadores para ser más listos que los supervisores tienen elementos de relaciones estratégicas que se repiten. En esta sección se estudiarán algunas propiedades formales de estas situaciones.

Como en el ilustrativo ejemplo del juego del dormitorio, un aspecto importante de un juego que se repite son los conjuntos de estrategias que quedan a disposición de los jugadores. Éstos no sólo pueden elegir estrategias específicas en cada etapa del juego, sino que también pueden especificar estrategias que indican cómo los pagos de los periodos anteriores del juego quedarán incorporados a los periodos subsiguientes. Esto abre el camino para considerar las amenazas creíbles y la perfección de los subjuegos.

En el caso de varios juegos, una de las diferencias más importantes es la cantidad de veces que se repita un juego. En rondas de juegos que tienen un número fijo y finito de repeticiones, no hay mucho margen para desarrollar estrategias innovadoras. Por otra parte, los juegos que se pueden repetir infinitas veces o, lo que es lo mismo, los juegos que se repiten, pero en los cuales los jugadores no pueden identificar un punto final preciso, ofrecen una gama de opciones mucho más extendida.

TABLA 15.5 **Ronda de varios juegos del Dilema del prisionero**

		Estrategias de *B*	
		F	*D*
Estrategias de *A*	*A*	1, 1	3, 0
	R	0, 3	2, 2

Ilustración de una ronda de juego finito del dilema del prisionero

Por ejemplo, consideremos el juego que muestra la tabla 15.5. En este caso *A* tiene dos estrategias (*A, B*) al igual que *B* (*I, D*). Es evidente que si sólo se juega un periodo, entonces el resultado esperado podría ser el equilibrio de Nash *A:A, B:I.* Otra elección estratégica cualquiera es inestable y proporciona, cuando menos a uno de los jugadores, un incentivo para modificar su comportamiento. Sin embargo, nótese que los pagos del equilibrio de Nash (1, 1) son inferiores, en el sentido de Pareto, a los existentes para la elección inestable de las estrategias *A:B, B:D,* la cual promete pagos de (2, 2).

Supongamos ahora que se juega, con un número finito de periodos, *T*. Toda estrategia extendida en la cual el jugador *A* afirme que sólo optará por *B* en el último periodo (por ejemplo, como resultado de los periodos anteriores del juego) no será creíble. Cuando llegue el periodo *T* la lógica del equilibrio de Nash imperará y *A* terminará eligiendo la estrategia *A* o correrá el riesgo de ver cómo su rendimiento en la juego *T* pasa a ser 0. Por otra parte, todo conjunto extendido de estrategias del jugador *B* que prometa jugar *D* en el último periodo incluirá una amenaza no creíble.

Por tanto, en el caso de este periodo, todo resultado de equilibrio de un subjuego perfecto sólo puede incluir las estrategias de Nash *A:A, B:I* en el último periodo. Pero la lógica que se aplica en el periodo *T* también se aplica en el periodo $T - 1$. Toda amenaza de *A* o de *B* de aplicar otra estrategia cualquiera que no sea una estrategia de equilibro de Nash en el juego $T - 1$ no será creíble. La perfección del subjuego exige que las estrategias *A:A, B:I* también se apliquen en el juego $T - 1$. Si proseguimos con esta demostración de "inducción hacia atrás" demostraremos que el único equilibrio de subjuego perfecto en esta ronda de periodos finitos consiste en exigir que el equilibrio de Nash se produzca en cada periodo. Las posibles ganancias de *A:B, B:D* permanecerán inalcanzables durante todas las partidas.

Una ronda con periodos infinitos

Sin embargo, esta misma lógica no funcionará si los jugadores de una ronda piensan que los periodos se repetirán infinitamente. En este caso, cada jugador puede anunciar una "estrategia disparadora" o "de gatillo" si promete que jugará con su estrategia de cooperación óptima (*A:B* o *B:D*) siempre y cuando el otro jugador haga lo mismo. Sin embargo, cuando un jugador se desvía de este patrón de comportamiento, el juego vuelve al equilibrio de Nash en el caso de un único periodo que se repite.

La contraparte de la estrategia disparadora será el equilibrio en un subjuego perfecto, dependiendo de que la amenaza (promesa) de jugar en cooperación sea creíble o no. Para analizar esta interrogante tendremos que fijarnos en el subjuego que se da a partir de un periodo específico cualquiera, por decir *K*. Suponiendo que *A* anuncia que seguirá aplicando la estrategia disparadora porque jugará en cooperación en el juego *K,* ¿cuál será la respuesta óptima de *B*? Si sigue jugando en cooperación, cabe esperar que los pagos iguales a 2 se prolonguen indefinidamente. Si decide hacer "trampa" (optando por *D* en la juego *K*), el resultado del juego *K* será 3, pero después bajará a 1 en todos los periodos subsiguientes porque ya no existe cooperación y el equilibrio de Nash ha vuelto a imperar. Suponiendo que *B* aplica un factor de descuento δ, a futuro, entonces el valor presente[9] de que continúe la cooperación será

$$2 + \delta 2 + \delta^2 2 + \cdots = \frac{2}{1-\delta}, \tag{15.12}$$

mientras que el pago que se obtiene por hacer trampa es

$$3 + \delta 1 + \delta^2 1 + \cdots = 3 + \frac{\delta}{1-\delta}. \tag{15.13}$$

Por tanto, el planteamiento de que la cooperación continuará será creíble si

$$2/(1-\delta) > 3 + \delta/(1-\delta), \tag{15.14}$$

lo cual ocurrirá para

$$\delta > ½. \tag{15.15}$$

En otras palabras, *B* encontrará que continuar jugando en cooperación será deseable siempre y cuando no descuente demasiado de las ganancias futuras que resultan de esta cooperación. El ejemplo 15.4 demuestra que incluso los pastores de ovejas pueden cooperar en algunas circunstancias.

EJEMPLO 15.4

Otra vez la tragedia de los comunes

La sobreexplotación de los pastos de las tierras comunales que vimos en el ejemplo 15.3 no puede perdurar en un juego que se repite infinitamente. En aras de la sencillez, supongamos que cada pastor sólo tiene dos estrategias a su alcance: llevar 4 ovejas a los pastizales comunales o llevar 5 ovejas. Podemos calcular los pagos de este juego con la ecuación 15.5 y verlos en la tabla 15.6. En este caso, el equilibrio de Nash (*A*:5, *B*:5) es inferior al resultado que se obtiene habiendo cooperación (*A*:4, *B*:4), pero esta segunda opción es inestable cuando el juego se repite una cantidad finita de veces cualquiera.

Sin embargo, con una cantidad infinita de periodos, los dos jugadores encontrarán atractiva la posibilidad de adoptar estrategias que disparan la cooperación, siempre y cuando

$$544/(1-\delta) > 595 + 500/(1-\delta), \tag{15.16}$$

que es válido para

$$\delta > 551/595 = 0.93. \tag{15.17}$$

Siempre que los pastores tengan bastante visión de futuro (es decir, tengan un δ), lo bastante alto), la cooperación es el equilibrio de un subjuego perfecto en este juego que se repite infinitamente.

Pregunta: En este caso, ¿cómo interpreta las tasas de descuento (δ) necesarias para que haya cooperación? ¿Considera que es probable que se cumplan las condiciones para la cooperación?

---

[9]El factor δ es análogo al término $1/(1 + r)$ empleado en la fórmula del valor presente. Véase la ampliación del capítulo 17 para mayor detalle. Muchas veces es más fácil hacer cálculos con factores de descuento que con tasas de interés.

TABLA 15.6 **Pagos de varias partidas del juego de los pastizales de ovejas**

		Estrategias de *B*	
		4	*5*
Estrategias de *A*	*4*	544, 544	476, 595
	5	595, 476	500, 500

Teorema de folklor

Estas ilustraciones numéricas sugieren que la cooperación puede representar el equilibrio de subjuego perfecto en juegos en los que ambos jugadores pueden ganar, sin ambigüedades, gracias a la cooperación. Es decir, las posibles pérdidas, como las que se producen en el Dilema del prisionero, podrían no generarse si se repite el juego. El planteamiento formal de estos resultados generales, a veces, se conoce por el nombre de *teoremas de folklor* porque muchos economistas creían en ellos antes de que fueran demostrados de hecho. Si bien hay muchas versiones de estos teoremas, la más mencionada probablemente sea la elaborada por J. Friedman en 1971,[10] quien demostró que todo juego repetido infinitamente, en el cual existan pagos que los dos jugadores prefieren en lugar de los que podrían alcanzar en un equilibrio de Nash, tendrá un equilibrio de subjuego perfecto que alcance estos pagos, siempre y cuando los jugadores sean "lo bastante pacientes". Estos jugadores pacientes, es decir, que tengan un δ lo bastante alto, siempre considerarán que es atractivo ceñirse a estrategias disparadoras que prometen rendimientos que durarán mucho tiempo. La perspectiva de la repetición infinita consigue contrarrestar los resultados no óptimos que garantiza la lógica de Nash en los juegos que sólo se repiten unas cuantas veces. Por lo tanto, los resultados alcanzados con la cooperación resultan más creíbles.

Los precios en juegos estáticos

Iniciaremos nuestro análisis considerando el duopolio más sencillo. Supongamos que hay dos empresas (A y B) y que cada una produce el mismo bien a un costo marginal constante, c. Las estrategias de cada empresa consisten en elegir los precios, P_A y P_B, sujeto tan sólo a la condición de que P_A y P_B deben exceder a c (ninguna empresa optaría por un juego que prometiera ciertas pérdidas). Los pagos de este juego estarán determinados por las condiciones de la demanda. Dado que la producción es homogénea y que los costos marginales son constantes, la empresa que tenga el precio más bajo se quedará con todo el mercado. En aras de la sencillez suponemos que si $P_A = P_B$, entonces las empresas se reparten el mercado en partes iguales.

Equilibrio de Nash-Bertrand

En este modelo, el único equilibrio de Nash es $P_A = P_B = c$. Es decir, el equilibrio de Nash es la solución de competencia, a pesar de que sólo hay dos empresas. Para entender por qué, supongamos que la empresa A elige un precio superior a c. La respuesta que maximiza las utilidades de la empresa B será elegir un precio ligeramente por debajo de P_A y acaparar todo el mercado. Pero el precio de B si excede a c, seguirá sin ser un equilibrio de Nash, porque ofrece a A más incentivos para reducir su precio. La elección de $P_A = P_B = c$ es la única que permite que las dos empresas de este mercado alcancen un equilibrio de Nash. Esta estrategia para determinar los precios a veces se conoce como el "equilibrio de Bertrand" en honor del economista francés que lo descubrió.[11]

Restricciones de capacidad: equilibrio de Cournot

La sencillez y contundencia del resultado de Bertrand depende básicamente de los supuestos que fundamentan el modelo. Si las empresas no tienen costos iguales (véase el problema 15.7) o si los bienes que producen las dos no son sustitutos perfectos, el resultado de la competencia

[10] J. Friedman. "A Non-Cooperative Equilibrium for Supergames", *Review of Economic Studies*, marzo de 1971, pp. 1-12.

[11] J. Bertrand. "Théorie Mathematique de la Richess Sociale", *Journal de Savants*, 1883, pp. 499-508.

deja de ser válido. Otros modelos de duopolio que se alejan del resultado de Bertrand consideran que la competencia en precios es tan sólo la etapa final de un juego en dos etapas, en el cual la primera etapa involucra diversos tipos de entradas o de consideraciones de inversión por parte de las empresas. En el ejemplo 14.1 analizamos el ejemplo de Cournot del duopolio de manantiales, en el cual el propietario de cada manantial decidía cuánta agua ofrecer. En el contexto presente, podemos suponer que cada empresa de un duopolio debe elegir determinado nivel de capacidad de producción. El costo marginal es constante hasta ese nivel e infinito a partir de ahí. Parece evidente que un juego de dos etapas, en el cual las empresas eligen primero la capacidad (y después el precio) es, formalmente, idéntico al análisis de Cournot. Las cantidades elegidas en el equilibrio de Cournot representan un equilibrio de Nash porque cada empresa percibe correctamente cuál será la producción de la otra. Una vez tomadas estas decisiones sobre la capacidad, el único precio que puede prevalecer es aquél en el cual la cantidad demandada es igual a las capacidades combinadas de las dos empresas.

Para entender por qué la competencia en precios del tipo Bertrand da lugar a esta solución, supongamos que las capacidades están dadas por $\bar{q}_A$ y $\bar{q}_B$ y que

$$\bar{P} = D^{-1}(\bar{q}_A + \bar{q}_B), \tag{15.18}$$

donde D^{-1} es la inversa de la función de demanda del bien. Una situación en la que

$$P_A = P_B < \bar{P} \tag{15.19}$$

no es un equilibrio de Nash. Con este precio, la cantidad total demandada excede a $\bar{q}_A + \bar{q}_B$, por lo cual cualquier empresa podría aumentar su beneficio incrementando un poco el precio y, no obstante, seguir vendiendo $\bar{q}_A$. Por otra parte,

$$P_A = P_B > \bar{P} \tag{15.20}$$

no es un equilibrio de Nash. Ahora las ventas totales no llegan a $\bar{q}_A + \bar{q}_B$. Cuando menos una empresa (por decir, la empresa A) está vendiendo por debajo de su capacidad. Al disminuir su precio ligeramente, la empresa A aumentará su beneficio si incrementa todas sus ventas posibles hasta $\bar{q}_A$. Por supuesto que B reaccionará ante la pérdida de ventas disminuyendo también un poco su precio. Por tanto, el único equilibrio de Nash que puede prevalecer es el resultado de Cournot:[12]

$$P_A = P_B = \bar{P}. \tag{15.21}$$

Por lo general, este precio estará por debajo del precio de monopolio, pero excederá al costo marginal (tal como en el ejemplo 14.1). Por tanto, los resultados de este juego de dos etapas son los mismos que los del modelo de Cournot del capítulo anterior.

El contraste entre los juegos de Bertrand y de Cournot es sorprendente: el primero prevé que la situación de duopolio dará por resultado la competencia, mientras que el segundo prevé ineficiencias similares a las del monopolio. Esto sugiere que el comportamiento real en los mercados de duopolio puede mostrar una gran variedad de resultados, dependiendo de cómo se presente exactamente la competencia. La principal lección del juego en dos etapas de Cournot es que, incluso con una competencia de precios del tipo de Bertrand, las decisiones tomadas antes de esta etapa final de un juego tienen un efecto importante en el comportamiento del mercado. Algunos de los modelos de la teoría de juegos que representan la entrada de empresas, que se describirá más adelante en este mismo capítulo, también proyectarán esta lección.

Juegos repetidos y colusión tácita

Antes, en este mismo capítulo, se demostró que los jugadores de juegos que se repiten infinitas veces pueden adoptar estrategias de equilibrio de Nash en subjuego perfecto, las cuales producen resultados más favorables que los que podrían obtener simplemente repitiendo indefinidamente un equilibrio de Nash que es menos favorable. Desde la perspectiva de la teoría del duopolio, la interrogante consiste en saber si las empresas deben soportar el equilibrio de Bertrand ($P_A = P_B = c$) en un juego repetido o si pueden alcanzar resultados más rentables por medio de una colusión tácita.[13]

---

[12]Para dejar las cosas completas, cabe señalar que ninguna situación en la cual $P_A \neq P_B$ puede ser un equilibrio. La empresa con el precio bajo tiene un incentivo para elevarlo y la empresa con el precio alto quiere bajarlo.

[13]En este caso, descartamos la colusión explícita entre empresas porque sólo estamos analizando juegos en los cuales no hay cooperación.

Con una cantidad finita de repeticiones, al parecer queda claro que el resultado de Bertrand no se altera. Toda estrategia con la cual la empresa *A*, por decir, elige $P_A > c$ en el periodo *T* (el periodo final) ofrece a *B* la opción de elegir $P_A > P_B > c$. Por tanto, la amenaza de *A* de cobrar P_A en la juego *T* no es creíble. Dado que podemos aplicar un argumento similar a cada periodo cualquiera antes de *T*, queda claro que el único equilibrio del subjuego perfecto en el juego del precio, repetida una cantidad finita de veces, es el resultado de la competencia perfecta, en el cual las dos empresas fijan un precio que es igual al costo marginal en todos los periodos.

Sin embargo, si el juego para fijar los precios se repite una cantidad infinita de periodos, entonces es posible que se presenten estrategias "disparadoras" gemelas. Con estas estrategias, una empresa, por decir, la empresa *A*, elige $P_A = P_M$ (donde P_M es el precio de monopolio) siempre y cuando la empresa *B* haya elegido $P_B = P_M$ en el periodo anterior. Si *B* ha hecho trampa en la juego anterior (fijando P_B ligeramente por debajo de $P_A = P_M$ y quedándose con todos el beneficio de monopolio), la empresa *A* optará por la fijación de precios competitiva ($P_A = c$) en todos los periodos subsiguientes.

Para determinar si estas estrategias disparadoras gemelas constituyen el equilibrio de un subjuego perfecto debemos preguntarnos si constituyen un equilibrio de Nash en cada periodo (cada subjuego). Supongamos que, cuando el juego para fijar los precios se ha repetido por varios periodos, la empresa *B* está considerando la posibilidad de hacer trampa. Sabe que si elige $P_B < P_A = P_M$ se podrá quedar con (casi todo) el beneficio de monopolio, π_M, de un único periodo. Por otra parte, si *B* sigue coludida tácitamente con *A*, entonces *B* obtendrá su parte del flujo de beneficio

$$(\pi_M + \delta\pi_M + \delta^2\pi_M + \cdot\cdot\cdot + \delta^n\pi_M + \cdot\cdot\cdot)/2, \tag{15.22}$$

donde δ es el factor de descuento aplicado a los beneficios posteriores. Dado que el valor de este flujo infinito de beneficios está dado por $(\pi_M/2)[1/(1-\delta)]$, hacer trampa no será rentable siempre y cuando

$$\pi_M < (\pi_M/2)\ [1/(1-\delta)]. \tag{15.23}$$

Algunas operaciones algebraicas demostrarán que esta desigualdad se cumple siempre y cuando

$$\delta > \frac{1}{2}. \tag{15.24}$$

Es decir, siempre y cuando las empresas no estén demasiado impacientes en cuanto a la forma en que descontará el beneficio futuro, las estrategias "disparadoras" representan el equilibrio Nash de un subjuego perfecto de colusión tácita. El ejemplo 15.5 ofrece un ejemplo numérico.[14]

Colusión tácita

Supongamos que sólo hay dos empresas que fabrican barrotes de acero adecuados para ventanas de cárcel. El costo promedio y marginal constante de la producción de los barrotes es \$10 y la demanda de barrotes está determinada por

$$Q = 5000 - 100P. \tag{15.25}$$

Con una competencia de Bertrand, cada empresa fijará un precio de \$10 y el total de barrotes vendidos será de 4000. Dado que el precio de monopolio en este mercado es de \$30, cada empresa tiene un claro incentivo para considerar la posibilidad de estrategias de colusión. Con el precio de monopolio, el beneficio total de cada periodo asciende a \$40 000 (la parte que recibe cada empresa del beneficio total asciende a \$20 000) por lo que cualquiera de las empresas sólo considerará reducir el precio en el siguiente periodo si

$$\$40\,000 > \$20\,000\ (1/1-\delta). \tag{15.26}$$

Si consideramos que, en este modelo, el periodo para fijar los precios es de un año y que un valor razonable de δ es 0.8,[15] el valor presente de la parte de beneficios que cada empresa recibirá

[14]Con la estrategia disparadora, hay otros muchos niveles de precios sostenibles para valores adecuados de δ.

[15]Dado que $\delta = (1/1 + r)$ donde *r* es la tasa de interés, $\delta = 0.8$ implica un *r* de 0.25 (es decir, 25% al año).

a futuro es \$100 000, por lo cual es evidente que no hay muchos incentivos para hacer trampa con el precio. Por otra parte, cada empresa podría estar dispuesta a contraer costos, por ejemplo, controlando el precio de la otra parte o desarrollando una "reputación" de confiabilidad, hasta por \$60 000 del valor presente para mantener el acuerdo.

Colusión tácita con más empresas. La viabilidad de la estrategia disparadora de precios puede depender enormemente de la cantidad de empresas. Con ocho productores de barrotes de acero, la ganancia derivada de infringir el acuerdo de colusión sigue siendo de \$40 000, suponiendo que el tramposo puede acaparar todo el mercado. El valor presente de seguir con el acuerdo es tan sólo de \$25 000 (= \$40 000 ÷ 8 · $\frac{1}{.2}$) por lo cual la estrategia disparadora no es viable para ninguna de las empresas. Incluso habiendo tres o cuatro empresas, o condiciones de demanda menos sensibles, la ganancia de hacer trampa podría exceder a los costos que pudieran ser necesarios para conseguir que funcione el acuerdo de colusión tácito. Por lo tanto, este modelo respalda la idea, de sentido común, de que la colusión tácita es más sencilla cuando hay menos empresas.

Pregunta: En este problema, ¿el factor (común) de descuento δ cómo determina la cantidad máxima de empresas que se podrían coludir con éxito? ¿Cuál es el máximo si $\delta = 0.8$? ¿Qué pasaría si $\delta = 0.9$? Explique sus resultados de forma intuitiva.

Generalizaciones y limitaciones

El contraste entre los resultados de competencia del modelo de Bertrand y los resultados de monopolio del modelo de colusión (con periodos infinitos) sugiere que, en los modelos de la teoría de juegos, la viabilidad de la colusión tácita es muy sensible a los supuestos que se planteen. En nuestro sencillo modelo de colusión tácita hay dos supuestos que son especialmente importantes: 1) que la empresa *B* puede detectar con facilidad si la empresa *A* ha hecho trampa, y 2) que la empresa *B* reacciona ante las trampas adoptando una respuesta muy dura, que no sólo castiga a la empresa *A*, sino que también condena a la empresa *B* a obtener un beneficio nulo en todos los demás periodos. En modelos más generales de la colusión tácita podemos relajar estos supuestos dando cabida, por ejemplo, a la posibilidad de que la empresa *B* difícilmente se daría cuenta de que la empresa *A* ha hecho trampa. Algunos modelos analizan diversos tipos de castigos que *B* podría imponer a *A*; por ejemplo, *B* podría reducir el precio en algún otro mercado en el cual *A* también vende. Estos modelos de juegos "ligados" han pasado a desempeñar un papel muy importante para el estudio de los duopolios del mundo real. Otras categorías de modelos analizan las consecuencias que introducir productos diferenciados tiene en los modelos de colusión tácita o que incorporan otras razones que explican por qué la demanda del producto de una empresa podría no reaccionar de inmediato a las variaciones de precios de su rival. Sobra decir que los resultados de estas actividades para crear modelos son bastante variados.[16] En todos estos modelos, los conceptos de los equilibrios de Nash y de subjuego perfecto siguen desempeñando un papel muy importante para identificar si ciertas elecciones estratégicas, en apariencia viables, pueden dar lugar a que surja una colusión tácita.

Entrada, salida y estrategia

El análisis hecho en capítulos anteriores de la entrada y la salida de mercados en competencia y sin competencia dejaba poco espacio para consideraciones estratégicas. En éste, considerábamos que una posible entrante sólo estaba interesada por la relación entre el precio de mercado que prevalecía y sus propios costos (promedio o marginal). Supusimos que hacer esta comparación no traía grandes problemas. Por otra parte, supusimos que las empresas abandonarán enseguida un mercado cuando encuentran que no será rentable. Sin embargo, un análisis más detallado de la cuestión de la entrada y la salida puede ser considerablemente más complejo. El problema fundamental es que una empresa que quiera entrar o salir de un mercado se debe plantear algunas conjeturas sobre la forma en que su acción afectará el precio de mercado en periodos poste-

[16]Véase J. Tirole. *The Theory of Industrial Organization*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988, cap. 6.

riores. Para formular estas conjeturas, la empresa evidentemente tendrá que tomar en cuenta lo que harán sus rivales. Por tanto, la decisión de comparar el precio y el costo, cosa aparentemente muy sencilla, podría involucrar una serie de posibles planes estratégicos, especialmente si la empresa cuenta con información imperfecta sobre sus rivales.

Costos hundidos y compromiso

Muchos modelos derivados de la teoría de juegos sobre el proceso de entrada destacan la importancia del *compromiso* que la empresa adquiere con un mercado concreto. Si la naturaleza de la producción exige que la empresa realice inversiones de capital para operar en un mercado y si estas inversiones no se pueden desplazar fácilmente a otros usos, la empresa que haga una inversión así estará obligada a ser participante de ese mercado. Los gastos de estas inversiones se suelen denominar *costos hundidos* (o *costos irrecuperables*), y, en términos más formales, se definen de la manera siguiente:

Definición

Costos hundidos. Los *costos hundidos* (*costos irrecuperables*) son inversiones que se hacen de un solo golpe para poder entrar en un mercado. Estas inversiones permiten que la empresa produzca en el mercado, pero no tienen valor residual alguno si la empresa sale de él.

Las inversiones con costos hundidos podrían incluir egresos para adquirir tipos de maquinaria únicos (por ejemplo, las rotativas de un periódico) o la capacitación de los trabajadores específicamente para una tarea (desarrollar las habilidades necesarias para operar la rotativa del periódico). Los costos hundidos tienen muchas características análogas a las de los llamados *costos fijos,* en el sentido que ambos tipos de costos deben ser contraídos aun cuando no se produzca. En lugar de ser contraídos periódicamente, como muchos de los costos fijos (la calefacción de la fábrica), los costos hundidos sólo se contraen una vez durante el proceso de entrada.[17] Cuando la empresa hace este tipo de inversión, se obliga a limitarse al mercado y este compromiso puede tener importantes consecuencias para su comportamiento estratégico.

Costos hundidos, ventajas de ser el primero en jugar y disuasión de la entrada

Si bien a primera vista pudiera parecer que contraer costos hundidos comprometiéndose a cubrir un mercado coloca a la empresa en desventaja, en la mayoría de los modelos no ocurre así. Por el contrario, una empresa muchas veces puede reclamar un nicho en un mercado asumiendo el compromiso de atenderlo y, al hacerlo, también limitará el tipo de acciones que sus rivales podrían encontrar rentables. Por tanto, muchos modelos de la teoría de juegos destacan la ventaja de ser el primero en jugar, como ilustra el siguiente ejemplo.

Algunas situaciones en las cuales ser el primero en jugar podría ofrecer cierta ventaja son invertir en investigación y desarrollo o aplicar estrategias de diferenciación de los productos. Por ejemplo, en la teoría del comercio internacional, a veces se afirma que proteger o subsidiar a la industria nacional podría permitir que ésta entrara primero en una industria, obteniendo con ello una ventaja estratégica. Por otra parte, la estrategia de "proliferación de marcas" que aplican los fabricantes existentes de crema dental y de cereales podrían provocar que las que llegan después tengan dificultad para poder desarrollar un producto lo bastante diferente como para labrarse un lugar en el mercado. Sin embargo, el éxito de las estrategias de ser el primero en jugar no está garantizado en absoluto. Por ello, es preciso crear con cuidado modelos de la situación estratégica para poder saber si ser el primero en jugar ofrece, de hecho, ventajas reales.

---

[17]En términos matemáticos, podemos integrar el concepto de costos hundidos a la función de costo total por periodo como

$$C_i\,(q_i) = S + F_t + cq_t,$$

donde S es la amortización por periodo de los costos hundidos (por ejemplo, los intereses pagados por los fondos empleados para financiar las inversiones de capital), F son los costos fijos por periodo, c es el costo marginal y q_t es la producción por periodo. Si $q_t = 0$, $C_t = S + F_t$, pero si el periodo de producción es lo bastante largo, también sería posible evitar una parte o todo F_t. Sin embargo, ninguna porción de S sería evitable.

EJEMPLO 15.6

Ventaja de ser el primero en jugar en el caso de los manantiales de Cournot

Volvamos de nueva cuenta al duopolio de los manantiales de Cournot que analizamos en los ejemplos 14.1 y 14.2. Según la versión que Stackelberg presenta de este modelo, cada empresa tiene dos estrategias posibles: ser líder (producir $q_i = 60$) o seguidora (producir $q_i = 30$). Definimos los pagos de estas estrategias en el ejemplo 14.2 y los repetimos en la tabla 15.7.

Como se señaló antes, si cada empresa elige la estrategia de líder-líder en este caso, entonces el resultado será desastroso. La elección de seguidora-seguidora (el equilibrio de Cournot) es rentable para las dos empresas, pero es una elección inestable porque proporciona a cada empresa incentivos para tratar de ser líder. Sin embargo, este juego no es como el del Dilema del prisionero, porque la opción líder-líder no es un equilibrio de Nash; es decir, si la empresa *A* sabe que *B* adoptará una estrategia de líder, su mejor jugada será la de seguidora.

Esta característica del juego del duopolio de los manantiales es la que da origen a la ventaja de ser el primero en jugar. Con jugadas simultáneas, cualquiera de los dos pares líder-seguidora representa un equilibrio de Nash. No obstante, si una empresa (por decir *B*) tiene la oportunidad de jugar primero, entonces podrá (si elige $q_B = 60$) dictar cuál de los dos equilibrios de Nash es el elegido. La capacidad de *B* de elegir primero una mayor capacidad de la fábrica impone que *A* deba asumir el papel de seguidora.

Pregunta: Supongamos que se jugarán muchos periodos en el duopolio de los manantiales (por ejemplo, porque los mismos rivales entran en muchos mercados distintos), ¿qué otros tipos de resultados podríamos observar?

TABLA 15.7 **Matriz de pagos en el caso del modelo de Stackelberg**

		Estrategias de *B*	
		Líder ($q_B = 60$)	**Seguidora ($q_B = 30$)**
Estrategias de *A*	**Líder ($q_A = 60$)**	*A:* 0 *B:* 0	*A:* \$1800 *B:* \$ 900
	Seguidora ($q_A = 30$)	*A:* \$ 900 *B:* \$1800	*A:* \$1600 *B:* \$1600

Disuasión de la entrada

En algunas ocasiones las ventajas de ser el primero en jugar pueden ser lo bastante grandes como para disuadir la entrada de otros. La intuición nos dice que sería plausible que el primero en jugar eligiera una estrategia para tener una gran capacidad, desalentando con ella la entrada de todas las demás empresas al mercado. Sin embargo, la lógica económica de esta decisión no es por completo clara. Por ejemplo, en el modelo del duopolio de los manantiales, la única forma segura de que el propietario de un manantial disuada la entrada de otras empresas consiste en satisfacer toda la demanda del mercado al costo promedio y marginal de la empresa; es decir, una empresa tendría que ofrecer $q = 120$ al precio de cero para poder aplicar con éxito la estrategia de disuadir la entrada. Evidentemente, esta elección no le produce utilidades a la empresa en cuestión y no representaría la maximización de su beneficio. Por el contrario, sería mejor que esta empresa aceptara que algunas empresas entraran siguiendo la estrategia de liderazgo de Stackelberg.

Con economías de escala en la producción, aumentan las posibilidades de disuadir la entrada de empresas rentables. Si la empresa que juega primero puede adoptar una escala de operación lo suficientemente grande, entonces podrá limitar la escala de producción de la posible empresa entrante. Por tanto, la posible entrante experimentará costos promedios altos que no tendría sentido alguno entrar en este mercado. El ejemplo 15.7 ilustra esta posibilidad en el caso de los manantiales de Cournot. Este ejemplo tendrá validez general o no dependiendo, entre otras cosas, de que exista la posibilidad de competir en el mercado. Si otras empresas con escalas grandes de operaciones en otras partes pueden aprovechar los precios que exceden al costo marginal para entrar y salir continuamente del mercado, la estrategia de disuadir la entrada de nuevas firmas no tendrá éxito.

EJEMPLO 15.7

Disuasión de la entrada en los manantiales de Cournot

Si los propietarios de los manantiales de nuestros ejemplos anteriores disfrutan de economías de escala, disuadir las empresas entrantes resulta una estrategia rentable para la primera empresa que elige su capacidad. La forma más sencilla de incorporar las economías de escala al modelo de Cournot es suponer que el propietario de cada manantial debe pagar un costo fijo por sus operaciones. Si el costo fijo está dado por $784 (¡una cifra elegida con sumo cuidado!), es evidente que el equilibrio de Nash de las estrategias líder-seguidor sigue siendo rentable para ambas empresas (véase la tabla 15.7). Sin embargo, cuando la empresa *A* juega primero y adopta el papel de líder, las utilidades de *B* serán relativamente pocas (900 – 784 = 116), y esto sugiere que la empresa *A* podría sacar a la empresa *B* totalmente del mercado con sólo ser un poco más agresiva.

Dado que la función de reacción de *B* (ecuación 14.18) no se ve afectada por las consideraciones de los costos fijos, la empresa *A* sabe que

$$q_B = \frac{120 - q_A}{2} \qquad (15.27)$$

y el precio de mercado estará determinado por

$$P = 120 - q_A - q_B. \qquad (15.28)$$

Por tanto, *A* sabe que el beneficio de *B* asciende a

$$\pi_B = Pq_B - 784, \qquad (15.29)$$

que, cuando *B* es seguidora (es decir, cuando *B* es la segunda en jugar), depende tan sólo de q_A. Al sustituir la ecuación 15.27 en la 15.29 se obtendrá

$$\pi_B = \left(\frac{120 - q_A}{2}\right)^2 - 784. \qquad (15.30)$$

Por tanto, la empresa *A* puede garantizar que *B* no tendrá un beneficio positivo si elige

$$q_A \geq 64. \qquad (15.31)$$

Con $q_A = 64$, la empresa *A* pasa a ser la única oferente de agua de manantial. Dado que, en este caso, el precio de mercado es de $56 (= 120 – 64) las utilidades de la empresa *A* ascienden a

$$\pi_A = (56 \cdot 64) - 784 = 2800, \qquad (15.32)$$

una mejora sustancial respecto al resultado líder-seguidora. La posibilidad de ser el primero en jugar, aunada a los costos fijos que hemos supuesto en este caso, hacen que sea factible la estrategia de disuadir la entrada.

Pregunta: ¿El patrón temporal de las jugadas de este juego por qué es esencial para el resultado de disuadir la entrada? ¿Qué ocurre cuando se compara este resultado con nuestro análisis del monopolio disputable del ejemplo 14.5?

Entrada e información incompleta

Hasta este punto nuestro análisis de las consideraciones estratégicas de las decisiones de entrar ha girado en torno a cuestiones relativas a los costos hundidos y a los compromisos de producción. Hemos supuesto que, una vez asumidos esos compromisos, un proceso de subastas a la Bertrand determinan los precios. Un planteamiento algo distinto de la disuasión de la entrada se refiere a la posibilidad de que un monopolio, que ocupa tal posición, logre esta meta tan sólo por medio de su política de precios. Es decir, ¿existen situaciones en las cuales un monopolio puede elegir, intencionadamente, una política de precios bajos ("límite") con la meta de disuadir las entradas a este mercado?

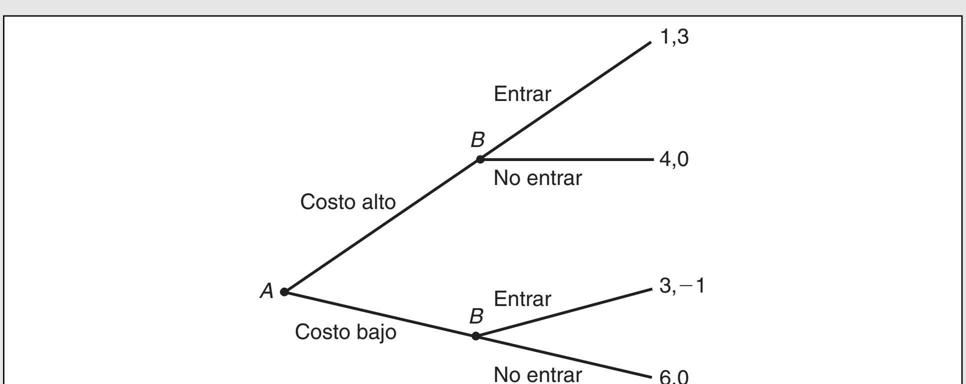
En los casos más sencillos, la estrategia de fijar un precio límite, al parecer, no produce un beneficio máximo ni es sostenible a lo largo del tiempo. Si un monopolio, que ocupa esta posición, opta por un precio de $P_L < P_M$ (donde P_M es el precio que maximiza el beneficio), evidentemente estará perjudicando su beneficio del periodo corriente. Sin embargo, este precio límite sólo disuadirá las entradas futuras si P_L está por debajo del costo promedio de una posible entrante. Si el monopolio y la posible entrante tienen los mismos costos (y si las elecciones de la capacidad no desempeñan el mismo papel que en el ejemplo anterior), el único precio límite sostenible en presencia de una posible entrada será $P_L = CP$, pero su adopción evidentemente iría en contra del propósito de ser un monopolio, porque el beneficio sería nulo. Por tanto, el modelo básico del monopolio no ofrece mucho margen para disuadir la entrada por medio del comportamiento de los precios; es decir, existen barreras a la entrada que permiten al monopolio mantener P_M, no existen dichas barreras, en cuyo caso prevalecerá el caso de la fijación de precios en competencia.

Precios límite e información incompleta

Por tanto, los modelos creíbles para fijar precios límite se deben alejar de los supuestos tradicionales. El conjunto más importante de estos modelos es el compuesto por aquellos que involucran información incompleta. Si un monopolio, que ocupa tal posición, sabe más sobre una situación determinada del mercado que una posible entrante, entonces podrá aprovechar su mayor conocimiento para disuadir la entrada. Por ejemplo, consideremos el árbol del juego de la figura 15.4. En este caso, la empresa *A*, el monopolista que ocupa ese lugar, podría tener costo de producción "alto" o "bajo", dependiendo de las elecciones que haya tomado en el pasado. De hecho, la empresa *A* no puede elegir su costo corriente, pero, como *B*, no conoce este costo, damos cabida a dos posibilidades. Evidentemente, la rentabilidad de *B* al entrar en el mercado dependerá del costo de *A*; es decir, con costo alto, la entrada de *B* es rentable ($\pi_B = 3$), mientras que si *A* tiene costo bajo, la entrada no será rentable ($\pi_B = -1$). ¿Qué debe hacer *B*?

FIGURA 15.4 **Un juego para entrar**

La empresa *A* tiene una estructura de costo "alto" o "bajo" que no puede observar *B*. Si *B* asigna una probabilidad subjetiva (ρ) a la posibilidad de que *A* tenga costos altos, entrará siempre y cuando $\rho > \frac{1}{4}$. La empresa *A* puede tratar de influir en la rentabilidad que estima *B*.



Una posibilidad sería que *B* utilice toda la información que pudiera tener para, con ella, estimar la probabilidad subjetiva de la verdadera estructura de costo de *A*. Es decir, *B* debe asignar estimados de probabilidades a los estados naturales de "costo bajo" y de "costo alto". Si *B* supone que hay una probabilidad ρ de que *A* tenga costo alto y $(1 - \rho)$ de que tenga costo bajo, la entrada producirá un beneficio esperado positivo siempre y cuando

$$E(\pi_B) = \rho(3) + (1 - \rho)(-1) > 0, \tag{15.33}$$

que es válido para

$$\rho > \frac{1}{4}. \tag{15.34}$$

Los aspectos más interesantes de este juego se refieren a la posibilidad de que *A* pueda influir en las probabilidades que estima *B*. Es evidente que, independientemente de cuál sea su costo *A* estará mejor si *B* adopta la estrategia de no entrar, y una forma de asegurarse de ello es que *A* haga creer a *B* que $\rho < \frac{1}{4}$. En un caso extremo, si *A* puede convencer a *B*, con certeza, de que es un productor que tiene costos bajos ($\rho = 0$), claramente disuadirá la entrada de *B*, incluso si la situación real del costo es otra. Por ejemplo, si *A* elige una política de precio bajo cuando cubre el mercado como monopolio, esto puede enviar la señal a *B* de que los costos de *A* son bajos y, por lo mismo, disuadir la entrada de *B*. Esta estrategia podría ser rentable para *A*, a pesar de que requiera que sacrifique parte del beneficio si su costo, en realidad, es alto. Lo anterior presenta una posible lógica para determinar precios límite bajos como estrategia para disuadir la entrada.

Por desgracia, como se verá en el capítulo 19, el análisis de las posibilidades de enviar señales de equilibrio en situaciones de información asimétrica plantea muchas complejidades. Como la empresa *B* sabe que *A* puede crear señales falsas y como la empresa *A* sabe que *B* desconfiará de sus señales, al parecer, este juego tendría varias soluciones posibles. La viabilidad de fijar precios límite como estrategia para poder disuadir la entrada dependerá, fundamentalmente, del tipo de supuestos que se planteen en tanto de la información.[18]

Precios depredatorios

Los instrumentos empleados para estudiar cómo fijar precios límite también pueden arrojar algo de luz en tanto de la posibilidad de fijar precios "depredatorios". Desde la formación del monopolio de Standard Oil, a finales del siglo XIX, uno de los mitos que giran en torno a las empresas estadounidenses ha sido que John D. Rockefeller fue capaz de sacar del mercado a sus competidores fijando precios excesivamente bajos (depredatorios). Si bien la lógica económica y los hechos empíricos que sustentan esta versión de la historia de Standard Oil normalmente han sido desechados[19] la posibilidad de alentar la salida por medio de la depredación sigue ofreciendo interesantes posibilidades para crear modelos teóricos.

La estructura de muchos modelos de comportamiento depredador es análoga a la empleada en los modelos para fijar precios límite; es decir, los modelos hacen hincapié en la información incompleta. Una empresa que ocupa un lugar en el mercado desea propiciar que su rival que salga de él y, por lo mismo, emprende acciones que pretenden afectar la visión que la rival tiene sobre la rentabilidad futura de participar en ese mercado. Por ejemplo, la que está en el mercado puede adoptar una política de precio bajo en un intento por enviar una señal a su rival de que ella tiene costo bajo, a pesar de que no sea así. Asimismo, la empresa que está en el mercado puede realizar muchas actividades de publicidad o de diferenciación del producto con la intención de convencer a su rival de que disfruta de economía de escala en este tipo de actividad. Si la rival queda convencida de que la empresa que está en el mercado disfruta de estas ventajas, entonces podría volver a calcular la rentabilidad que espera de sus decisiones de producción y tal vez decida salir del mercado. Por supuesto que, al igual que en los modelos para fijar precios límite, el éxito de estas estrategias depredadoras no es una conclusión contundente. Su viabilidad depende fundamentalmente de la índole de las asimetrías de la información que existan en el mercado.

---

[18]Encontrará un análisis de algunas de estas cuestiones en P. Milgrom y J. Roberts. "Limit Pricing and Entry Under Conditions of Incomplete Information: An Equilibrium Analysis", *Econometrica*, marzo de 1982, pp. 443-460.

[19]J. S. McGee y otros han señalado que la estrategia de fijar precios depredadores fue mucho menos rentable para Rockefeller que la de simplemente adquirir a las rivales a su precio de mercado (que, al parecer, fue lo que ocurrió en realidad). Véase J. S. McGee. "Predatory Pricing: The Standard Oil (NJ) Case", *Journal of Law and Economics* (1958), pp. 137-169; y "Predatory Pricing Revisited", *Journal of Law and Economics*, octubre de 1980, pp. 289-330. Las obras más recientes han analizado si fijar precios depredadores afecta el valor de mercado de la empresa rival.

Juegos con información incompleta

Los ejemplos de la sección anterior sugieren que es deseable ampliar los modelos de la teoría de juegos para que incluyan casos de información incompleta. En esta sección se ofrece un breve resumen de algunas de las formas en que podemos hacer lo anterior.

Tipos de jugadores y creencias

Para generalizar las ideas de la teoría de juegos de modo que reflejen una información incompleta se debe introducir un poco de terminología nueva. En un juego, podemos introducir características de los jugadores o "tipos" para conseguir que la naturaleza de la información incompleta se deba a asimetrías en la información que unos jugadores tienen de los otros.[20] En un juego, cada jugador puede pertenecer a cualquiera de los posibles tipos (que, en el caso de nuestros dos jugadores, llamaremos t_A y t_B). Los tipos de jugadores pueden variar en distintas dimensiones, pero, para nuestro análisis, se centrará nuestra atención en distintas funciones de los posibles pagos (utilidades). Supondremos, normalmente, que cada jugador conoce sus pagos, pero no conoce con certeza los del otro jugador. Por tanto, cada jugador se debe plantear algunas "conjeturas" sobre los pagos del contrario para poder evaluar sus propias elecciones estratégicas.

El conjunto de conjeturas $f_A\ (t_B)$ representa las conjeturas de cada jugador sobre el tipo de jugador que es su contrincante. Estas conjeturas representan la probabilidad que ha estimado, por decir, el jugador A de que su contrincante B sea de cierto tipo. Al igual que en el árbol del juego de la figura 15.4, la conjetura de un jugador sirve para expresar la probabilidad de que el otro jugador se encuentre en determinadas ramas del árbol. Los juegos de información incompleta a veces se conocen como "juegos bayesianos" debido a que emplean probabilidades subjetivas de las creencias, tema que el estadístico Thomas Bayes fuera el primero en analizar en el siglo XVIII.

Dados estos nuevos instrumentos, ahora podremos generalizar la notación de un juego (véase la ecuación 15.1) como:

$$J[S_A, S_B, t_A, t_B, f_A, f_B,\ U_A(a,b,t_A,t_B), U_B(a,b,t_A,t_B)], \qquad \textbf{(15.35)}$$

donde los pagos de A y B no sólo dependen de las estrategias elegidas ($a \subset S_A$, $b \subset S_B$) sino también del tipo de los jugadores. Ahora se tendrá que generalizar el concepto de equilibrio de Nash para tener en cuenta esta estructura más compleja del juego.

Equilibrio bayesiano de Nash

En el caso de juegos estáticos (de un periodo), resulta relativamente sencillo generalizar el concepto de equilibrio de Nash para que refleje la información incompleta. Dado que los pagos de cada jugador dependen del tipo (desconocido) de jugador que sea el contrario, debemos introducir un criterio para la utilidad esperada. Un par de estrategias (a^*, b^*) será un equilibrio bayesiano de Nash siempre y cuando a^* maximice la utilidad esperada de A cuando B juega b^*, y viceversa. En concreto, debemos modificar las ecuaciones 15.2 de la manera siguiente

$$\begin{aligned} E[U_A(a^*, b^*, t_A, t_B)] &= \sum_{t_B} f_A(t_B) U(a^*, b^*, t_A, t_B) \\ &\geq E[U_A(a', b^*, t_A, t_B)] \quad \textbf{para toda} \quad a' \subset S_A \end{aligned}$$

donde **(15.36)**

$$\begin{aligned} E[U_B(a^*, b^*, t_A, t_B)] &= \sum_{t_A} f_B(t_A) U(a^*, b^*, t_A, t_B) \\ &\geq E[U_B(a^*, b', t_A, t_B)] \quad \textbf{para toda} \quad b' \subset S_A. \end{aligned}$$

Nótese aquí que los pagos de cada jugador dependen del tipo de los dos jugadores, pero que las expectativas de A sólo conciernen sus creencias sobre el tipo de B (dado que el jugador A sabe cuál es su propio tipo). Por su parte, el jugador B sabe cuál es su tipo, pero debe tener expectativas sobre el tipo al que pertenece A. Si bien la notación de la ecuación 15.36 es formidable, la mayor parte de las aplicaciones son sencillas y sólo involucran algunos tipos de jugadores, tal como ilustra el ejemplo 15.8.

---

[20] La información sobre un juego también puede estar sujeta a incertidumbres si un jugador no conoce la historia del juego (es decir, las estrategias que ha seguido el otro jugador en el pasado). Estos juegos se llaman juegos de información "imperfecta" y suman información nueva a muchos problemas de la teoría tradicional de los juegos, inclusive soluciones plausibles de equilibrio en el caso del Dilema del prisionero que se repiten en cantidad finita.

EJEMPLO 15.8

Un equilibrio bayesiano de Cournot

Supongamos que un duopolio compite por un mercado en el cual la demanda está determinada por

$$P = 100 - q_A - q_B. \tag{15.37}$$

Supongamos primero que $CMg_A = CMg_B = 10$. Así, resulta sencillo demostrar que el equilibrio de Nash (Cournot) es $q_A = q_B = 30$ y que los pagos están dados por $\pi_A = \pi_B = 900$.

Información imperfecta. Para dar a este juego un toque bayesiano, supongamos ahora que $CMg_A = 10$, puede ser alto ($CMg_B = 16$) o bajo ($CMg_B = 4$). Supongamos también que A asigna las mismas probabilidades a estos dos "tipos" de B de modo que el costo marginal esperado de B sigue siendo 10.

Empecemos por analizar este problema con el caso de la empresa B. Dado que B sabe que sólo hay un tipo de A, no tiene que considerar expectativas. Elige q_B para maximizar

$$\pi_B = (P - CMg_B)(q_B) = (100 - CMg_B - q_A - q_B)(q_B), \tag{15.38}$$

y la condición de primer orden para un máximo es

$$q_B^* = (100 - CMg_B - q_A)/2. \tag{15.39}$$

Nótese que q_B^* depende del costo marginal de la empresa B que sólo ella conoce con certeza. Con un costo marginal alto su elección óptima será

$$q_{BH}^* = (84 - q_A)/2, \tag{15.40}$$

y con un costo marginal bajo su elección óptima será

$$q_{BL}^* = (96 - q_A)/2. \tag{15.41}$$

La empresa A debe tener en cuenta que B podría tener un costo alto o bajo. Su beneficio esperado está determinado por

$$\begin{aligned}\pi_A &= 0.5(100 - CMg_A - q_A - q_{BH})(q_A) + 0.5(100 - CMg_A - q_A - q_{BL})(q_A)\\ &= (90 - q_A - 0.5q_{BH} - 0.5q_{BL})q_A.\end{aligned} \tag{15.42}$$

Por tanto, la condición de primer orden para el máximo de utilidades es

$$q_A^* = (90 - 0.5q_{BH} - 0.5q_{BL})/2, \tag{15.43}$$

y tendremos que resolver simultáneamente las ecuaciones 15.40, 15.41 y 15.43 para q_{BH}^*, q_{BL}^* y q_A^*. Unas operaciones algebraicas nos darán el equilibrio bayesiano de Nash:

$$\begin{aligned}q_A^* &= 30\\ q_{BH}^* &= 27\\ q_{BL}^* &= 33.\end{aligned} \tag{15.44}$$

Estas elecciones estratégicas constituyen un equilibrio *ex-ante*. Una vez que se ha jugado, sólo habrá un equilibrio de mercado, dependiendo de que la empresa B tenga, de hecho, costo alto o bajo. Sin embargo, el concepto de equilibrio bayesiano de Nash aclara cómo las incertidumbres que afronta A intervienen en las estrategias que elige esa empresa.

Pregunta: En este caso q_A^* en el equilibrio bayesiano de Nash es el mismo valor que en el equilibrio de Cournot, en el cual el costo marginal de la empresa B es igual a su valor esperado de 10. ¿Por qué es así? ¿Esperaría usted que, por lo general, los valores esperados se puedan emplear para calcular el equilibrio bayesiano de Nash?

Existencia del equilibrio

La demostración de la existencia de los equilibrios bayesianos de Nash, se parece mucho al análisis que hicimos un poco antes. La demostración anterior se generaliza considerando que cada tipo de jugador, en un juego bayesiano estático, es un jugador distinto. Ante esta acrecentada cantidad de jugadores, la demostración anterior sugiere la existencia de una estrategia pura para el equilibrio de Nash en el caso de los juegos que tienen estrategias continuas y la existencia de una estrategia mixta para el equilibrio en el caso de los juegos en los cuales cada tipo de jugador tiene un conjunto finito de estrategias discretas. En este juego extendido de certidumbre, las elecciones de estrategias que incluyen un equilibrio de Nash también constituirán un equilibrio bayesiano, dadas las creencias de los jugadores en tanto de las probabilidades de que existan distintos tipos de jugadores.

Diseño del mecanismo y subastas

El concepto de equilibrio bayesiano tiene una importante aplicación para estudiar cómo operan diversos mecanismos económicos, sobre todo, las subastas. Con el análisis de las soluciones de equilibrio en función de diversas reglas posibles para realizar la subasta, la teoría de juegos ha podido diseñar procedimientos que producen resultados deseables en términos de obtener precios altos por los bienes que se están vendiendo y de garantizar que los bienes terminan en manos de quienes les conceden más valor. Las características de las subastas, tal como las múltiples rondas de oferta, los precios de reserva o los diseños de segundos precios (en cuyo caso el ganador de la subasta paga la segunda oferta más alta) pueden ser bastante complicadas. Los instrumentos de la teoría de juegos ayudan a ilustrar las operaciones subyacentes de estas características y a determinar si éstas animan a los participantes de una subasta a revelar cuál es el verdadero valor que otorgan al bien que se está vendiendo. Si bien un estudio exhaustivo de la teoría de las subastas no cabe dentro del propósito de este libro, el ejemplo 15.9 ilustra algunas de las características de estos modelos.[21] El problema 15.12, que se centra en las subastas de segundo precio, profundiza un poco más este análisis.

Subasta de un terreno petrolífero

Supongamos que dos empresas están subastando por un terreno en cuyo subsuelo podría haber petróleo. Cada empresa ha hecho algunos análisis geológicos preliminares y ha decidido cuál es el posible valor del terreno (respectivamente V_A y V_B). Es evidente que la persona que vende el terreno querría obtener el precio más alto posible por el mismo, el cual, en este caso, sería el que fuera más alto de V_A o V_B. ¿Se podría lograr este objetivo con una sencilla oferta sellada?

Para desarrollar este problema como un juego bayesiano, primero tenemos que hacer un modelo de lo que cada empresa cree respecto a las valoraciones de la otra. En aras de la sencillez, supongamos que $0 \leq V_i \leq 1$ y que cada empresa supone que todos los posibles valores estimados por la otra empresa tienen las mismas probabilidades. En términos estadísticos, suponemos que la empresa A considera que V_B se distribuye uniformemente a lo largo del intervalo $[0, 1]$, y viceversa. Ahora, cada empresa debe decidir cuál será su oferta (b_A y b_B). La ganancia de la subasta para la empresa A, será, por ejemplo

$$V_A - b_A \text{ si } b_A > b_B \tag{15.45}$$

y[22]

$$0 \text{ si } b_B > b_A.$$

Para derivar las estrategias explícitas de oferta de cada jugador, supongamos que cada uno opta por ofertar una fracción, k_i ($k_i \leq 1$) de su valoración. Es decir,

$$b_i = k_i V_i \qquad i = A, B. \tag{15.46}$$

(*continúa*)

[21] Encontrará un resumen general en V. Krishna. *Auction Theory*, Academic Press, San Diego, 2002.

[22] Para simplificar este análisis suponemos que la probabilidad $b_A = b_B$ es igual a cero.

EJEMPLO 15.9 *CONTINUACIÓN*

Así, la ganancia esperada de la empresa A será

$$\pi_A = (V_A - b_A) \cdot \mathrm{Prob}(b_A > b_B) \tag{15.47}$$

y

$$\mathrm{prob}(b_A > b_B) = \mathrm{prob}(b_A > k_B V_B) = \mathrm{prob}(b_A/k_B > V_B) = b_A/k_B, \tag{15.48}$$

donde la igualdad final surge porque A cree que V_B tiene una distribución uniforme. Por tanto

$$\pi_A = (V_A - b_A) \cdot b_A/k_B, \tag{15.49}$$

que se maximiza cuando

$$b_A = V_A/2. \tag{15.50}$$

Una argumentación lógica análoga nos llevaría a concluir que

$$b_B = V_B/2, \tag{15.51}$$

por lo cual la empresa que tenga la valoración más alta ganará el terreno petrolífero y pagará un precio que tan sólo asciende a la mitad de la valoración geológica. Por tanto, la subasta que hemos descrito hasta ahora no da lugar a una auténtica revelación de las valoraciones de los participantes en la oferta.

Efecto de nuevos participantes. Sin embargo, la presencia de nuevos participantes en la oferta mejorará la situación. Con $n - 1$ participantes más, el beneficio esperado por la empresa A es

$$\pi_A = (V_A - b_A) \cdot \mathrm{Prob}(b_A > b_i,\ i = 1\ .\ .\ .\ n - 1) \tag{15.52}$$

y (de nueva cuenta descartando el problema de oferta iguales)

$$\pi_A = 0 \text{ si } b_i > b_A \text{ para cualquiera } i \tag{15.53}$$

Si la empresa A sigue creyendo que las valoraciones de cada uno de sus rivales están distribuidas uniformemente a lo largo del intervalo $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}(b_A &> b_i, i = 1 \ldots n) \\ &= \mathrm{Prob}(b_A > k_i V_i \qquad i = 1 \ldots n) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} (b_A/k_i) = b_A^{n-1}/k^{n-1}, \end{aligned} \tag{15.54}$$

donde, por simetría, permitimos que $k = k_i$ para todo i. Por lo tanto

$$\pi_A = (V_A - b_A)(b_A^{n-1}/k^{n-1}), \tag{15.55}$$

y la condición de primer orden para obtener un máximo será

$$b_A = \left(\frac{n-1}{n}\right) V_A. \tag{15.56}$$

Por lo tanto, a medida que aumenta el número de participantes en la subasta, cada vez hay más incentivos para revelar la verdadera valoración de cada empresa. En el lenguaje de la teoría de las subastas, las posturas selladas son "compatibles con los incentivos", siempre y cuando haya una cantidad suficiente de participantes. Nótese, sin embargo, que este mecanismo no revela la verdad porque $b_A < V_A$. Véanse el problema 15.12 y las ampliaciones al final del capítulo 21 que hablan más de los mecanismos para revelar la verdad.

Pregunta: ¿Un vendedor podría mitigar las valoraciones bajas que surgen cuando hay pocos participantes en la subasta si especifica un precio de reserva, r, de tal modo que no se realice la venta si la oferta más alta es inferior a r?

Juegos dinámicos con información incompleta

Los juegos con varios periodos y repetidos también se pueden caracterizar por una información incompleta. Como sugiere nuestro análisis informal del juego que ilustra la figura 15.4, la característica adicional interesante de estos juegos es que un jugador puede ser capaz de inferir el tipo al que pertenece su contrario con base en las estrategias que elige éste. Por tanto, es necesario que los jugadores actualicen sus creencias incorporando la nueva información aportada por cada ronda del juego. Por supuesto que cada jugador es consciente de que su contrincante también estará actualizando sus propias conjeturas, por lo cual también se debe tener en cuenta este hecho para elegir una estrategia. Si se emplea el método de inducción hacia atrás, podremos derivar una estrategia de equilibrio en los juegos que reflejan el concepto de subjuego perfecto que introdujimos en el marco de los juegos repetidos con información perfecta. En la actualidad, el análisis de estos conceptos de equilibrio constituye un importante campo de investigación de la teoría de juegos.[23]

RESUMEN

En este capítulo hemos ilustrado algunos conceptos de la teoría de juegos y se ha demostrado cómo los podemos emplear para analizar cómo se fijan los precios en duopolios. Algunos de los resultados principales son los siguientes:

- Todos los juegos se caracterizan por una estructura que incluye a jugadores, estrategias y pagos. El concepto de equilibrio de Nash ofrece un concepto de solución, intuitivamente atractivo, para muchos juegos en los cuales cada jugador elige la estrategia óptima dada la estrategia óptima que elige el otro jugador.
- Los juegos de dos jugadores, sin cooperación y con conjuntos de estrategias continuas, normalmente tienen uno o varios equilibrios de Nash. Los juegos con un único conjunto finito de estrategias también tendrán equilibrios de Nash en estrategias mixtas.
- Cuando se repiten los juegos, el equilibrio de Nash que involucran tan sólo amenazas creíbles se llama *equilibrio de subjuego perfecto*.
- A veces es posible alcanzar resultados que son superiores a los equilibrios de Nash, en el sentido de Pareto, mediante un juego que se repite infinitamente usando estrategias que disparan la cooperación.
- En un juego simple de un único periodo, el equilibrio de Nash-Bertrand implica fijar precios competitivos con un precio igual al costo marginal. El equilibrio de Cournot (con $p > mc$) puede ser interpretado como un juego de dos etapas en el cual las empresas eligen primero una restricción de capacidad.
- La colusión tácita es un posible equilibrio de un subjuego perfecto en un juego repetido infinitamente. Sin embargo, la probabilidad de esta colusión de equilibrio disminuye cuando va aumentando la cantidad de empresas, porque aumenta el incentivo para hacer trampa en el precio.
- Algunos juegos ofrecen ventajas cuando se juega en primer lugar. En los casos en los cuales hay rendimientos crecientes a escala, estas ventajas pueden disuadir a empresas entrantes.
- Los juegos con información incompleta surgen cuando los jugadores no conocen las funciones de los pagos de sus contrarios y se deben plantear conjeturas al respecto. En este tipo de juegos bayesianos, los conceptos de equilibrio implican generalizaciones directas de los conceptos de Nash y de subjuego perfecto que encontramos en los juegos con información completa.

[23]Encontrará un resumen en D. Fudenberg y J. Tirole. *Game Theory*, MIT Press, Cambridge, MA, 1991, caps. 8-10.

PROBLEMAS

15.1

Fudenberg y Tirole (1992) desarrollan un juego de caza del ciervo a partir de una observación que, originalmente, hizo Rousseau. Los dos jugadores del juego pueden cooperar para cazar un ciervo o cada uno puede tratar de cazar una liebre por su cuenta. La matriz de pagos de este juego está determinada por

		Jugador *B*	
		Ciervo	**Liebre**
Jugador *A*	**Ciervo**	2, 2	0, 1
	Liebre	1, 0	1, 1

a. Describa el equilibrio de Nash en este juego.

b. Supongamos que *B* cree que *A* utilizará una estrategia mixta cuando decide cómo va a cazar. ¿La elección óptima de *B* cómo dependerá de la probabilidad de que *A* decida cazar un ciervo?

c. Supongamos que este juego se amplía a n jugadores (el juego en el que pensaba Rousseau) y que los n jugadores deben cooperar para poder cazar el ciervo. Suponiendo que los pagos para un jugador dado, por decir, el *B,* sigan siendo los mismos, y que todos los demás $n - 1$ jugadores opten por estrategias mixtas, ¿la estrategia óptima de *B* cómo dependerá de las probabilidades con las que cada uno de los demás jugadores decida cazar a un ciervo? Explique por qué la cooperación parece menos probable en este juego extendido.

15.2

Los jugadores *A* y *B* han encontrado 100 dólares en la acera y están discutiendo cómo deben repartirlos. Otro viandante sugiere el siguiente juego: "Cada uno de ustedes dice el número de dólares que se quiere llevar (d_A, d_B). Si $d_A + d_B \leq 100$ cada uno se queda con la cifra que ha dicho y yo me llevo lo que reste. Si $d_A + d_B > 100$, yo me quedo los 100 dólares". ¿Hay un único equilibrio de Nash en este juego de estrategias continuas?

15.3

El equilibrio de Nash con estrategias mixtas para el juego de la Guerra de los sexos descrito en el ejemplo 15.1 puede depender de los valores numéricos de los pagos. Para generalizar esta solución, supongamos que la matriz de los pagos está determinada por

		Estrategias de *B*	
		Montaña	**Playa**
Estrategias de *A*	**Montaña**	K, 1	0, 0
	Playa	0, 0	1, K

donde $K \geq 1$. Demuestre que, en el caso de este juego, este equilibrio de Nash con estrategias mixtas depende del valor de K.

15.4

En *A Treatise on the Family* (Harvard University Press, Cambridge, 1981), G. Becker propone su famoso teorema del Niño Mimado como un juego entre un niño (posiblemente mimado) *A,* y su padre, *B. A* mueve primero y elige una acción, *r,* que afecta a su propio ingreso $Y_A(r)$ ($Y'_A > 0$) y al ingreso del padre $Y_B(r)$ ($Y'_B < 0$). En la segunda fase del juego, el padre deja una cantidad L de dinero a su hijo. Al niño sólo le importa su propio beneficio, $U_A(Y_A + L)$, pero el padre maximiza $U_B(\Upsilon_B - L) + \lambda U_A$, donde $\lambda > 0$ refleja el altruismo del padre hacia su hijo. Demuestre que el hijo optará por el valor de r que maximiza $\Upsilon_A + \Upsilon_B$ a pesar de que no tiene intención altruista alguna. (*Pista:* primero tiene que calcular el legado óptimo del padre y después la estrategia óptima del hijo, dado el posterior comportamiento del padre.)

15.5

Dos jóvenes adolescentes juegan al juego de la "gallina", que consiste en acelerar su auto, el uno frente al otro, en un camino de un solo carril. El primero que se desvía es acusado de ser gallina, mientras que el que sigue de frente merece el reconocimiento del grupo de amigos. Por supuesto que si ninguno de los dos se desvía, ambos morirán en el consiguiente choque. La tabla siguiente presenta los pagos del juego.

		Estrategias de *B*	
		Gallina	**No gallina**
Estrategias de *A*	**Gallina**	2, 2	1, 3
	No gallina	3, 1	0, 0

a. ¿Este juego tiene un equilibrio de Nash?

b. ¿La amenaza de cualquiera de los dos de que no se acobardará es creíble?

c. ¿La capacidad de un jugador para comprometerse firmemente con la estrategia de no acobardarse (por ejemplo, quitando el volante) sería deseable para ese jugador?

d. Si usted ha visto la película *A Beautiful Mind,* diga cómo interpretaría la escena del bar al tenor del juego de la gallina. ¿Puede explicar cuál era la visión de Nash?

15.6

Consideremos la siguiente subasta con posturas selladas para una estampilla rara de béisbol. El jugador *A* considera que el valor de subasta de la estampilla es \$600, mientras que el jugador *B* la valora en \$500, y los dos jugadores que enviarán la postura cerrada conocen estas valoraciones. El que realice una oferta más alta se llevará la estampilla. Si envían ofertas iguales, el subastador tirará una moneda al aire para decidir quién gana. Ahora, cada jugador tiene que decidir cuánto ofrecerá.

a. ¿Cómo clasificaría las estrategias de este juego? ¿Algunas estrategias dominan a otras?

b. ¿Este juego tiene un equilibrio de Nash? ¿Es el único?

c. ¿Cómo cambiaría este juego si cada jugador no supiera cuál es la valoración del otro?

15.7

Supongamos que las empresas *A* y *B* operan en condiciones de costos promedio y marginal constantes, pero que $CM\mathcal{g}_A = 10$, $CM\mathcal{g}_B = 8$. La demanda del producto de estas empresas está determinada por

$$Q_D = 500 - 20P.$$

a. Si las empresas practican una competencia del tipo de Bertrand, ¿cuál será el precio de mercado en el equilibrio de Nash?

b. ¿Cuáles serán las utilidades de cada empresa?

c. ¿Este equilibrio será eficiente en el sentido de Pareto?

15.8

Dos empresas (A y B) están analizando la posibilidad de lanzar al mercado marcas competidoras de un cigarrillo que no es malo para la salud. Los pagos de las empresas son los que muestra la tabla (las utilidades de A figuran primero):

		Empresa B	
		Producir	**No producir**
Empresa A	**Producir**	3, 3	5, 4
	No producir	4, 5	2, 2

a. ¿Este juego tiene un equilibrio de Nash?

b. ¿Este juego presenta una ventaja por ser el primero en jugar para la empresa A o la B?

c. ¿La empresa B encontraría interesante sobornar a la empresa A lo bastante como para que se quede fuera del mercado?

15.9

Toda la oferta mundial de criptonita está controlada por 20 personas y cada una tiene 10 000 gramos de este potente mineral. La demanda mundial de criptonita está determinada por

$$Q = 10\,000 - 1000P,$$

donde P es el precio por gramo.

a. Si todos los propietarios pudieran conspirar para fijar el precio de la criptonita, ¿qué precio fijarían y cuánto venderían?

b. ¿El precio calculado en el inciso anterior por qué es un equilibrio inestable?

c. ¿Existe un precio de la criptonita que sería un equilibrio estable en el sentido de que ninguna empresa podría ganar alternando su producción más allá de la requerida para mantener este precio de mercado?

15.10

Supongamos que la demanda de barrotes de acero del ejemplo 15.5 fluctúa con el ciclo económico. Durante las expansiones la demanda es

$$Q = 7000 - 100P,$$

y durante las recesiones la demanda es

$$Q = 3000 - 100P.$$

Supongamos también que las expansiones y recesiones tienen la misma probabilidad de ocurrir y que las empresas saben cuáles son las condiciones económicas antes de fijar sus precios.

a. ¿Cuál es el valor más bajo de δ que sostendrá una estrategia disparadora de precios que mantenga el precio de monopolio adecuado durante las recesiones y también durante las expansiones?

b. Si δ cae ligeramente por debajo del valor calculado en el inciso anterior, ¿cómo debemos ajustar las estrategias disparadoras de precios para mantener una colusión tácita rentable?

15.11

Supongamos que en el modelo de Cournot-bayesiano descrito en el ejemplo 15.8 las empresas tienen costos marginales idénticos (10), pero la información sobre la demanda es asimétrica. En concreto, supongamos que la empresa A conoce la función de demanda (ecuación 15.37), pero que la empresa B cree que la demanda puede ser

$$P = 120 - q_A - q_B$$

o bien

$$P = 80 - q_A - q_B,$$

y que cada una tiene una probabilidad de 0.5. Suponiendo que las empresas deben anunciar sus cantidades simultáneamente, ¿cuál es el equilibrio de Nash-bayesiano en esta situación?

15.12

En el ejemplo 15.9 se demostró que el equilibrio de Nash en esta subasta cerrada de primer precio consistía en que cada participante adoptara una estrategia de pujar $b(v) = [(n-1)/n]v$. El ingreso total que el vendedor esperaría recibir de esta subasta será, evidentemente $[(n-1)/n]v^*$ donde v^* es el valor esperado de la mayor valoración de los n participantes en la subasta.

a. Demuestre que si las valoraciones se distribuyen uniformemente a lo largo del intervalo $[0, 1]$, el valor esperado de v^* es $n/(n+1)$. Por tanto, el ingreso esperado de la subasta es $(n-1)/(n+1)$.

   Pista: el valor esperado de la mayor oferta está dado por

$$E(v^*) = \int_0^1 vf(v)dv,$$

   donde $f(v)$ es la función de densidad probabilística de la probabilidad de que un v dado cualquiera sea máximo entre n participantes. Aquí $f(v) = nv^{n-1}$.

b. En un famoso artículo de 1961 ("Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance,* marzo de 1961, pp. 8-37), William Vickrey analizó las subastas de segundo precio con posturas selladas. En este tipo de subastas el que presenta la oferta más alta gana, pero paga el precio que ha sido la segunda oferta más alta. Demuestre que la estrategia óptima de un participante cualquiera para ofertar en este tipo de subastas consiste en fijar su valoración real: $b(v) = v$.

c. Demuestre que el ingreso esperado ofrecido por el formato de subasta de segundo precio es idéntico al que ofrece la subasta de primer precio analizada en el inciso a (éste es el "teorema de la equivalencia del ingreso" de Vickrey).

   Pista: la probabilidad de que una valoración cualquiera sea la segunda mayor entre n participantes está dada por $g(v) = (n-1)(1-v)nv^{n-2}$. Es decir, la probabilidad está dada por la probabilidad de que cualquiera de los $(n-1)$ participantes tenga una valoración mayor $[(n-1)(1-v)]$ multiplicado por la probabilidad de que uno cualquiera de los n participantes tenga una valoración superior a la de los demás $n-2$ participantes $[nv^{n-2}]$.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Fudenberg, D. y J. Tirole. *Game Theory*, MIT Press, Cambridge, MA, 1991.

Los capítulos finales presentan muchas ilustraciones de juegos dinámicos con información imperfecta.

Gibbons, R. *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.

Ilustra una serie de modelos de la teoría de juegos sobre temas como las negociaciones, las corridas bancarias, las subastas y la política monetaria. El capítulo 4 sobre las señales de los equilibrios es sumamente útil.

Krishna, V. *Auction Theory*, Academic Press, San Diego, 2002.

Una reseña bastante completa y actualizada de la teoría de las subastas. En algunas partes las matemáticas resultan muy complicadas.

Tirole, J. *The Theory of Industrial Organization*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988.

Toda la parte II de este libro clásico emplea la teoría de juegos. El último capítulo ofrece un útil "manual para el usuario" de este tema.

AMPLIACIONES

Sustitutos y complementos estratégicos

Una forma de entender las relaciones entre las elecciones que hacen las empresas en un mercado en competencia imperfecta es introducir los conceptos de sustitutos y complementos estratégicos. A partir de analogías con definiciones similares tomadas de la teoría del consumidor y del productor, los teóricos de los juegos definen las actividades de las empresas como *sustitutos estratégicos* si una empresa incrementa el nivel de una actividad (por ejemplo, la producción, el precio o el gasto para diferenciación del producto) y otra rival disminuye la suya en igual cantidad. De otra parte, las actividades son *complementos estratégicos* si una empresa incrementa la actividad y la rival incrementa la suya en igual cantidad.

Para que estas ideas queden más claras, supongamos que las utilidades de la empresa A (π^A) dependen del nivel de una actividad que emplea esta empresa (S_A) y del nivel de una actividad análoga que emplea su rival. Por tanto, el objetivo de la empresa consiste en maximizar $\pi^A(S_A, S_B)$.

A15.1 Condiciones para el nivel óptimo y funciones de reacción

La condición de primer orden para la actividad estratégica propia que elegirá A es

$$\pi_1^A(S_A, S_B) = 0, \qquad \text{(i)}$$

donde los subíndices de π representan las derivadas parciales respecto a sus diversos argumentos. Para alcanzar un máximo también es necesario que

$$\pi_{11}^A(S_A, S_B) \le 0. \qquad \text{(ii)}$$

Evidentemente, la elección óptima de S_A especificada por la ecuación i diferirá en función de los distintos valores de S_B. Podemos representar esta relación mediante la *función de reacción de* A (R_A)

$$S_A = R_A(S_B). \qquad \text{(iii)}$$

La relación estratégica entre S_A y S_B está implícita en esta función de reacción. Si $R_A' > 0$, S_A y S_B y son complementos estratégicos. Si $R_A' < 0$, S_A y S_B son sustitutos estratégicos.

A15.2 Inferencias de la función de utilidades

Suele ser más conveniente emplear directamente la función de las utilidades para analizar las relaciones estratégicas. Si se sustituye la ecuación iii en la condición de primer orden (i) tendremos

$$\pi_1^A = \pi_1^A\,[R_A(S_B), S_B] = 0. \qquad \text{(iv)}$$

La diferenciación parcial respecto a S_B nos dará

$$\pi_{11}^A R_A' + \pi_{12}^A = 0. \qquad \text{(v)}$$

Por tanto

$$R_A' = \frac{-\pi_{12}^A}{\pi_{11}^A},$$

por lo cual, en vista de la condición de segundo orden (ii), $\pi_{12}^A > 0$ implica que $R_A' > 0$ y $\pi_{12}^A < 0$ implica que $R_A' < 0$. Por tanto, podemos inferir las relaciones estratégicas directamente de las derivadas de la función de las utilidades.

A15.3 El modelo de Cournot

En el modelo de Cournot, las utilidades están dadas en función de las cantidades de las dos empresas como

$$\begin{aligned}\pi^A &= \pi^A(q_A, q_B)\\ &= q_A P(q_A + q_B) - C(q_A).\end{aligned} \qquad \text{(vi)}$$

En este caso

$$\pi_1^A = q_A P' + P - C' = 0 \qquad \text{(vii)}$$

y

$$\pi_{12}^A = q_A P'' + P'. \qquad \text{(viii)}$$

Dado que $P' < 0$, el signo de π_{12}^A dependerá de la concavidad de la curva de demanda (P''). Con una curva de demanda lineal, $P'' = 0$ por lo cual, evidentemente π_{12}^A es negativa. Las cantidades son sustitutos estratégicos en el modelo de Cournot con una demanda lineal. Por lo normal esto será así a no ser que la curva de demanda sea relativamente convexa ($P'' > 0$). Encontrará un análisis más detallado en, Bulow, Geanakoplous y Klemperer (1985).

Restricciones voluntarias a la exportación

Varios autores han empleado el concepto de sustitutos estratégicos en el modelo de Cournot para analizar modelos de restricciones comerciales. Estos modelos tratan a los productores nacionales y a los extranjeros como si fueran dos "empresas" que compiten por el mercado del país. Habiendo competencia en precios (Bertrand), podemos emplear un modelo de la competencia para explicar cómo se fijan los precios en este mercado, tal como se hizo en el capítulo 11. Sin embargo, la presencia de barreras para el comercio puede alterar la naturaleza de esta competencia. Por ejemplo, una serie de artículos recientes se centran en el papel estratégico que podrían tener las restricciones "voluntarias" a la exportación (RVEs), como las negociadas entre Estados Unidos, Hong Kong y Taiwán para el calzado o entre Estados Unidos y Japón para los automóviles. Tradicionalmente, las RVEs habían sido consideradas casi idénticas a las cuotas de importación, pero Karikari (1991) y otros se oponen a esta visión cuando señalan que la flotación de las cantidades de importación (como en el caso de las RVEs) puede ayudar a establecer un equilibrio de Cournot en situaciones que, de lo contrario, serían inestables. Por tanto, las restricciones voluntarias a la exportación pueden ser, en efecto, "voluntarias", porque producen utilidades por encima de la competencia a las dos partes.

A15.4 Relación estratégica entre precios

Si se considera el problema del duopolio como uno consistente en fijar los precios, tanto q_A como q_B serán funciones de los precios que fijan las dos empresas:

$$\begin{aligned} q_A &= D^A(P_A, P_B) \\ q_B &= D^B(P_A, P_B). \end{aligned} \tag{ix}$$

Empleando esta notación

$$\begin{aligned} \pi^A &= P_A q_A - C(q_A) \\ &= P_A D^A(P_A, P_B) - C[D^A(P_A, P_B)]. \end{aligned} \tag{x}$$

Por tanto

$$\pi_1^A = P_A D_1^A + D^A - C' D_1^A \tag{xi}$$

y

$$\begin{aligned} \pi_{12}^A = {} & P_A D_{12}^A + D_2^A \\ & - C' D_{12}^A - C'' D_2^A D_1^A. \end{aligned} \tag{xii}$$

Es evidente que interpretar este cúmulo de símbolos no es tarea fácil. En el caso especial de un costo marginal constante ($C' = 0$) y una demanda lineal ($D_{12}^A = 0$), el signo de π_{12}^A estará dado por el signo de D_2^A; es decir, la forma en que los incrementos de P_B afectan a q_A. En el caso habitual en el cual dos bienes son sustitutos uno del otro, $D_2^A > 0$, por lo cual $\pi_{12}^A > 0$. Es decir, los precios son complementos estratégicos. Las empresas en este duopolio aumentarían o disminuirían juntas sus precios (véase Tirole, 1988).

Carteles y guerras de precios

Estos conceptos pueden ayudar a entender el comportamiento de los cárteles. Por ejemplo, Porter (1983) desarrolla un modelo del Joint Executive Committee, un cártel de ferrocarriles que controlaba los embarques de cereales que salían de Chicago hacia el este de Estados Unidos en la década de 1880. Una rareza de los datos de los precios de los embarques es que ilustran abruptas caídas periódicas de los precios. El autor rechaza la idea de que éstas fueran provocadas por desaceleración de la demanda. Por ejemplo, al parecer, no hubo disminuciones relacionadas de los precios de embarque de los barcos de vapor de los Grandes Lagos, un principal sustituto de los ferrocarriles. En cambio, al parecer, las disminuciones del precio eran un elemento del mecanismo interno de aplicación del cártel. Las guerras de precios fueron motivadas por descensos impredecibles de la cuota de mercado que tenían uno o dos agentes de ese mercado, los cuales empleaban estas disminuciones como una señal para indicar que era necesario restituir la disciplina del mercado. Al hacer "trampa" en sus precios, enviaban la señal de esta necesidad a los demás miembros del cártel. Así, las guerras de precios eran un elemento importante de la estrategia general para garantizar la estabilidad del cártel.

Bibliografía

Bulow, J., G. Geanakoplous y P. Klemperer. "Multimarket Oligopoly: Strategic Substitutes and Complements", *Journal of Political Economy*, junio de 1985, pp. 488-511.

Karikari, J. A. "On Why Voluntary Export Restraints Are Voluntary", *Canadian Journal of Economics*, febrero de 1991, pp. 228-233.

Porter, R. H. "A Study of Cartel Stability: The Joint Executive Committee 1880-1886", *Bell Journal of Economics*, otoño de 1983, pp. 301-314.

Tirole, J. *The Theory of Industrial Organization*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988, pp. 326-336.

Parte 6

LOS PRECIOS EN LOS MERCADOS DE FACTORES

CAPÍTULO 16 MERCADO DE TRABAJO

CAPÍTULO 17 MERCADO DE CAPITAL

El análisis de la demanda de factores en el capítulo 9 fue bastante general, en el sentido de que lo podemos aplicar a un factor de producción cualquiera. En los capítulos 16 y 17 retomamos varias cuestiones en específico relacionadas con los precios en los mercados de trabajo y de capital. El capítulo 16 habla, básicamente, de la oferta de trabajo. La mayor parte de nuestro análisis gira en torno a las decisiones que toman los individuos para ofrecer su trabajo. También consideramos que la oferta de trabajo por parte de los sindicatos podría representar la posibilidad de que el mercado de trabajo no sea competitivo por el lado de la demanda.

En el capítulo 17 se analizan los mercados de capital. El objeto fundamental del capítulo es hacer hincapié en la relación que existe entre el capital y la asignación de recursos a lo largo del tiempo. Asimismo, tenemos cierto cuidado de integrar la teoría del capital a los modelos del comportamiento de las empresas que desarrollamos en la parte 3. Un breve apéndice del capítulo 17 presenta algunos resultados matemáticos de las tasas de interés que podrían resultar útiles.

En The Principles of Political Economy and Taxation, *Ricardo escribió:*

> *Lo que produce la tierra . . . queda dividido entre las tres clases que constituyen la comunidad: el propietario de la tierra, el dueño del capital necesario para cultivarla y los trabajadores que la cultivan. El problema principal de la economía política es determinar cuáles son las leyes que rigen esta distribución.**

El objeto de la parte 6 es ilustrar cómo ha avanzado el estudio de estas "leyes" desde tiempos de Ricardo.

*D. Ricardo. *The Principles of Political Economy and Taxation*, reimpresión de J. M. Dent and Son, Londres, 1965, p. 1.

Capítulo 16

MERCADO DE TRABAJO

En este capítulo se analizarán algunos aspectos de cómo se fijan los precios de los factores que están específicamente relacionados con el mercado de trabajo. Dado que ya hemos analizado algunas cuestiones relativas a la demanda de trabajo (o de cualquier otro factor) con cierto detalle en el capítulo 9, ahora nos ocuparemos fundamentalmente del análisis de la oferta de trabajo.

Asignación del tiempo

En la parte 2 se analizó la forma en que un individuo opta por asignar una cantidad fija de sus ingresos a una serie de bienes disponibles. Los individuos deben hacer elecciones análogas para decidir cómo van a invertir su tiempo. La cantidad de horas que tiene un día (o un año) es del todo fija y se debe emplear el tiempo a medida que "pasa". Dada esta cantidad fija de tiempo, todo individuo debe decidir cuántas horas trabajará, cuántas empleará para consumir una amplia variedad de bienes (desde automóviles hasta televisores), cuántas horas dedicará a su persona y cuántas horas dormirá. Cuando los economistas estudian cómo los individuos optan por dividir su tiempo entre estas actividades llegan a comprender la decisión de ofertar trabajo.

El sencillo modelo de dos bienes

En aras de la sencillez, empezaremos por suponer que un individuo sólo puede dedicar su tiempo a dos usos: participar en el mercado de trabajo a un salario real de w por hora o no trabajar. Diremos que el tiempo que el individuo no trabaja es tiempo de "ocio", si bien esta expresión no tiene connotación alguna de ociosidad. El tiempo que no dedica a trabajar en el mercado lo puede dedicar a trabajar en casa o a consumir (hace falta tiempo para ver la televisión o un partido de fútbol).[1] Todas estas actividades contribuyen al bienestar del individuo y cabe suponer que éste les asignará tiempo, de forma que maximice su utilidad.

Más en concreto, suponga que la utilidad de un individuo durante un día típico depende de su consumo durante ese periodo (c) y de las horas de ocio que disfrute (h):

$$\textbf{utilidad} = U(c, h). \tag{16.1}$$

Nótese que al expresar esta función de utilidad hemos empleado dos bienes "compuestos", el consumo y el ocio. El lector debe darse cuenta de que la utilidad se deriva, de hecho, de dedicar ingreso y tiempo real al consumo de una amplia variedad de bienes y servicios.[2] Cuando el indi-

[1]El primero en tratar formalmente la asignación del tiempo probablemente fue G. S. Becker en "A Theory of the Allocation of Time", *Economic Journal 75*, septiembre de 1965, pp. 493-517.

[2]Esta observación nos lleva a considerar cómo se producen estas actividades en casa. Encontrará una reseña de este tema en R. Gronau. "Home Production: A Survey", O. C. Ashenfelter y R. Layard, eds., *Handbook of Labor Economics*, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1986, pp. 273-304.

viduo trata de maximizar su utilidad está limitado por dos restricciones. La primera es la cantidad de tiempo que tiene a su disposición. Si l representa la cantidad de horas de trabajo, entonces

$$l + h = 24. \tag{16.2}$$

Es decir, el individuo debe asignar las horas del día a trabajar o a no trabajar. La segunda restricción registra el hecho de que el individuo sólo puede adquirir bienes de consumo si trabaja (más adelante, en este mismo capítulo, damos cabida a los ingresos que no son producto del trabajo). Si el salario real de mercado por hora que gana el individuo está dado por w, la restricción del ingreso estará determinada por

$$c = wl. \tag{16.3}$$

Si se combinan las dos restricciones tendremos

$$c = w(24 - h) \tag{16.4}$$

o

$$c + wh = 24w. \tag{16.5}$$

Esta restricción combinada tiene una importante interpretación. Todo individuo tiene un "ingreso completo" dado por $24w$. Es decir, un individuo que trabajara todo el tiempo tendría esta capacidad de consumo, de bienes de consumo reales, cada día. Los individuos pueden gastar su ingreso total trabajando para obtener un ingreso real y un consumo o bien no trabajando y, así, disfrutando de su ocio. La ecuación 16.5 muestra que el costo de oportunidad de consumir ocio es w por hora; es decir, es igual a los ingresos a los cuales se renuncia por no trabajar.

Maximización de la utilidad

Por lo tanto, el problema del individuo será maximizar su utilidad sujeto a la restricción de su ingreso total. Si se escribe la expresión lagrangiana

$$\mathscr{L} = U(c, h) + \lambda(24w - c - wh), \tag{16.6}$$

las condiciones de primer orden para un máximo son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c} &= \frac{\partial U}{\partial c} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial h} &= \frac{\partial U}{\partial h} - w\lambda = 0. \end{aligned} \tag{16.7}$$

Al dividir las dos expresiones de la ecuación 16.7 se obtiene

$$\frac{\partial U/\partial h}{\partial U/\partial c} = w = TMS(h \text{ por } c). \tag{16.8}$$

De donde hemos derivado el principio siguiente:

Decisión de oferta de trabajo que maximiza la utilidad. Para maximizar la utilidad, dado el salario real w, el individuo debe optar por trabajar el número de horas en la cual la tasa marginal de sustitución de ocio por consumo sea igual a w.

Por supuesto que el resultado derivado de la ecuación 16.8 sólo es una condición necesaria para alcanzar un máximo. Al igual que en el capítulo 4, este punto de tangencia sólo será un auténtico máximo si la *TMS* de ocio por consumo es decreciente.

Efectos ingreso y sustitución de una variación de *w*

Podemos analizar la variación del salario real (w) exactamente de la misma forma que la que empleamos en el capítulo 5. Cuando w aumenta, el "precio" del ocio es más alto; es decir, el individuo debe renunciar a un salario más alto por cada hora de ocio consumida. Por tanto, el efecto sustitución que un incremento de w tiene en las horas de ocio será negativo. A medida que el ocio se vuelve más caro, hay razones para consumir menos. Sin embargo, el efecto ingreso será positivo; dado que el ocio es un bien normal, el ingreso más alto que resulta de un w mayor aumentará la demanda de ocio. Así, los efectos de ingreso y de sustitución operan en sentido opuesto. *A priori*, es imposible prever si el incremento de w aumentará o reducirá la demanda de tiempo de ocio. Dado que el ocio y el trabajo son formas excluyentes de emplear el tiempo disponible, también es imposible prever lo que ocurrirá con el número de horas trabajadas. El efecto sustitución tiende a aumentar el número de horas trabajadas cuando aumenta w mientras que el efecto ingreso, como aumenta la demanda de tiempo de ocio, tiende a reducir el número de horas trabajadas. Una interrogante empírica importante es cuál de estos dos efectos es más fuerte.[3]

Un análisis gráfico

La figura 16.1 muestra las dos reacciones posibles ante una variación de w. En ambas gráficas el salario inicial es w_0, y la elección óptima inicial de c y de h está dada por el punto c_0, h_0. Cuando el salario aumenta hasta w_1, la combinación óptima se desplaza al punto c_1, h_1. Cabe considerar que este movimiento es resultado de dos efectos. El efecto sustitución está representado por el desplazamiento del punto óptimo de c_0, h_0 a S y el efecto ingreso como un movimiento de S a c_1, h_1. En las dos secciones de la figura 16.1 estos dos efectos combinados producen resultados distintos. En la sección a) el efecto sustitución de una variación de w pesa más que el efecto ingreso, y el individuo demanda menos ocio ($h_1, < h_0$). Otra forma de decir lo mismo es que el individuo trabajará más horas cuando w aumenta.

En la sección b) de la figura 16.1 se revierte la situación. El efecto ingreso de una variación de w es mayor que el efecto sustitución, y la demanda de ocio aumenta ($h_1 > h_0$). El individuo trabaja menos horas cuando aumenta w. En los casos analizados en el capítulo 5 habríamos considerado que este resultado era poco habitual; es decir, cuando el "precio" del ocio aumenta, el individuo demanda más cantidad. En el caso de bienes normales de consumo, el efecto ingreso y el efecto sustitución funcionan en el mismo sentido. Sólo en el caso de bienes "inferiores" tienen signo diferente. Sin embargo, en el caso del ocio y el trabajo los efectos ingreso y sustitución siempre operan en sentido opuesto. Un incremento de w coloca al individuo en mejor situación porque es un *oferente* de trabajo. En el caso de un bien de consumo, los individuos quedarán en peor situación cuando un precio aumenta porque son *consumidores* de ese bien. Podemos resumir este análisis con el siguiente:

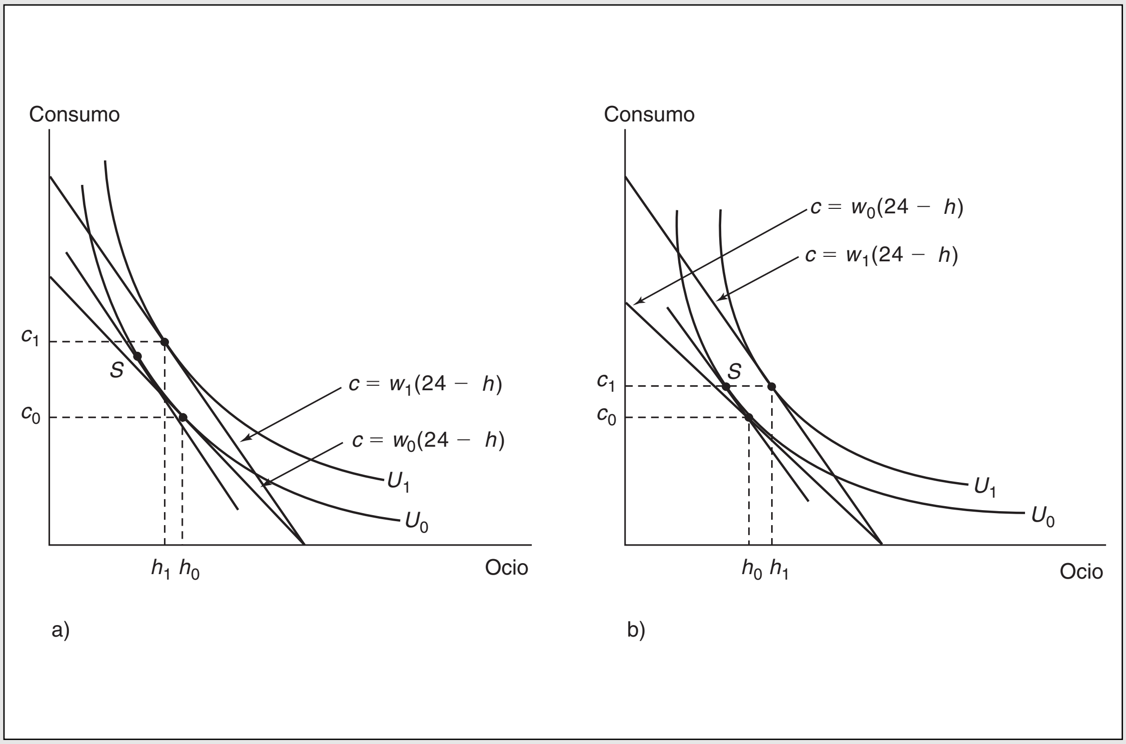
PRINCIPIO DE OPTIMIZACIÓN

Efecto ingreso y sustitución de una variación del salario real. Cuando el salario real aumenta, el individuo que maximiza su utilidad puede aumentar o disminuir el número de horas que trabaja. El efecto sustitución tenderá a aumentar el número de horas trabajadas a medida que el individuo sustituye consumo por ocio, el cual ahora es relativamente más caro. Por otra parte, el efecto ingreso tenderá a reducir las horas trabajadas a medida que el individuo emplea su mayor poder adquisitivo para comprar más horas de ocio.

[3]Si consideramos que la familia es la unidad de decisión relevante, surgirán interrogantes aún más complejas sobre el efecto ingreso y el efecto sustitución que tienen las variaciones del salario de un miembro de la familia (por ejemplo, el marido) en el comportamiento de oferta de trabajo de otros miembros de la familia (por ejemplo, la mujer).

FIGURA 16.1 **Efecto ingreso y sustitución de una variación del salario real *w***

Dado que el individuo es un oferente de trabajo, el efecto ingreso y el efecto sustitución de un incremento del salario real (w) operan en sentido opuesto en cuanto a las horas de ocio demandadas o a las horas de trabajo ofertadas. En a) el efecto sustitución, movimiento al punto S, pesa más que el efecto ingreso y el salario más alto hace que disminuya el número de horas de ocio hasta h_1. Por tanto, las horas de trabajo aumentan. En b) el efecto ingreso es más fuerte que el efecto sustitución, y h aumenta hasta h_1. En este caso el número de horas trabajadas disminuye.



Ahora pasaremos a estudiar un desarrollo matemático de estas respuestas que permite adentrarnos más en la decisión de ofertar trabajo.

Un análisis matemático de la oferta de trabajo

Para derivar una expresión matemática de las decisiones de oferta de trabajo, primero es muy útil modificar un poco la restricción presupuestaria para dar cabida a la presencia de ingresos que no provienen del trabajo. Para ello volvemos a escribir la ecuación 16.3 como

$$c = wl + n, \tag{16.9}$$

donde n es el ingreso real que no proviene del trabajo y puede incluir elementos como dividendos e ingresos por intereses, recepción de prestaciones del gobierno o, sencillamente, regalos de otras personas. De hecho, n podría representar la suma anual del impuesto sobre la renta que paga una persona, en cuyo caso su valor sería negativo.

Maximizar la utilidad, sujeto a esta nueva restricción presupuestaria, daría resultados prácticamente idénticos a los que hemos derivado antes. Es decir, la condición necesaria para obtener un máximo, descrita en la ecuación 16.8, seguiría siendo válida siempre y cuando las cantidades que se elijan de trabajo y ocio no afecten el valor de n, es decir, siempre que n sea una "suma única" de entrada o de pérdida de ingresos,[4] el único efecto de introducir los ingresos extra laborales en el análisis es que la restricción presupuestaria de la figura 16.1 se desplazará en paralelo hacia fuera o hacia dentro, sin afectar la tasa de intercambio entre ingresos y ocio.

Este análisis sugiere que podemos expresar la función de oferta de trabajo del individuo como $l(w, n)$ para indicar que el número de horas trabajadas dependerá del salario real y de la cantidad de ingresos reales extra laborales que se perciban. A partir del supuesto de que el ocio es un bien normal, $\partial l/\partial n$ será negativa; es decir, un incremento de n aumentará la demanda de ocio y, dado que un día sólo tiene 24 horas, reducirá l. Para analizar los efectos que el salario tiene en la oferta de trabajo ($\partial l/\partial w$), será útil que primero analicemos el problema dual que nace del problema primordial de maximizar la utilidad del individuo.

Exposición del problema dual

Como demostramos en el capítulo 5, el problema principal del individuo de maximizar su utilidad dada su restricción presupuestaria está relacionado con el problema dual de minimizar los gastos que necesitará para alcanzar un nivel dado de utilidad. En el contexto actual, podemos plantear este problema eligiendo valores para el consumo (c) y el tiempo de ocio ($h = 24 - l$) de modo que el monto del gasto adicional,

$$E = c - wl, \tag{16.10}$$

que se necesita para alcanzar determinado nivel de utilidad [por ejemplo, $U_0 = U(c, h)$] sea lo más pequeño posible. Al igual que en el capítulo 5, resolver el problema de la minimización dará exactamente la misma solución que la solución del problema de maximización de la utilidad.

Ahora podemos aplicar el teorema de la envolvente al valor mínimo de los gastos adicionales calculados en el problema dual. En concreto, una pequeña variación del salario real hará que el gasto mínimo necesario cambie en

$$\frac{\partial E}{\partial w} = -l. \tag{16.11}$$

La intuición nos dice que cada \$1 que aumente w el valor necesario de E diminuirá \$$l$, porque ésta es la magnitud en que aumentan los ingresos laborales debido a la variación salarial. Este resultado es muy similar al lema de Shephard en la teoría de la producción (véase el capítulo 9); en este caso, el resultado muestra que podemos calcular una función de oferta de trabajo a partir de una función de gasto aplicando derivadas parciales. Dado que, en el planteamiento dual de minimización del gasto, la utilidad se mantiene constante, debemos interpretar esta función como una función de oferta de trabajo "compensada" (con utilidad constante), la cual denominaremos $l^c(w, U)$ para diferenciarla de la función de oferta de trabajo sin compensar $l(w, n)$ introducida antes.

La ecuación de Slutsky de la oferta de trabajo

Ahora podemos emplear estos conceptos para derivar una ecuación de tipo Slutsky que refleje el efecto ingreso y el efecto sustitución derivados de las variaciones del salario real. Empezamos por reconocer que los gastos minimizados en el problema dual de la ecuación 16.11 desempeñan el papel de los ingresos extra laborales en el problema original de maximizar la utilidad. Por tanto, por definición, en el punto óptimo tenemos

$$l^c(w, U) = l[w, E(w, U)] = l(w, n). \tag{16.12}$$

---

[4]Sin embargo, en muchas situaciones n puede depender a su vez de las decisiones de ofertar trabajo. Por ejemplo, el valor de las prestaciones de desempleo que reciba una persona dependerá de su ingreso, al igual que la cantidad de impuestos sobre la renta que pague al año. En estos casos, la pendiente de la restricción presupuestaria del individuo ya no estará dada por el salario real sino que, por el contrario, reflejará el rendimiento *neto* del trabajo adicional tras tener en cuenta los mayores impuestos y las reducciones de los pagos por transferencias. Encontrará algunos ejemplos en los problemas al final de este capítulo.

Al aplicar derivadas parciales en ambos lados de la ecuación 16.12 respecto de w se obtiene

$$\frac{\partial l^c}{\partial w} = \frac{\partial l}{\partial w} + \frac{\partial l}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial w}, \tag{16.13}$$

y empleando la relación de la envolvente de la ecuación 16.11 para $\partial E/\partial w$, se obtiene

$$\frac{\partial l^c}{\partial w} = \frac{\partial l}{\partial w} - l\frac{\partial l}{\partial E} = \frac{\partial l}{\partial w} - l\frac{\partial l}{\partial n}. \tag{16.14}$$

Si se introduce una notación ligeramente distinta para la función de oferta de trabajo compensada,

$$\frac{\partial l^c}{\partial w} = \left.\frac{\partial l}{\partial w}\right| U = U_0, \tag{16.15}$$

y al reorganizar los términos se obtiene la ecuación final de Slutsky de la oferta de trabajo:

$$\frac{\partial l}{\partial w} = \left.\frac{\partial l}{\partial w}\right|_{U = U_0} + l\frac{\partial l}{\partial n}. \tag{16.16}$$

Expresado en palabras, como hemos demostrado antes, podemos desagregar la variación del trabajo ofertado ante una variación del salario real en la suma de un efecto sustitución, por el cual mantenemos la utilidad constante y un efecto ingreso que es analíticamente equivalente a la correspondiente variación de los ingresos no laborales. Dado que el efecto sustitución es positivo, un salario más alto aumenta la cantidad de trabajo que elige el individuo cuando la utilidad se mantiene constante, y el término $\partial l/\partial n$ es negativo, esta derivada muestra que el efecto ingreso y el efecto sustitución operan en sentidos opuestos. El desarrollo matemático respalda las conclusiones que alcanzamos antes con nuestro análisis gráfico y sugiere que existe la posibilidad, cuando menos teórica, de que la curva de oferta de trabajo pueda "doblar hacia atrás". El análisis matemático también sugiere que la importancia del efecto ingreso negativo puede ser mayor cuanto mayor sea la cantidad de trabajo ofertada.

Funciones de la oferta de trabajo

Podemos construir las funciones de oferta de trabajo de los individuos a partir de las funciones de utilidad subyacentes, de modo análogo al que se emplea para construir las funciones de demanda en la parte 2. En este caso, empezaremos por un tratamiento bastante amplio de un caso sencillo Cobb-Douglas y, a continuación, se presentará un resumen más breve de la oferta de trabajo con utilidad CES.

a. Utilidad Cobb-Douglas

Supongamos que la función de utilidad de un individuo para el consumo, c, y el ocio, h, está determinada por

$$U(c,h) = c^{\alpha}h^{\beta} \tag{16.17}$$

y, en aras de la sencillez, que $\alpha + \beta = 1$. Esta persona está restringida por dos ecuaciones: 1) una restricción del ingreso que muestra cómo puede financiarse el consumo

$$c = wl + n, \tag{16.18}$$

donde n es el ingreso extra laboral; y 2) por una restricción del tiempo total

$$l + h = 1, \tag{16.19}$$

donde, arbitrariamente, hemos fijado que el tiempo disponible es igual a 1. Al combinar la restricción financiera y la temporal en una restricción del "ingreso completo", podemos llegar a la siguiente expresión lagrangiana en el caso de este problema para maximizar la utilidad:

$$\mathscr{L} = U(c, h) + \lambda(w + n - wh - c) = c^{\alpha}h^{\beta} + \lambda(w + n - wh - c). \tag{16.20}$$

Las condiciones de primer orden para un máximo son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c} &= \alpha c^{-\beta}h^{\beta} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial h} &= \beta c^{\alpha}h^{-\alpha} - \lambda w = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= w + n - wh - c = 0.
\end{aligned} \tag{16.21}$$

Si se divide la primera entre la segunda tendremos

$$\frac{\alpha h}{\beta c} = \frac{\alpha h}{(1-\alpha)c} = \frac{1}{w} \text{ o } wh = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot c. \tag{16.22}$$

Por tanto, al sustituir en la restricción del ingreso completo se obtendrán los resultados conocidos

$$\begin{aligned}
c &= \alpha(w + n) \\
h &= \beta(w + n)/w.
\end{aligned} \tag{16.23}$$

Expresado en palabras, esta persona gasta una fracción fija, α, de su ingreso completo ($w + n$) en el consumo y el resto, $\beta = 1 - \alpha$, en ocio (que cuesta w por unidad). Por lo tanto, la función de oferta de trabajo de esta persona estará determinada por

$$l(w, n) = 1 - h = (1 - \beta) - \frac{\beta n}{w}. \tag{16.24}$$

b. Propiedades de la función de oferta de trabajo tipo Cobb-Douglas

Esta función de oferta de trabajo comparte muchas de las propiedades que exhiben las funciones de demanda de consumo derivadas de la utilidad Cobb-Douglas. Por ejemplo, si $n = 0$, $\partial l/\partial w = 0$; es decir, esta persona siempre destina una fracción $1 - \beta$ de su tiempo a trabajar, independientemente del monto del salario. El efecto ingreso y el efecto sustitución de una variación en w quedan perfectamente compensados en este caso, tal como los efectos de precios cruzados en las funciones de demanda tipo Cobb-Douglas.

Por otra parte, si $n > 0$, $\partial l/\partial w > 0$. Cuando existe un ingreso extra laboral positivo, esta persona gasta βn de éste en ocio. Sin embargo, el ocio "cuesta" w por hora, de modo que un aumento del salario significa que podrá comprar menos horas de ocio. Por lo tanto, un aumento de w incrementa la oferta de trabajo.

Por último, nótese que $\partial l/\partial n < 0$. Un incremento en el ingreso extra no laboral permitirá a esta persona comprar más ocio, de modo que la oferta de trabajo disminuye. Una interpretación de este resultado es que los programas de transferencias, como las prestaciones de bienestar y los pagos por desempleo, disminuyen la oferta de trabajo. Otra interpretación es que el impuesto de suma única incrementa la oferta de trabajo. No obstante, los programas de transferencias y fiscales reales rara vez son de suma única; por lo general también afectan el salario neto. Por lo tanto, para poder hacer una previsión precisa es necesario analizar con detalle cómo estos programas afectan la restricción presupuestaria.

(*continúa*)

EJEMPLO 16.1 ***CONTINUACIÓN***

c. Oferta de trabajo CES

En las ampliaciones del capítulo 4 derivamos la forma general de las funciones de demanda generadas de la función de utilidad CES. En este caso, podemos aplicar directamente esa derivada para estudiar la demanda de trabajo CES. En concreto, si la utilidad está determinada por

$$U(c,h) = \frac{c^{\delta}}{\delta} + \frac{h^{\delta}}{\delta}, \tag{16.25}$$

las ecuaciones de la fracción del presupuesto están determinadas por

$$\begin{aligned} s_c &= \frac{c}{w+n} = \frac{1}{(1+w^{\kappa})} \\ s_h &= \frac{wh}{w+n} = \frac{1}{(1+w^{-\kappa})}, \end{aligned} \tag{16.26}$$

donde $\kappa = \delta/(\delta - 1)$. Si resolvemos explícitamente para el ocio se obtendrá

$$h = \frac{w+n}{w+w^{1-\kappa}} \tag{16.27}$$

y

$$l(w,n) = 1 - h = \frac{w^{1-\kappa} - n}{w + w^{1-\kappa}}. \tag{16.28}$$

Tal vez sería más fácil analizar las propiedades de esta función partiendo de algunos ejemplos. Si $\delta = 0.5$, $\kappa = -1$ la función de oferta de trabajo será

$$l(m,n) = \frac{w^2 - n}{w + w^2} = \frac{1 - n/w^2}{1 + \dfrac{1}{w}}. \tag{16.29}$$

Si $n = 0$ queda claro que $\partial l/\partial w > 0$, debido a la posibilidad relativamente alta de sustituir el consumo y el ocio en esta función de utilidad; el efecto sustitución de un salario más alto pesa más que el efecto ingreso. De otra parte, si $\delta = -1$, $\kappa = 0.5$ la función de oferta de trabajo será

$$l(w,n) = \frac{w^{0.5} - n}{w + w^{0.5}} = \frac{1 - n/w^{0.5}}{1 + w^{0.5}}. \tag{16.30}$$

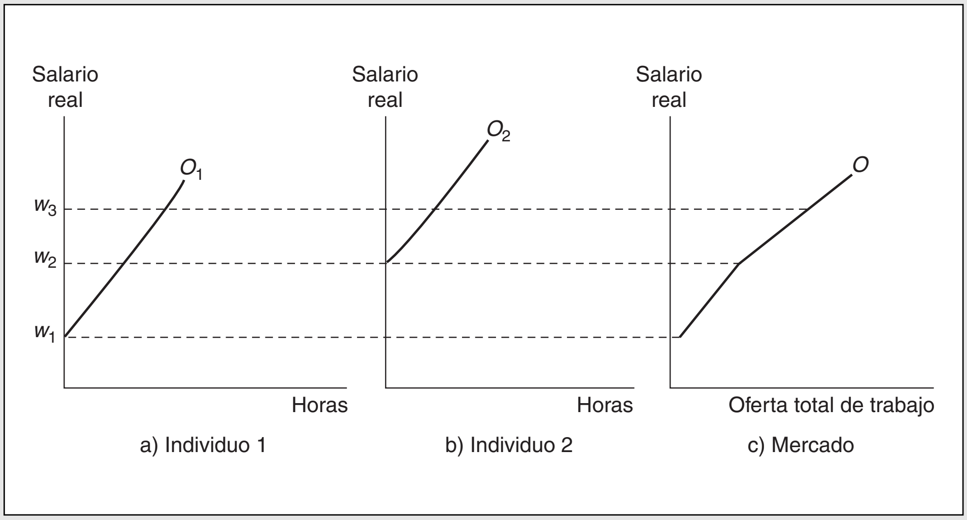
Ahora (cuando $n = 0$) $\partial l/\partial w < 0$, porque la posibilidad de sustitución es más baja en la función de utilidad, o sea que el efecto ingreso pesa más que el efecto sustitución en la oferta de trabajo.[5]

Pregunta: ¿El ingreso extra laboral en el caso de la CES por qué depende de la posibilidad de sustituir consumo/ocio en la función de utilidad?

[5]En el caso Cobb-Douglas ($\delta = 0$, $\kappa = 0$) el resultado de la fracción constante (para $n = 0$) es el mostrado por $l(w,n) = (w - n)/2w = 0.5 - n/2w$.

FIGURA 16.2 **Construcción de la curva de oferta de mercado en el caso del trabajo**

A medida que aumenta el salario real, dos razones explican por qué la oferta de trabajo podría aumentar. La primera es que los salarios reales más altos podrían provocar que cada individuo que hay en el mercado trabaje más horas. La segunda es que los salarios más altos pueden inducir a más individuos a entrar en el mercado de trabajo (por ejemplo, el individuo 2).



Curva de oferta de mercado en el caso del trabajo

Podemos construir una curva de oferta de trabajo para un mercado a partir de las decisiones individuales de ofertar trabajo. En cada salario posible se suma la cantidad de trabajo ofertada por cada individuo para obtener el total del mercado. Un aspecto particularmente interesante de este procedimiento es que, a medida que aumenta el salario, una mayor cantidad de individuos querrán ingresar a la población económicamente activa. La figura 16.2 ilustra esta posibilidad para el caso sencillo de dos individuos. Con un salario real por debajo de w_1 ninguno de los dos individuos opta por trabajar. Por tanto, la curva de oferta de trabajo en ese mercado (figura 16.2c) muestra que no se ofrece trabajo alguno cuando los salarios reales están por debajo de w_1. Un salario que exceda a w_1 provoca que el individuo 1 entre en el mercado de trabajo. Sin embargo, mientras los salarios estén por debajo de w_2, el individuo 2 no trabajará. Los dos individuos participarán en el mercado de trabajo sólo con un salario por encima de w_2. En general, la posibilidad de que entren nuevos trabajadores hace que la oferta de trabajo en el mercado sea, en cierto sentido, más sensible a los incrementos salariales de lo que sería si supusiéramos que el número de trabajadores es fijo.

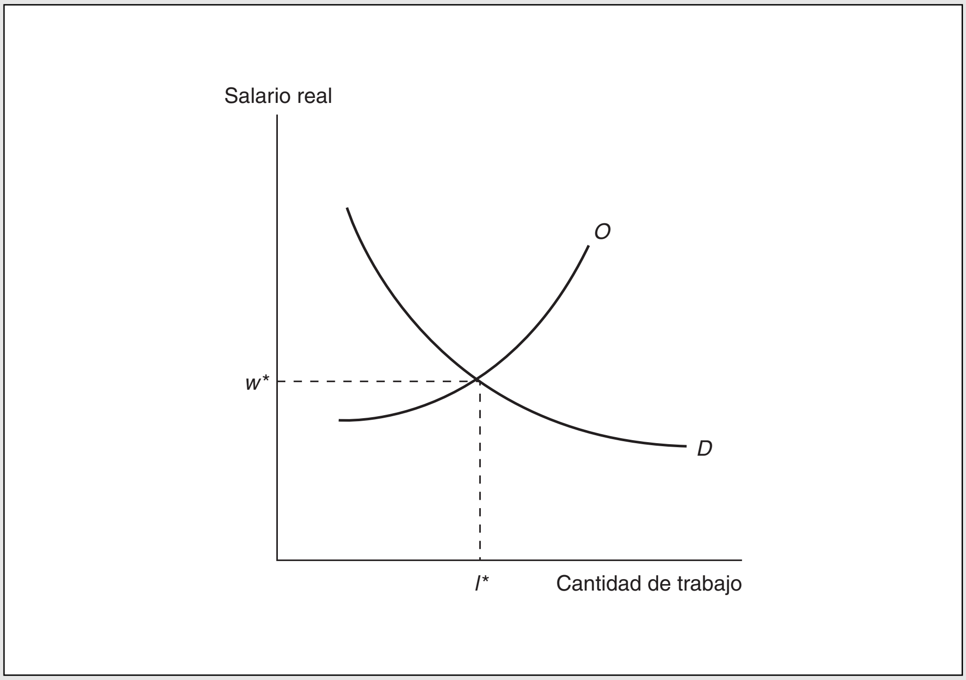
El ejemplo más importante de que los salarios reales más altos inducen una mayor participación en la población económicamente activa es el comportamiento que observaron al respecto las mujeres casadas en Estados Unidos en el periodo posterior a la Segunda Guerra Mundial. Desde 1950, el porcentaje de casadas que trabajan ha aumentado del 32% a más del 65%; los economistas atribuyen este fenómeno, al menos en parte, a que las mujeres ahora pueden ganar salarios más altos.

Equilibrio del mercado de trabajo

La interacción de las decisiones de los individuos que ofrecen su trabajo y las decisiones de las empresas respecto a la cantidad de trabajo que contratarán establece el equilibrio del mercado de trabajo. El conocido diagrama de la oferta y la demanda de la figura 16.3 ilustra este pro-

FIGURA 16.3 **Equilibrio en el mercado de trabajo**

Un salario real de w^* crea un equilibrio en el mercado de trabajo con un nivel de empleo de l^*.



ceso. A un salario real de w^*, la cantidad de trabajo que demandan las empresas es justo igual a la cantidad que ofrecen los individuos. Un salario real por encima de w^* produciría un desequilibrio, con una cantidad de trabajo ofertada superior a la cantidad demandada. Con este salario, se presentaría algo de desempleo involuntario, el cual podría crear presiones para que el salario real disminuyera. Por otra parte, un salario real por debajo de w^* daría por resultado un desequilibrio en el comportamiento, porque las empresas querrían contratar una cantidad de trabajadores mayor a la existente. En su prisa por contratar a los trabajadores, las empresas podrían incrementar los salarios reales para restaurar el equilibrio.

Las razones que podrían llevar a desequilibrios en el mercado de trabajo son un tema central de la macroeconomía, sobre todo por cuanto se relacionan al ciclo de la actividad económica. La incapacidad del mercado para adaptarse a los cambios de equilibrio ha sido atribuida a los precios reales "pegajosos", las expectativas inexactas de los trabajadores o las empresas sobre el nivel de precios, las repercusiones de los programas públicos de seguro de desempleo, los reglamentos del mercado de trabajo y los salarios mínimos y las decisiones sobre trabajos intertemporales. Los modelos microeconómicos de todas estas posibilidades han desempeñado un papel central en los adelantos recientes del campo de la macroeconomía, pero aquí no se profundizará en esos temas porque nos alejaría del objetivo central de este libro.

Los modelos del equilibrio del mercado de trabajo también son empleados para estudiar una serie de cuestiones sobre la política fiscal. Por ejemplo, los modelos de la incidencia de los impuestos que ilustramos en el capítulo 11 se pueden adaptar con facilidad para estudiar los impuestos sobre el empleo. Una posibilidad muy interesante que surge al estudiar los mercados de trabajo es que la intervención con una política dada puede cambiar las funciones de oferta y de demanda, posibilidad que analizamos en el ejemplo 16.2.

EJEMPLO 16.2

Prestaciones obligatorias

Una serie de leyes aprobadas recientemente mandan que los empleadores brinden prestaciones especiales a sus trabajadores, como seguro de salud, tiempo libre remunerado o paquetes mínimos por despido. El efecto que estos mandatos tengan en el equilibrio del mercado de trabajo depende enormemente del valor que los trabajadores otorguen a las prestaciones. Supongamos que antes de aplicar un mandato, la oferta y la demanda de trabajo están determinadas por

$$l_O = a + bw$$
$$l_D = c - dw. \tag{16.31}$$

Si fijamos $l_O = l_D$ se obtendrá un salario equilibrio de

$$w^* = \frac{c - a}{b + d}. \tag{16.32}$$

Ahora supongamos que el gobierno dispone que todas las empresas proporcionen una prestación dada a sus trabajadores y que dicha prestación cuesta t por unidad de trabajo contratada. Por tanto, el costo del trabajo por unidad aumenta a $w + t$. Supongamos también que los trabajadores consideran que la nueva prestación tiene un valor monetario de k por unidad de trabajo ofertado; por lo tanto, el rendimiento neto del empleo aumenta a $w + k$. Por tanto, el equilibrio del mercado de trabajo requiere que

$$a + b(w + k) = c - d(w + t). \tag{16.33}$$

Algunas operaciones en la expresión demostrarán que el nuevo salario neto está determinado por

$$w^{**} = \frac{c - a}{b + d} - \frac{bk + dt}{b + d} = w^* - \frac{bk + dt}{b + d}. \tag{16.34}$$

Si los trabajadores no obtienen valor alguno de la prestación mandada ($k = 0$), el mandato es precisamente como un impuesto sobre el empleo; es decir, los empleados pagan una parte del impuesto dada por la proporción $d/(b + d)$ y la cantidad de equilibrio del trabajo contratado disminuye. Resultados cualitativamente análogos se presentarán siempre y cuando $k < t$. Por otra parte, si los trabajadores otorgan un valor a la prestación precisamente igual a su costo ($k = t$), el nuevo salario reducirá precisamente la cantidad de su costo ($w^{**} = w^* - t$) y el nivel de equilibrio del empleo no cambiará. Por último, si los trabajadores otorgan a la prestación un valor superior a lo que le cuesta a la empresa proporcionarlo ($k > t$; es decir, una situación en la cual uno se preguntaría por qué esa prestación no ha sido proporcionada ya), el salario de equilibrio disminuirá en una cantidad superior al costo de la prestación y el equilibrio del empleo aumentará.

Pregunta: ¿Cómo dibujaría una gráfica de este análisis? ¿Sus conclusiones dependerán de que utilice funciones lineales de la oferta y la demanda?

Variación de los salarios

Un tema que es preciso mencionar en relación con el diagrama de la oferta y la demanda de la figura 16.3 se refiere a cómo las diferencias de los trabajadores y los empleos llevan a diferencias en los salarios observados. Esta variación de los salarios ha aumentado de manera sustancial en muchas economías en años recientes y estudiar la naturaleza de la oferta y la demanda en el mercado de trabajo contribuye mucho a explicar la situación. Aquí se analizarán brevemente dos factores importantes para los mercados de trabajo en competencia y, a continuación, se presentará una explicación más amplia de la competencia imperfecta en el mercado de trabajo.

Capital humano

Dado que la demanda de trabajo por parte de la empresa depende de la productividad marginal del trabajador, las diferencias de productividad entre los trabajadores deberían conducir a distintos salarios. La fuente más importante de estas diferencias en la productividad humana podría estar en el capital humano de los trabajadores. Este capital es acumulado a lo largo de la vida de un trabajador por medio de su educación formal, otros métodos formales para adquirir habilidades, como un curso de capacitación laboral, la capacitación práctica en el trabajo y la experiencia general en su vida. Este proceso tiene mucho en común con el proceso de invertir en capital físico, tema que se abordará en el capítulo siguiente. Los trabajadores invierten dinero y tiempo personal para adquirir habilidades, con la esperanza de que éstas les reditúen en el mercado de trabajo. Presuntamente, cuando toman decisiones sobre emprender estas actividades, los trabajadores consideran la tasa de rendimiento que pueden esperar de sus inversiones. Sólo realizarán inversiones en las habilidades que prometen un rendimiento superior a las hechas en otras cosas. Por supuesto que invertir en capital humano no es igual que invertir en capital físico, principalmente porque el capital humano, una vez adquirido, no puede ser desechado. Esto hace que la inversión en capital humano sea algo más arriesgada que las inversiones más líquidas y, por lo mismo, las tasas de rendimiento podrían ser más altas.[6] Dado que el capital humano es caro e incrementa la productividad de los trabajadores, cabe esperar que tenga un efecto positivo en los salarios reales.

Diferenciales compensatorios

Es evidente que las personas prefieren unos empleos a otros. Algunos factores, como las condiciones agradables para trabajar, los horarios flexibles o las facilidades de transporte pueden provocar que un individuo esté más dispuesto a aceptar un empleo que paga menos que otros. Este efecto de la oferta se manifestaría en salarios más bajos para estos empleos. Por otra parte, los empleos desagradables o que entrañan riesgos importantes requerirán salarios más altos para resultarle atractivos a los trabajadores (véase el problema 16.3). Estas diferencias de salarios, inducidas por la oferta, se conocen como "compensación de las diferencias salariales", porque compensan las características del empleo que los trabajadores valoran. Por tanto, la variación de estas características explica una parte de la variación de los salarios.

Monopsonio en el mercado de trabajo

En muchas situaciones, las empresas no son tomadoras de precio de los factores que adquieren. Es decir, la curva de oferta de trabajo, por decir, que afronta la empresa no es infinitamente elástica a los precios que prevalecen. Muchas veces, la empresa tal vez tenga que ofrecer un salario por encima del que prevalece en el presente para poder atraer a más empleados. Para poder estudiar estas situaciones es aconsejable estudiar el caso extremo del ***monopsonio*** (un solo comprador) en el mercado de trabajo. Si sólo hay un comprador en el mercado de trabajo, esta empresa afrontará la curva de oferta del mercado completa. Para incrementar su contratación de trabajo en una unidad más, tendrá que desplazarse a un punto más alto en esta curva de oferta. Esto entrañará no sólo un salario más alto para el "trabajador marginal", sino también salarios adicionales para los trabajadores que ya están empleados. Por lo tanto, el gasto marginal asociado a la contratación de una unidad de trabajo extra (GM_l) excede su tasa salarial. Podemos demostrar este resultado en términos matemáticos de la manera siguiente. El costo del trabajo para la empresa es wl. Por consiguiente, el cambio de esos costos producido por la contratación de un trabajador adicional será

$$GM_l = \frac{\partial wl}{\partial l} = w + l\frac{\partial w}{\partial l}. \tag{16.35}$$

[6] Encontrará una obra pionera de la teoría del capital humano en Gary Becker. *Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis with Special Reference to Education*, National Bureau of Economic Research, Nueva York, 1964.

En el caso de la competencia, $\partial w/\partial l = 0$ y el gasto marginal por contratar a un trabajador más es simplemente el salario de mercado, w. No obstante, si la empresa afronta una curva de oferta de trabajo con pendiente positiva, $\partial w/\partial l > 0$ y el gasto marginal excede al salario. La siguiente definición resume estas ideas:

DEFINICIÓN

Gasto marginal del factor. El *gasto marginal* asociado a un factor cualquiera (GM) es el incremento del costo del factor que se deriva de contratar una unidad más. Si la empresa afronta una curva de oferta de ese insumo, con pendiente positiva, entonces el gasto marginal excederá al precio de mercado del factor.

Una empresa que maximiza sus utilidades contratará un factor hasta el punto en el cual el ingreso marginal del producto es justo igual a su gasto marginal. Este resultado es una generalización de la explicación que presentamos antes sobre el análisis marginal para cubrir el caso del poder de monopsonio en el mercado de trabajo. Al igual que antes, todo alejamiento de estas elecciones dará por resultado un beneficio más bajo para la empresa. Por ejemplo, si, $IMP_l > GM_l$, la empresa debería contratar a más trabajadores, porque su acción incrementaría más el ingreso que el costo. Por otra parte, si $IMP_l < GM_l$, debería reducir el empleo, porque eso reduciría el costo a mayor velocidad que el ingreso.

Análisis gráfico

La figura 16.4 ilustra la elección del factor capital por parte del monopsonista. La curva de demanda de trabajo de la empresa (D) tiene pendiente negativa, como se ha demostrado que debe ser.[7] También en este caso, construimos la curva de GM_l asociada a la curva de oferta de trabajo (O) de forma muy similar a la que utilizamos para construir la curva del ingreso marginal asociada a una curva de demanda. Como O tiene pendiente positiva, la curva GM_l queda siempre por encima de O. El nivel del factor trabajo que maximiza el beneficio del monopsonio está dado por l_1, dado que éste es el nivel del factor en el cual es válida la condición que maximiza el beneficio. En l_1 el salario del mercado está dado por w_1. Nótese que la cantidad de trabajo demandada no alcanza al que se contrataría en un mercado de trabajo en competencia perfecta (l^*). La empresa ha restringido la demanda del factor gracias a su posición de monopsonio en el mercado. Las similitudes formales entre este análisis y el del monopolio que presentamos en el capítulo 13 quedan claras. En concreto, la "curva de demanda" de un monopsonista tiene un solo punto dado por l_1, w_1. El monopsonista ha elegido este punto como el más deseable de todos los puntos de la curva de oferta, O. No elegirá otro punto a no ser que un cambio externo, como un cambio en la demanda de la producción de la empresa o un cambio en la tecnología, afecte el ingreso del producto marginal del trabajo.[8, 9]

---

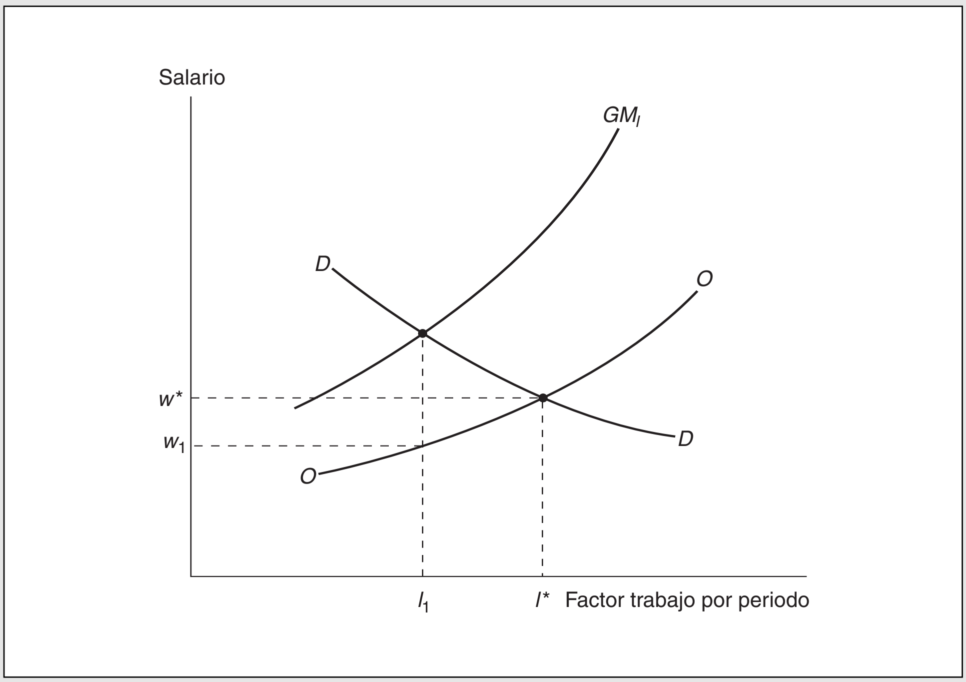
[7]La figura 16.4 sólo tiene el objeto de ser un instrumento pedagógico y no es posible defenderla con rigor. Concretamente, la curva señalada como D, si bien supuestamente representa la curva de "demanda" (o producto marginal) del trabajo, no tiene significado preciso para el comprador monopsonista del trabajo, porque no podemos construir esta curva confrontando a la empresa con un salario fijo. En cambio, la empresa considera que la curva entera de oferta O, y empleo la curva auxiliar GM_l para elegir el punto más favorable en O. En sentido estricto, la curva de demanda del monopsonista no existe. Este caso es análogo al de un monopolio, en cuyo caso no podríamos hablar de una "curva de oferta" del monopolio.

[8]Encontrará una discusión detallada de análisis de estática comparativa del factor demanda en los casos del monopolio y el monopsonio. W. E. Diewert, "Duality Approaches to Microeconomic Theory", en K. J. Arrow y M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, North Holland, Amsterdam, 1982, vol. 2, pp. 584-590.

[9]Un monopsonio también puede aplicar la discriminación de precios de todas las formas que describimos en el capítulo 13 para el caso del monopolio.

FIGURA 16.4 **Los precios en un mercado de trabajo monopsonista**

Si una empresa afronta una curva de oferta de trabajo (O), con pendiente positiva, fundamentará sus decisiones en el gasto marginal de la contratación adicional (GM_l). Dado que O tiene pendiente positiva, la curva GM_l queda por encima de O. Cabe decir que la curva O es una curva de "costo promedio del trabajo" y la curva GM_l es marginal a O. En l_1 la condición de equilibrio $GM_l = IMP_l$ se cumple y esta cantidad será contratada al salario de mercado w_1. Nótese que el monopsonista compra menos trabajo que el que compraría si el mercado de trabajo estuviera en competencia perfecta (l^*).



Contratación monopsonista

Para ilustrar estos conceptos en un contexto muy sencillo, supongamos que los trabajadores de una mina de carbón extraen dos toneladas de carbón por hora y el precio de venta del carbón es de \$10 por tonelada. Por tanto, el ingreso del producto marginal de un minero es de \$20 por hora. Si una mina de carbón es la única que contrata a mineros en la zona y si afronta una curva de oferta de trabajo de forma

$$l = 50w, \tag{16.36}$$

esta empresa debe reconocer que sus decisiones de contratación afectan los salarios. Si se expresa la suma total de salarios como una función de l,

$$wl = \frac{l^2}{50}, \tag{16.37}$$

permite que el operador de la mina, quizá sólo de manera implícita, calcule el gasto marginal asociado a la contratación de mineros:

$$GM_l = \frac{\partial wl}{\partial l} = \frac{l}{25}. \tag{16.38}$$

Igualar esto al ingreso del producto marginal de los mineros de $20 implica que el operador de la mina debería contratar a 500 trabajadores por hora. Con este nivel de empleo, el salario será $10 por hora; es decir, sólo la mitad del ingreso del producto marginal de los trabajadores. Si la competencia del mercado ha obligado al operador de la mina a pagar $20 por hora, independientemente de la cantidad de mineros contratados, el equilibrio de mercado se habría establecido con $l = 1000$ en lugar de los 500 contratados en condiciones de monopsonio.

Pregunta: Supongamos que el precio del carbón aumenta a $15. ¿Cómo afectaría esto la contratación del monopsonista y los salarios de los mineros? ¿Los mineros se beneficiarían plenamente del incremento de su *IMP*?

Sindicatos

Es posible que los trabajadores a veces consideren que es conveniente afiliarse a un sindicato para lograr objetivos que un grupo alcanza de forma más eficaz. Si la afiliación a un sindicato fuera totalmente voluntaria, cabría suponer que todos los miembros del sindicato obtienen un beneficio positivo de su afiliación. Sin embargo, la afiliación obligatoria, la planta sindicalizada, se suele emplear para mantener la viabilidad de la organización sindical. Si se permitiera a todo individuo decidir de manera voluntaria su afiliación, su decisión racional podría ser no afiliarse al sindicato y, por tanto, no pagar cuotas y evitar otras restricciones. Sin embargo, también se beneficiaría de los salarios más altos y de mejores condiciones laborales que han sido negociados por el sindicato. Lo que puede parecer racional desde el punto de vista de cada trabajador individual puede ser irracional desde el punto de vista del grupo, porque el sindicato se ve socavado por los "parásitos" ("free riders"). Por tanto, la afiliación obligatoria puede constituir un medio necesario para mantener una coalición sindical eficaz.

Objetivo del sindicato

Un buen punto de partida para el análisis del comportamiento del sindicato está en definir su objetivo. El primer supuesto que podría plantearse es que el objetivo de un sindicato es, en cierto sentido, una representación correcta del objetivo de sus miembros. Este supuesto evita el problema del liderazgo del sindicato y desestima las aspiraciones personales de su líder, que podría estar en conflicto con los objetivos de las bases. Por lo tanto, se supone que el líder del sindicato es el medio que expresa los deseos de los afiliados.[10] En Estados Unidos el objetivo del sindicato normalmente ha estado orientado hacia cuestiones "contantes y sonantes". Los programas de los principales sindicatos no han puesto énfasis en promover cambios sociales radicales, salvo por un periodo breve a principios de 1900. Por el contrario, los sindicatos han tratado de ejercer presión tan sólo en el mercado laboral y, en ese sentido, han tenido cierto éxito.

En algún sentido, podemos analizar los sindicatos de la misma manera que analizamos al monopolio. Un sindicato afronta una curva de demanda de trabajo; es decir, como es la única fuente de oferta, puede elegir en qué punto de la curva operará. Es evidente que el punto que el sindicato elija, de hecho, dependerá de los objetivos concretos que ha decidido perseguir. La figura 16.5 muestra tres posibles elecciones. Por ejemplo, el sindicato puede optar por ofrecer la cantidad de trabajo que maximiza el salario $(w \cdot l)$. Si es así, ofrecerá la cantidad en la cual el "ingreso marginal" de la demanda de trabajo sea igual a 0. Esta cantidad está dada por l_1 en la

[10] No obstante, gran parte de los estudios recientes pretenden contestar si los "posibles" sindicalizados tienen voz alguna cuando se establecen los objetivos del sindicato o no la tienen y cómo los objetivos del sindicato podrían afectar los deseos de trabajadores que tienen distinta antigüedad en su empleo.

FIGURA 16.5 **Tres puntos que un sindicato monopolista podría elegir en la curva de demanda de trabajo**

El sindicato tiene el monopolio de la oferta de trabajo. Por tanto, puede elegir el punto que prefiera en la curva de demanda de trabajo. La figura muestra tres puntos posibles. En el punto E_1 maximiza el salario $(w \cdot l)$ maximiza el salario; en E_2 maximiza el beneficio económico que perciben los trabajadores; y en E_3 maximiza la cantidad de trabajo que se oferta.

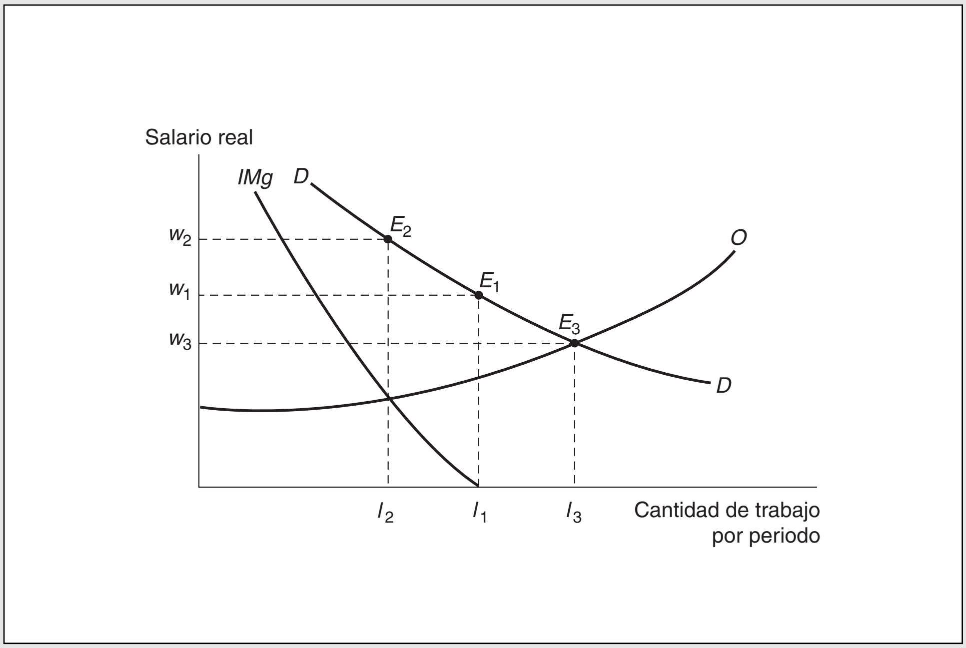


figura 16.5, y el salario asociado a esta cantidad es w_1. Por tanto, el punto E_1 representa la combinación preferida de salario-cantidad. Nótese que con el salario w_1 puede haber un exceso de oferta de trabajo y que el sindicato debe asignar, de alguna manera, los puestos disponibles entre los trabajadores que los quieren.

Otro objetivo que podría perseguir el sindicato sería elegir la cantidad de trabajo que maximizaría el beneficio económico, es decir, los salarios menos el costo de oportunidad, que obtienen los sindicalizados que están empleados. Esto le obligaría a elegir la cantidad de trabajo en la cual el salario adicional obtenido por tener empleado a un sindicalizado más (el ingreso marginal) fuera igual al costo adicional de atraer a ese miembro al mercado. Por tanto, el sindicato debería elegir la cantidad, l_2, en la cual la curva del ingreso marginal corta a la curva de oferta.[11] El salario asociado a esta cantidad es w_2, y la combinación deseada de salario-cantidad aparece señalada en el diagrama con E_2. Con un salario de w_2, muchos individuos que desean trabajar, con el salario existente, permanecen desempleados. El sindicato quizá podría “gravar” el gran beneficio económico que obtienen los que sí están trabajando, para transferir ese ingreso a los que no trabajan.

Una tercera posibilidad sería que el sindicato buscara maximizar el empleo de sus miembros. Esto implicaría elegir el punto w_3, l_3, precisamente el punto que resultaría si el mercado estuviera organizado en forma de competencia perfecta. No podría alcanzar un nivel de empleo superior a l_3 porque los salarios para la cantidad de trabajo que ofertan los miembros del sindicato se reducirían a menos de w_3.

[11]En términos matemáticos, el objetivo del sindicato es elegir l para maximizar wl – (el área debajo de O), donde O es la curva de oferta de trabajo compensada y refleja el costo de oportunidad de los trabajadores en términos de la cantidad de ocio a la que han renunciado.

EJEMPLO 16.4

Modelo de un sindicato

En el ejemplo 16.3 se analizó el caso de un empresario monopsonista que contrataba a mineros con una curva de oferta dada por

$$l = 50w. \tag{16.39}$$

Para analizar las posibilidades de sindicalización a efecto de luchar contra este monopsonista, supongamos, a diferencia del ejemplo 16.3, que el monopsonista tiene una curva del ingreso marginal del producto del trabajo con pendiente negativa de la forma

$$IMP = 70 - 0.1l. \tag{16.40}$$

Es fácil demostrar que, sin un sindicato eficaz, el monopsonista que estuviera en esta situación elegirá la misma combinación de salario-contratación que en el ejemplo 16.3; es decir, contratará a 500 trabajadores a un salario de \$10.

Si el sindicato puede controlar la oferta de trabajo para el propietario de la mina, surgirán varias opciones. Por ejemplo, el sindicato podría presionar para llegar a la solución competitiva. Un contrato con $l = 583$, $w = 11.66$ igualaría la oferta y la demanda. Por otra parte, el sindicato podría actuar como monopolista con una curva de demanda dada por la ecuación 16.40. Podría calcular el incremento marginal obtenido por la oferta de trabajadores adicionales como

$$\frac{d(l \cdot IMP)}{dl} = 70 - 0.2l. \tag{16.41}$$

El punto de intersección entre esta curva de "ingreso marginal" y la curva de oferta de trabajo, que indica el "costo de oportunidad" de las decisiones de oferta de trabajo, ofrece un beneficio económico máximo a los trabajadores del sindicato:

$$\frac{l}{50} = 70 - 0.2l \tag{16.42}$$

o

$$3500 = 11l. \tag{16.43}$$

Por lo tanto, este cálculo sugiere un contrato de $l = 318$ y un salario (IMP) de \$38.20. El hecho de que el contrato competitivo y el de sindicato monopolista difieran de manera sustancial del preferido por el monopsonista indica que, en este caso, el resultado último probablemente será determinado mediante un proceso de negociación bilateral. Nótese también que los salarios difieren de manera importante en función del lado que tiene el poder de mercado.

Pregunta: ¿Cuál de los tres contratos salariales descritos en este ejemplo podría representar un equilibrio de Nash?

EJEMPLO 16.5

Un modelo de negociación sindical

Podemos volver a emplear los conocimientos de la teoría de juegos en el caso de la economía aplicada a los sindicatos. Como simple ilustración, supongamos que un sindicato y una empresa participan en un juego de dos etapas. En la primera, el sindicato fija el salario que aceptarán sus trabajadores. Dado este salario, la empresa elige, a continuación, el nivel de empleo. Podemos resolver este juego de dos etapas mediante un proceso de inducción hacia atrás. Dado el salario fijado por el sindicato, w, el problema de la empresa en la segunda etapa consiste en maximizar

$$\pi = IT(l) - wl, \tag{16.44}$$

donde IT es la función del ingreso de la empresa expresada en función del empleo. En este caso, la condición de primer orden para alcanzar un máximo, suponiendo que el salario es fijo, es la ecuación que conocemos

$$IMg'(l) = w. \tag{16.45}$$

Suponiendo que l^* resuelve la ecuación 16.45, el objetivo del sindicato será elegir w para maximizar la utilidad

$$U(w, l) = U[w, l^*(w)] \tag{16.46}$$

y la condición de primer orden para alcanzar un máximo es

$$U_1 + U_2 l' = 0 \tag{16.47}$$

o

$$U_1/U_2 = l'. \tag{16.48}$$

Expresado con palabras, el sindicato debería elegir w de tal manera que su TMS sea igual a la pendiente de la función de demanda de trabajo de la empresa. La combinación w^*, l^* que resulta de este juego es, con claridad, un equilibrio de Nash.

Eficiencia del contrato de trabajo. El contrato de trabajo w^*, l^* es ineficiente en el sentido de Pareto. Para ver por qué, nótese que la ecuación 16.48 implica que pequeños movimientos a lo largo de la curva de demanda de trabajo de la empresa (l) dejan al sindicato en una situación igual de buena. Pero el teorema de la envolvente implica que una reducción de w debe aumentar el beneficio de la empresa. Por tanto, debe existir un contrato, w^p, l^p (donde $w^p < w^*$, $l^p > l^*$), con el cual la empresa y el sindicato queden en mejor situación.

La ineficiencia de este contrato de trabajo, en este juego de dos etapas, es análoga a la ineficiencia de algunos de los equilibrios de Nash repetidos que estudiamos en el capítulo 15. Esto sugiere que, con rondas de negociación repetidas, es posible desarrollar estrategias disparadoras que llevan a un equilibrio de subjuego perfecto y tienen resultados superiores en el sentido de Pareto. Encontrará un ejemplo sencillo en el problema 16.10.

Pregunta: Supongamos que la función del ingreso de una empresa fuera diferente en función de que la economía estuviera en expansión o en recesión. ¿Qué tipos de contratos de trabajo serían óptimos en el sentido de Pareto?

RESUMEN

En este capítulo se estudiaron algunos modelos que se concentran en los precios en el mercado de trabajo. Dado que en el capítulo 9 estudiamos la demanda de trabajo como algo derivado de la hipótesis de maximización del beneficio, la mayor parte del material nuevo ha girado en torno a la oferta de trabajo. Algunos de los resultados derivados de este planteamiento fueron:

- Un individuo que maximiza la utilidad optará por ofertar la cantidad de trabajo en la cual su tasa marginal de sustitución de ocio por consumo sea igual a su salario real.

- Un incremento del salario real genera un efecto ingreso y un efecto sustitución que actúan en sentido opuesto al afectar la cantidad de trabajo ofertada. Podemos resumir este resultado con una ecuación de Slutsky, muy similar a la que derivamos en la teoría del consumidor.

- Un mercado de trabajo en competencia fijará un salario real de equilibrio, en el cual la cantidad de trabajo ofertada por los individuos sea igual a la cantidad demandada por las empresas.

- El poder de monopsonio de las empresas, del lado de la demanda en el mercado de trabajo, reducirá tanto la cantidad de trabajo contratada como el salario real. Como en el caso del monopolio, también habrá una pérdida de bienestar.

- En términos analíticos, podemos considerar que un sindicato es un proveedor monopolista de trabajo. La naturaleza del equilibrio del mercado de trabajo, en presencia de sindicatos, dependerá enormemente de los objetivos que el sindicato decida perseguir.

PROBLEMAS

16.1

Suponga que un año tiene 8000 horas (de hecho tiene 8760) y que el salario de mercado que podría tener un individuo es de \$5 por hora.

a. ¿Cuál es el ingreso total del individuo? Si decide dedicar el 75% de su ingreso al ocio, ¿cuántas horas trabajará?

b. Supongamos que fallece un tío rico y le deja al individuo un ingreso anual de \$4000 por año. Si éste sigue dedicando el 75% de su ingreso total al ocio, ¿cuántas horas trabajará?

c. ¿Cómo cambiaría su respuesta al inciso anterior si el salario fuera de \$10 por hora en vez de \$5 por hora?

d. Dibuje la curva de oferta de trabajo del individuo que implican los incisos b y c.

16.2

Como vimos en el capítulo 16, también podemos emplear el planteamiento de minimizar los gastos para obtener los elementos de la teoría de la oferta de trabajo. Supongamos que la función de utilidad de consumo y ocio de una persona adopta la forma Cobb-Douglas $U(c, h) = c^{\alpha} h^{1-\alpha}$. Por lo tanto, el problema para minimizar los gastos será

$$\textbf{Minimizar } c - w(24 - h) \textbf{ t.o. } U(c, h) = c^{\alpha}h^{1-\alpha} = \bar{U}.$$

a. Utilice este planteamiento para obtener la función de gasto de este problema.

b. Utilice el teorema de la envolvente para obtener las funciones de demanda compensada para el consumo y el ocio.

c. Derive la función de oferta de trabajo compensada. Demuestre que $\partial l^c/\partial w > 0$.

d. Compare la función de oferta de trabajo compensada del inciso c con la función de oferta de trabajo sin compensar del ejemplo 16.1 (con $n = 0$). Utilice la ecuación de Slutsky para demostrar por qué los efectos ingreso y sustitución de una variación del salario real compensan precisamente la función de oferta de trabajo Cobb-Douglas sin compensar.

16.3

Un individuo recibe una utilidad de su ingreso diario (y), dada por

$$U(y) = 100y - \frac{1}{2}y^2.$$

La única fuente de ingresos es su salario. Por tanto, $y = wl$, donde w es el salario por hora y t es la cantidad de horas que trabaja por día. El individuo sabe de un trabajo que paga \$5 por hora por una jornada de 8 horas. ¿Qué salario se debe ofrecer para un empleo de construcción en el cual las horas de trabajo son aleatorias, con una media de 8 horas y una desviación estándar de 6 horas, para convencer a este individuo de que acepte este empleo más “arriesgado”?

Pista: el problema emplea la identidad estadística

$$E(x^2) = \text{Var } x + E(x)^2,$$

donde E significa “valor esperado”.

16.4

Una familia con dos miembros adultos quiere maximizar una función de utilidad de forma

$$U(c, h_1, h_2),$$

donde c es el consumo de la familia y h_1 y h_2 son las horas de ocio de cada miembro de la familia. Las elecciones están restringidas por

$$c = w_1(24 - h_1) + w_2(24 - h_2) + n,$$

donde w_1 y w_2 son los salarios de cada miembro de la familia y n es el ingreso extra laboral.

a. Sin tratar de hacer una presentación matemática, emplee las nociones de los efectos ingreso y sustitución para discutir los signos probables de los efectos cruzados de sustitución $\partial h_1/\partial w_2$ y $\partial h_2/\partial w_1$.

b. Supongamos que un miembro de la familia (por decir, el individuo 1) puede trabajar en casa, convirtiendo así sus horas de ocio en consumo según la función

$$c_1 = f(h_1),$$

donde $f' > 0, f'' < 0$. ¿Esta otra opción cómo afectaría la división óptima del trabajo entre los miembros de la familia?

16.5

Un programa de bienestar para personas de bajos ingresos ofrece a una familia una ayuda básica de \$6000 por año. Esta ayuda disminuye \$0.75 por cada \$1 de otros ingresos que tenga la familia.

a. ¿Qué cantidad de prestaciones sociales recibe la familia si no tiene otro ingreso? ¿Y si la cabeza de familia gana \$2000 al año? ¿Y si gana \$4000 al año?

b. ¿En qué nivel de ingresos la ayuda llega a ser de cero?

c. Supongamos que la cabeza de familia puede ganar hasta \$4 por hora y que la familia no tiene otro ingreso. ¿Cuál es la restricción presupuestaria anual de esta familia si no participa en el programa de bienestar social? Es decir, ¿cuál es la relación entre consumo (c) y horas de ocio (h)?

d. ¿Cuál es la restricción presupuestaria si la familia opta por participar en el programa de bienestar? (Recuerde, la ayuda sólo puede ser positiva.)

e. Dibuje una gráfica de sus resultados de los incisos c y d.

f. Supongamos que el gobierno cambia las reglas del programa de bienestar social para permitir que las familias se queden con el 50% de lo que ganan. ¿Esto cómo cambiaría sus respuestas a los incisos d y c?

g. Empleando sus resultados del inciso anterior, ¿puede prever si la cabeza de esta familia trabajará más o menos con las nuevas reglas descritas en el inciso anterior?

16.6

Supongamos que la demanda de trabajo está determinada por

$$l = -50w + 450$$

y que la oferta está determinada por

$$l = 100w,$$

donde l representa la cantidad de personas empleadas y w es el salario real por hora.

a. ¿Cuáles serán los niveles de equilibrio de w y l en este mercado?

b. Supongamos que el gobierno quiere incrementar el salario de equilibrio a \$4 por hora, ofreciendo un subsidio a los empleadores por cada persona que contraten. ¿Cuál tendría que ser el monto de este subsidio?

c. ¿Cuál será el nuevo nivel de empleo del equilibrio? ¿Cuál será el monto total del subsidio que pagará el gobierno?

d. Elabore una gráfica de sus resultados.

16.7

Carl el sastre tiene una enorme fábrica de ropa en una isla. La fábrica de Carl es la única fuente de empleo de la mayor parte de los isleños y, por tanto, Carl actúa como monopsonista. La curva de oferta de los trabajadores de ropa está determinada por

$$l = 80w,$$

donde l es la cantidad de trabajadores contratados y w es su salario por hora. Supongamos también que la curva de demanda de trabajo de Carl (ingreso del producto marginal) está determinada por

$$l = 400 - 40IPMg_l.$$

a. ¿Cuántos trabajadores contratará Carl para maximizar sus utilidades y qué salario pagará?

b. Supongamos que el gobierno aplica una ley de salarios mínimos que cubre a todos los trabajadores textiles. ¿Ahora cuántos trabajadores contratará Carl y cuánto desempleo habrá si el gobierno fija el salario mínimo a \$4 por hora?

c. Elabore una gráfica con sus resultados.

d. El salario mínimo impuesto en un monopsonio ¿cómo difiere de los resultados en comparación con un salario mínimo impuesto en competencia perfecta, suponiendo que el salario mínimo está por encima del salario determinado por el mercado?

16.8

La Carbonífera Ajax es la única que contrata trabajo en su zona. Puede contratar la cantidad de trabajadoras o de trabajadores que quiere. La curva de oferta de trabajadoras está determinada por

$$l_f = 100w_f$$

y de trabajadores por

$$l_m = 9w_m^2,$$

donde w_f y w_m son los salarios pagados por hora, respectivamente, a mujeres y hombres. Supongamos que Ajax vende su carbón, en un mercado en competencia perfecta, a \$5 por tonelada y que cada trabajador empleado (hombre o mujer) puede extraer 2 toneladas por hora. Si la empresa quiere maximizar sus utilidades, ¿cuántas mujeres y hombres debe contratar y cuál será el salario para estos dos grupos? ¿Cuáles serán las utilidades que obtiene Ajax por hora con su maquinaria minera? ¿Qué ocurre si se compara este resultado con el caso en que Ajax estuviera restringido (por decir, por las fuerzas del mercado) a pagar a todos los trabajadores el mismo salario con base en el valor de su producto marginal?

16.9

Universal Fur tiene su domicilio en Clyde, Baffin Island, y vende corbatas de piel de alta calidad en todo el mundo a un precio de \$5 cada una. La función de producción de corbatas (q) está dada por

$$q = 240x - 2x^2,$$

donde x es la cantidad de pieles de animales empleadas por semana Dan's Trading Post, es el único que surte las pieles y las obtiene contratando a tramperos esquimales a un salario de \$10 por día. La función de producción semanal de pieles de Dan está dada por

$$x = \sqrt{t},$$

donde t representa el número de días del tiempo de los esquimales empleado cada semana.

a. Para el caso cuasi competitivo, en el cual Universal Fur y también Dan's Trading Post actúan como tomadores de precio de las pieles, ¿cuál será el precio de equilibrio (p_x) y cuántas pieles se intercambian?

b. Supongamos que Dan actúa como monopolista, mientras que Universal Fur se sigue comportando como un agente tomador de precio. ¿Cuál será el equilibrio en el mercado de las pieles?

c. Supongamos que Universal Fur actúa como monopsonista pero Dan como tomador de precio. ¿Cuál será el equilibrio?

d. Elabore una gráfica de sus resultados y analice el tipo de equilibrio que probablemente surgirá en la negociación bilateral del monopolio de Universal Fur y Dan.

16.10

Siguiendo el talante del juego del mercado de trabajo descrito en el ejemplo 16.5, supongamos que la función del ingreso total de la empresa está dada por

$$IT = 10l - l^2$$

y que la utilidad del sindicato es simplemente una función de los pagos salariales totales

$$U(w, l) = wl.$$

a. ¿Cuál es el contrato salarial con equilibrio de Nash en este juego de dos etapas descrito en el ejemplo 16.5?

b. Demuestre que el contrato salarial alternativo de $w' = l' = 4$ es superior, en el sentido de Pareto, al contrato del inciso anterior.

c. ¿En qué condiciones sería sostenible el contrato del inciso anterior como equilibrio de un subjuego perfecto?

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Ashenfelter, O. C. y D. Card. *Handbook of Labor Economics,* North-Holland, Amsterdam, 1986, vol. 3.

Contiene una serie de magníficos ensayos sobre muchos temas del mercado de trabajo. Los artículos que reseñan la oferta y la demanda de trabajo, en los volúmenes 1 y 2, también son muy recomendables.

Becker, G. "A Theory of the Allocation of Time", *Economic Journal*, septiembre de 1965, pp. 493-517.

Uno de los más influyentes escritos sobre microeconomía. Las observaciones de Becker de la oferta de trabajo y de las decisiones relativas al consumo fueron revolucionarias.

Binger, B. R. y E. Hoffman. *Microeconomics with Calculus,* 2a. ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1998.

El capítulo 17 contiene un análisis extenso del modelo de la oferta de trabajo, inclusive algunas aplicaciones a la oferta de trabajo de las familias.

Hamermesh, D. S. *Labor Demand*, Princeton University Press, Princeton, 1993.

El autor cubre ampliamente cuestiones tanto empíricas como teóricas. El libro también abarca de manera atinada aspectos dinámicos de la teoría de la demanda de trabajo.

Silberberg, E. y W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis,* 3a. ed., Irwin/McGraw-Hill, Boston, 2001.

Presenta un buen análisis del planteamiento dual de la teoría de la oferta de trabajo.

Capítulo 17

MERCADO DE CAPITAL

En este capítulo se ofrece una introducción a la teoría del capital. En muchos sentidos, esta teoría es similar a nuestro análisis de la forma en que se fijan los precios de los factores en general; es decir, el principio de la elección de factores que maximiza el beneficio no cambia. Sin embargo, la teoría del capital añade a la toma de decisiones económicas la importante dimensión del tiempo y, ahora, nuestro objetivo será analizar dicha dimensión adicional. Partimos de una descripción general del proceso de acumulación de capital y del concepto de tasa de rendimiento. A continuación nos centraremos en modelos más concretos del comportamiento económico a lo largo del tiempo.

Capital y tasa de rendimiento

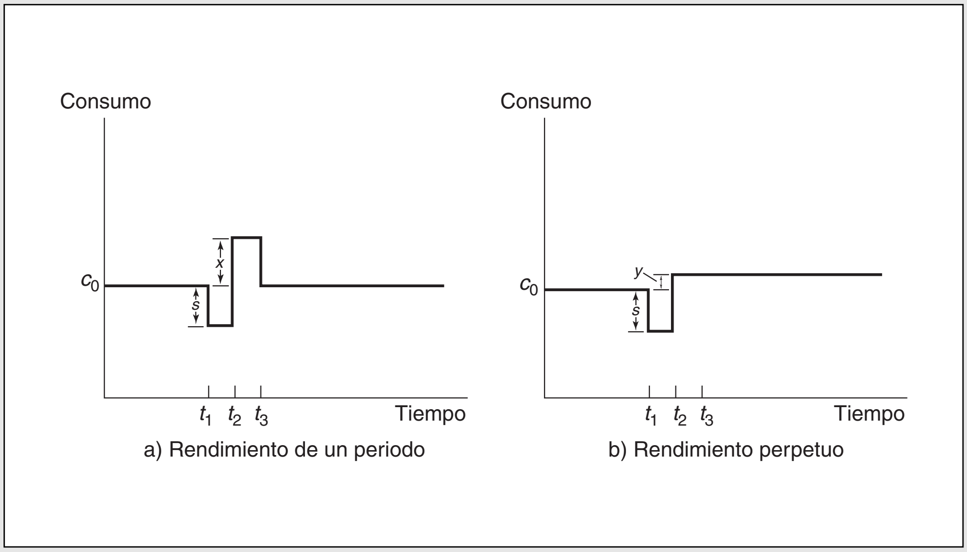
Cuando hablamos del acervo de capital de una economía nos referimos a la suma total de maquinaria, edificios y otros recursos reproducibles que existen en un punto determinado del tiempo. Estos activos representan una parte de la producción anterior de la economía que no fue consumida y que, en cambio, fue reservada a efecto de emplearla para una producción futura. Todas las sociedades, desde las más primitivas hasta las más complejas, acumulan capital. Los cazadores de una sociedad primitiva que distraían tiempo de la caza para fabricar flechas, los individuos de una sociedad moderna que emplean parte de su ingreso para comprar casas o los gobiernos que cobran impuestos a los ciudadanos para construir presas o edificios de correos están desempeñando, en esencia, el mismo tipo de actividad; es decir, están reservando una parte de la producción actual con el objeto de utilizarla para producir en periodos futuros. El aspecto esencial de la acumulación de capital es que se "sacrifica" algo en el presente a cambio de un beneficio futuro.

Tasa de rendimiento

La figura 17.1 contiene un esquema del proceso de acumulación de capital. En las dos secciones de la figura, la sociedad está consumiendo el nivel c_0 al inicio, y lleva haciéndolo cierto tiempo. En el momento t_1 toma la decisión de reservar, durante un periodo, una parte de la producción (una cantidad s) del consumo corriente. A partir del periodo t_2 empieza a usar, de alguna manera, el consumo reservado para el futuro. La *tasa de rendimiento* que se obtiene del consumo que se ha reservado es un importante concepto relacionado con este proceso. Por ejemplo, en la sección a), todo el consumo reservado es empleado para generar, tan sólo en el periodo t_2 una producción adicional. El consumo aumenta la cantidad x en el periodo t_2 y después vuelve al nivel de largo plazo c_0. La sociedad ha ahorrado un año con el propósito de poder derrochar

FIGURA 17.1 **Dos planteamientos de la acumulación de capital**

En a), la sociedad reserva una parte de su consumo corriente *(s)* para satisfacerse (con *x* consumo adicional) en el siguiente periodo. Así $x/s - 1$ mediría la tasa de rendimiento de un periodo. En b), la sociedad adopta un planteamiento de más largo plazo y utiliza *s* para incrementar su consumo de manera indefinida en la cantidad de *y*. La tasa de rendimiento perpetuo estaría determinada por y/s.



al año siguiente. La definición de la tasa de rendimiento (de un periodo) de esta actividad es la siguiente:

DEFINICIÓN

Tasa de rendimiento de un periodo. La *tasa de rendimiento de un periodo* (r_1) de una inversión es el consumo adicional que ésta proporciona en el periodo 2, como fracción del consumo que no se ha realizado en el periodo 1. Es decir,

$$r_1 = \frac{x - s}{s} = \frac{x}{s} - 1. \tag{17.1}$$

Si $x > s$ (si este proceso produce más consumo del que se invirtió en él), diríamos que la tasa de rendimiento de un periodo para la acumulación de capital es positiva. Por ejemplo, si reservar 100 unidades del consumo corriente permitiera a la sociedad consumir 110 unidades extra el año próximo, la tasa de rendimiento de un periodo sería

$$\frac{110}{100} - 1 = 0.10$$

o 10 por ciento.

En la sección b) de la figura 17.1, la sociedad adopta un planteamiento de largo plazo para su acumulación de capital. De nueva cuenta, se reserva una cantidad *s* en el periodo t_1. Sin embargo, ahora este consumo reservado será empleado para incrementar el nivel de consumo de todos los periodos futuros. Si el nivel permanente de consumo aumenta a $c_0 + y$, definimos la tasa de rendimiento perpetuo de la manera siguiente:

DEFINICIÓN

Tasa de rendimiento perpetuo. La *tasa de rendimiento perpetuo* (r_∞) es el incremento permanente del consumo futuro expresado como fracción del consumo inicial que ha sido reservado. Es decir,

$$r_\infty = \frac{y}{s}. \tag{17.2}$$

Si la acumulación de capital consigue aumentar c_0 de forma permanente, r_∞ será positiva. Por ejemplo, supongamos que la sociedad reserva 100 unidades de producto en el periodo t_1 con el objeto de acumular capital. Si este capital permitiera que la producción aumentara 10 unidades en cada periodo futuro (a partir del periodo t_2) la tasa de rendimiento perpetuo sería de 10 por ciento.

Cuando los economistas hablan de la tasa de rendimiento de la acumulación de capital piensan en un punto intermedio entre estos dos extremos. Nosotros, sin ser demasiado estrictos, hablaremos de la tasa de rendimiento como una medida de los términos con los cuales el consumo actual se puede convertir en consumo futuro (en breve se explicará esto de forma más clara). Así, surge la pregunta natural de cómo se determina la tasa de rendimiento de una economía. De nueva cuenta, el equilibrio se deriva de la oferta y la demanda de bienes presentes y futuros. En la siguiente sección se presenta un modelo sencillo de dos periodos, el cual demuestra esta relación entre la oferta y la demanda.

Determinación de la tasa de rendimiento

En esta sección se describirá cómo la operación de la oferta y la demanda de bienes "futuros" establece la tasa de rendimiento de equilibrio. Empezamos por analizar la conexión entre la tasa de rendimiento y el "precio" de los bienes futuros. A continuación demostramos que los individuos y las empresas muy probablemente reaccionarán ante este precio. Por último, reunimos estas acciones, como hemos hecho para el análisis de otros mercados, a efecto de demostrar cómo se determina el precio de equilibrio de los bienes futuros, así como de analizar algunas de las características de esta solución.

Tasa de rendimiento y precio de los bienes futuros

En la mayor parte de nuestro análisis a lo largo de este capítulo, supondremos que sólo se deben considerar dos periodos: el periodo inicial (que denotaremos con el subíndice 0) y el periodo final (que denotaremos con el subíndice 1). Se empleará la letra r para denotar la tasa de rendimiento (de un periodo) entre estos dos periodos. Por tanto, tal y como la hemos definido en la sección anterior,

$$r = \frac{\Delta c_1}{\Delta c_0} - 1, \tag{17.3}$$

donde empleamos la notación Δ para referirnos a la variación del consumo en los dos periodos. Si volvemos a expresar la ecuación 17.3 tendremos

$$\frac{\Delta c_1}{\Delta c_0} = 1 + r \tag{17.4}$$

o

$$\frac{\Delta c_0}{\Delta c_1} = \frac{1}{1 + r}. \tag{17.5}$$

En la ecuación 17.5, el término de la izquierda muestra la cantidad de c_0 que debemos reservar para poder aumentar una unidad en c_1; es decir, la expresión representa el "precio" relativo de una unidad de c_1 en términos de c_0. Así, hemos definido el precio de los bienes futuros.[1]

DEFINICIÓN

Precio de los bienes futuros. El *precio (relativo) de los bienes futuros* (p_1) es la cantidad de bienes presentes a los que debemos renunciar para aumentar el consumo futuro en una unidad. Es decir,

$$p_1 = \frac{\Delta c_0}{\Delta c_1} = \frac{1}{1+r}. \tag{17.6}$$

Ahora pasaremos a desarrollar un análisis de la oferta y la demanda para determinar p_1. Al hacerlo, también habremos desarrollado una teoría de cómo se determina r, la tasa de rendimiento en este modelo simple.

Demanda de bienes futuros

La teoría de la demanda de bienes futuros es una aplicación más del modelo de maximización de la utilidad que desarrollamos en la parte 2 de este libro. En este caso, la utilidad del individuo depende del consumo presente y futuro [es decir, utilidad = $U(c_0, c_1)$], y éste debe decidir qué tanto de su riqueza corriente (W) quiere asignar a cada uno de estos dos bienes.[2] La riqueza que no gaste en el consumo corriente la podrá invertir a una tasa de rendimiento r para obtener consumo en el periodo siguiente. Al igual que antes, p_1 refleja el costo presente del consumo futuro y la restricción presupuestaria del individuo estará determinada por

$$W = c_0 + p_1 c_1. \tag{17.7}$$

La figura 17.2 ilustra esta restricción. Si el individuo decide gastar toda su riqueza en c_0, el consumo corriente total será W y no habrá consumo alguno en el periodo 2. Por otra parte, si $c_0 = 0$, c_1 estará determinado por $W/p_1 = W(1 + r)$. Es decir, si invierte toda su riqueza a la tasa de rendimiento r, su riqueza corriente aumentará a $W(1 + r)$ en el periodo 2.[3]

Maximización de la utilidad

El mapa de curvas de indiferencia del individuo para c_0 y c_1 sobrepuesto a la restricción presupuestaria de la figura 17.2 refleja la maximización de la utilidad. En este caso, el individuo maximiza su utilidad en el punto c_0^*, c_1^*. Éste consume c_0^* en el presente y decide ahorrar $W - c_0^*$ para consumirlo en el periodo siguiente. Podemos calcular este consumo futuro a partir de la restricción presupuestaria como

$$p_1 c_1^* = W - c_0^* \tag{17.8}$$

o

$$c_1^* = \frac{(W - c_0^*)}{p_1} \tag{17.9}$$

$$= (W - c_0^*)(1 + r). \tag{17.10}$$

En otras palabras, la riqueza que no es consumida en el presente ($W - c_0^*$) es invertida a la tasa de rendimiento, r, y aumentará para ofrecer c_1^* en el periodo siguiente.

---

[1]Este precio es idéntico al factor de descuento que presentamos en el capítulo 15 para las partidas de un juego que se repiten.

[2]En el problema 17.1 encontrará el análisis de un caso en el cual el individuo tiene ingresos en los dos periodos.

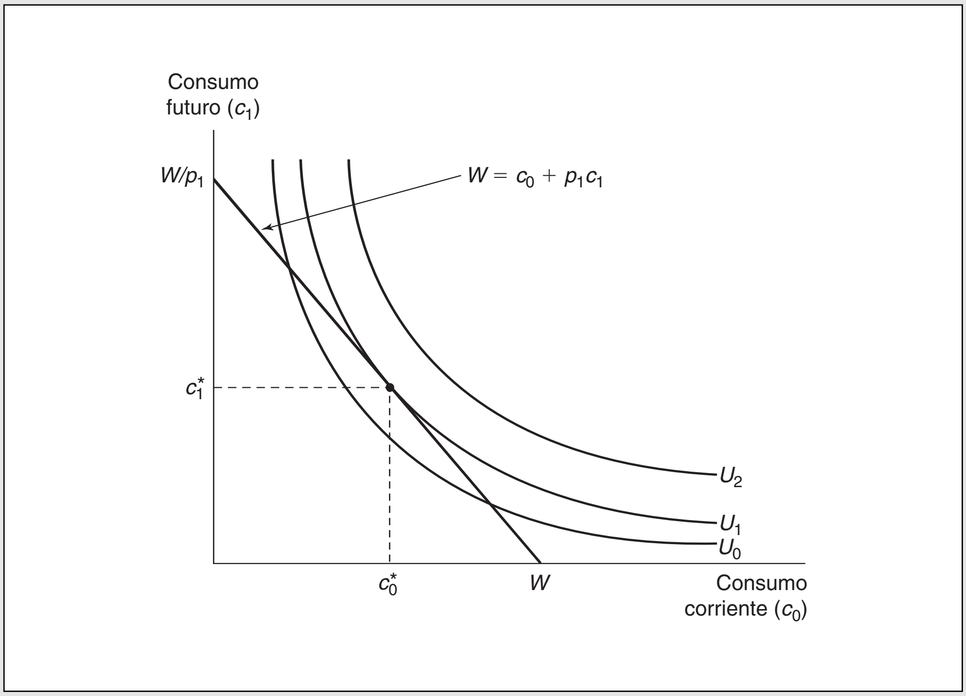
[3]Esta observación ofrece una interpretación alternativa de la restricción presupuestaria, la cual podemos expresar en términos de la tasa de rendimiento como

$$W = c_0 + \frac{c_1}{1+r}.$$

Esto ilustra el hecho de que el "valor presente" de c_1 es el que forma parte de la restricción presupuestaria corriente del individuo. Más adelante, en este mismo capítulo, analizaremos el concepto del valor presente con más detalle.

FIGURA 17.2 **Utilidad del individuo maximizada intertemporalmente**

Cuando el individuo afronta una restricción intertemporal del presupuesto $W = c_0 + p_1c_1$, maximizará su utilidad optando por consumir c_0^* en el presente y c_1^* en el periodo siguiente. Una disminución de p_1 (un incremento de la tasa de rendimiento, r) provocará que c_1 aumente, pero el efecto en c_0 es indeterminado porque el efecto ingreso y el efecto sustitución operan en sentido opuesto, suponiendo que tanto c_0 como c_1 sean bienes normales.



Impaciencia intertemporal

Es evidente que las elecciones de los individuos que maximizan su utilidad a lo largo del tiempo dependerán de lo que piensan acerca de las ventajas relativas de consumir ahora o esperar a consumir en el futuro. Una forma de reflejar la posibilidad de que las personas exhiban cierta impaciencia en sus elecciones consiste en suponer que el individuo, de manera implícita, descuenta en su mente la utilidad del consumo futuro. Por ejemplo, podremos suponer que la función de utilidad del consumo, U, es la misma en los dos periodos (con $U' > 0$, $U'' < 0$), pero que el individuo descuenta en su mente la utilidad del periodo 1 a una "tasa de preferencia temporal" de $1/(1 + \delta)$ (donde $\delta > 0$). Si también podemos separar la función de utilidad intertemporal (para un análisis de este concepto véanse las ampliaciones al capítulo 6), podremos expresar

$$U(c_0, c_1) = U(c_0) + \frac{1}{1+\delta}U(c_1). \tag{17.11}$$

La maximización de esta función sujeta a la restricción presupuestaria intertemporal

$$W = c_0 + \frac{c_1}{1+r} \tag{17.12}$$

nos dará la siguiente expresión lagrangiana:

$$\mathscr{L} = U(c_0, c_1) + \lambda\left[W - c_0 - \frac{c_1}{1+r}\right], \tag{17.13}$$

y las condiciones de primer orden para un máximo serán

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_0} &= U'(c_0) - \lambda = 0\\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_1} &= \frac{1}{1+\delta}U'(c_1) - \frac{\lambda}{1+r} = 0\\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= W - c_0 - \frac{c_1}{1+r} = 0.\end{aligned} \tag{17.14}$$

Si se divide la primera y segunda ecuación y se reorganizan los términos tendremos[4]

$$U'(c_0) = \frac{1+r}{1+\delta}U'(c_1). \tag{17.15}$$

Dado que hemos supuesto que la función de utilidad del consumo es la misma para los dos periodos, podemos concluir que $c_0 = c_1$ si $r = \delta$, que $c_0 > c_1$ si $\delta > r$ [para obtener $U'(c_0) < U'(c_1)$ es necesario que $c_0 > c_1$], y que $c_0 < c_1$ para $r > \delta$. Por tanto, el consumo de este individuo aumentará o disminuirá del periodo 0 al periodo 1 dependiendo precisamente de lo impaciente que sea. No obstante que un consumidor pueda tener preferencia por los bienes presentes ($\delta > 0$), podría consumir más en el futuro que en el presente si la tasa de rendimiento que percibe sobre el ahorro es lo bastante alta.

Pregunta: Si dos individuos son igual de impacientes pero afrontan tasas de rendimiento distintas, ¿cuál de ellos exhibirá el mayor incremento de c_1 sobre c_0?

Efectos de variaciones en *r*

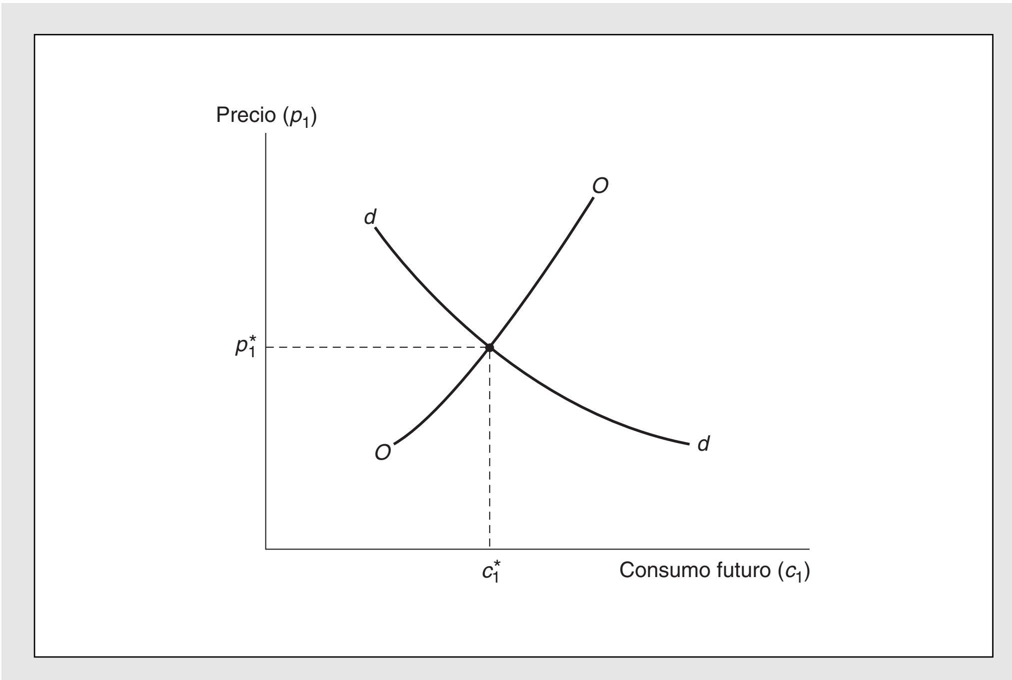
El análisis de estática comparativa del equilibrio que ilustra la figura 17.2 es simple. Si p_1 disminuye (es decir, si r aumenta), tanto el efecto ingreso como el efecto sustitución harán que se demande más c_1 salvo en el poco probable caso de que c_1 sea un bien inferior. Por tanto, la curva de demanda de c_1 tendrá pendiente negativa. Un incremento de r disminuye, en efecto, el precio de c_1, y, con ello, aumenta el consumo de ese bien. En la figura 17.3 esta curva de demanda está señalada con una *D*.

Antes de terminar nuestra explicación de las decisiones intertemporales de los individuos, cabe señalar que nuestro análisis no permite hacer un pronunciamiento incuestionable sobre el signo de $\partial c_0/\partial p_1$. En la figura 17.2, el efecto ingreso y el efecto sustitución operan en sentido opuesto y no es posible hacer una predicción contundente. Una disminución de p_1 provocará que el individuo sustituya c_1 por c_0 en sus planes de consumo. Pero una disminución de p_1 incrementa el valor real de la riqueza y el efecto ingreso hace que aumenten tanto c_0 como c_1. Dicho de otra manera, el modelo que ilustra la figura 17.2 no permite una predicción contundente del efecto que las variaciones de la tasa de rendimiento afectarán a la acumulación de riqueza en el periodo corriente (ahorro). Un r más alto genera un efecto sustitución que fomenta un ma-

[4]A veces, la ecuación 17.15 se conoce como la "ecuación de Euler" para maximizar la utilidad intertemporal. Una vez definida una función de utilidad específica, la ecuación muestra cómo el consumo va cambiando a lo largo del tiempo.

FIGURA 17.3 **Determinación del precio de equilibrio de los bienes futuros**

El punto p_1^*, c_1^* representa un equilibrio en el mercado de bienes futuros. El precio de equilibrio de los bienes futuros determinará la tasa de rendimiento por medio de la ecuación 17.16.



yor ahorro y el efecto ingreso que promueve un menor ahorro. Por tanto, al final de cuentas, la dirección del efecto es una cuestión empírica.

Oferta de bienes futuros

En cierto sentido, el análisis de la oferta de bienes futuros es bastante sencillo. Podemos decir que un incremento del precio relativo de los bienes futuros (p_1) llevará a las empresas a producir mayor cantidad de estos bienes, porque el rendimiento de hacerlo ahora será mayor. La curva de oferta *O* con pendiente positiva y que se ilustra en la figura 17.3, refleja esta reacción. Cabe esperar que, como en el análisis de la competencia perfecta que hicimos antes, esta curva de oferta refleje al costo marginal creciente (o rendimientos decrecientes) que registran las empresas cuando tratan de convertir bienes presentes en bienes futuros por medio de la acumulación de capital.

Por desgracia, profundizar más en la naturaleza de la acumulación de capital encuentra complejidades que han ocupado a los economistas durante cientos de años.[5] Básicamente, todas ellas se derivan de problemas para desarrollar un modelo manejable del proceso de acumulación de capital. En nuestro modelo del comportamiento individual este problema no surgió porque pudimos suponer que el "mercado" cotizaba una tasa de rendimiento a los individuos de modo que éstos pudieran adoptar su comportamiento a dicho rendimiento. Más adelante, en este mismo capítulo, también seguiremos ese camino cuando se describan las decisiones de inversión de las empresas. Sin embargo, para poder desarrollar un modelo adecuado de la acumulación de capital por parte de las empresas, debemos describir con precisión cómo c_0 se "transforma" en c_1, y hacerlo nos adentraría demasiado en las particularidades de la teoría del capital. En cambio,

[5]Encontrará un análisis de parte de este debate en, M. Blaug. *Economic Theory in Retrospect,* edición revisada, Richard D. Irwin, Homewood, IL, 1978, cap. 12.

nos contentaremos con dibujar la curva de oferta de la figura 17.3 con una pendiente positiva partiendo del supuesto que esta forma es intuitivamente razonable. Gran parte del análisis que sigue en este capítulo tal vez sirva para convencer al lector de que, en efecto, así es.

Precio de equilibrio de los bienes futuros

El equilibrio del mercado que muestra la figura 17.3 se encuentra en p_1^*, c_1^*. En ese punto la oferta y la demanda de bienes futuros por parte de los individuos están en equilibrio, y éstos destinarán a la acumulación de capital la cantidad necesaria de bienes corrientes para producir c_1^* en el futuro.[6]

Hay una serie de razones para esperar que p_1 sea inferior a 1; es decir, "comprar" un bien en el futuro costará menos que sacrificar un bien corriente. Como se demostró en el ejemplo 17.1, cabe argumentar que los individuos necesitan recibir un incentivo por esperar. Los refranes cotidianos ("más vale pájaro en mano que ciento volando", "hay que vivir al día") y las realidades más sustanciales (la incertidumbre respecto al futuro y la seguridad de que la vida no es eterna) sugieren que los individuos suelen ser impacientes en sus decisiones de consumo. Por tanto, la acumulación de capital, como la que muestra la figura 17.3, sólo tendrá lugar si el sacrificio presente vale la pena de alguna manera.

Del lado de la oferta también hay razones para creer que p_1 será inferior a 1. Todas ellas implican la idea de que la acumulación de capital es "productiva": renunciar a un bien hoy rendirá más de un bien en el futuro. Actividades campestres como la horticultura o el añejamiento del vino y el queso sirven como ejemplos sencillos de la productividad de la inversión de capital. Los propietarios de viveros, viñedos y queserías se "abstienen" de vender sus productos porque creen que el tiempo hará que sean más valiosos en el futuro. Si bien es evidente que la acumulación de capital en una sociedad industrial moderna es más compleja que la horticultura (piense en la construcción de una siderúrgica o de una red de energía eléctrica), los economistas consideran que ambos procesos tienen ciertas similitudes. En ambos casos, la inversión de bienes presentes hace que el proceso de producción sea más largo y más complejo y, por tanto, mejora la capacidad productiva general de todos los demás recursos empleados en la producción.

La tasa de rendimiento de equilibrio

Ahora ya podemos definir la relación entre la tasa de rendimiento (r) con lo que hemos denominado el precio de los bienes futuros mediante la fórmula

$$p_1^* = \frac{1}{1+r}. \qquad (17.16)$$

Puesto que creemos que p_1^* será inferior a 1, la tasa de rendimiento (r) será positiva. Por ejemplo, si $p_1^* = 0.9$, entonces r será aproximadamente igual a 0.11 y diríamos que la tasa de rendimiento de la acumulación del capital es del "11%". Al reservar una unidad del consumo corriente, el consumo de bienes futuros puede aumentar en 1.11. La tasa de rendimiento y p_1 son formas equivalentes de medir los términos en los cuales los bienes presentes se convierten en bienes futuros.

Tasa de rendimiento, tasas de interés real y tasas de interés nominal

El concepto de tasa de rendimiento que hemos analizado hasta ahora, en este capítulo, a veces se emplea como sinónimo del concepto de tasa de interés "real". En este contexto, se considera que los dos se refieren al rendimiento real que se puede obtener de la acumulación de capital. Debemos diferenciar este concepto de la tasa de interés nominal que encontramos, de hecho, en

[6]Ésta es una forma muy simplificada del análisis presentado inicialmente por I. Fisher. *The Rate of Interest*, Macmillan, Nueva York, 1907.

los mercados financieros. En concreto, si esperamos que el nivel general de precios aumente $\dot{p}_e$ entre dos periodos (es decir, un $\dot{p}_e$ de 0.10 sería una tasa de inflación del 10%), esperaríamos que la tasa de interés nominal (r) esté dada por la ecuación

$$1 + r = (1 + r)(1 + \dot{p}_e), \qquad (17.17)$$

porque un posible acreedor esperaría ser compensado por el costo de oportunidad de no invertir en capital real (r) y también por el aumento del nivel general de precios ($\dot{p}_e$). La ampliación de la ecuación 17.17 dará

$$1 + r = 1 + r + \dot{p}_e + r\dot{p}_e, \qquad (17.18)$$

y, suponiendo que $r \cdot \dot{p}_e$ es pequeño, se obtendrá la aproximación más sencilla de

$$r = r + \dot{p}_e. \qquad (17.19)$$

Si la tasa de rendimiento real es del 4% (0.04) y la tasa de inflación esperada es del 10% (0.10), la tasa de interés nominal será aproximadamente del 14% (0.14). Por tanto, la diferencia entre la tasa de interés nominal observada y la tasa de interés real puede ser sustancial en entornos inflacionarios.

La demanda de capital de la empresa

Las empresas alquilan maquinaria siguiendo el principio de maximizar su beneficio obtenido en el capítulo 9. En concreto, en un mercado en competencia perfecta, la empresa optará por contratar la cantidad de máquinas en la cual el ingreso del producto marginal sea precisamente igual a la tasa de alquiler de la maquinaria en el mercado. En esta sección se analizarán primero los determinantes de la tasa de alquiler en el mercado, para lo cual supondremos que todas las máquinas son alquiladas. Más adelante, en esta misma sección, dado que casi todas las empresas, en lugar de alquilar las máquinas, las compran y las conservan hasta que se deterioran, analizaremos los problemas concretos que se derivan de su posesión.

Determinantes del precio de alquiler en el mercado

Consideremos el caso de una empresa que está en el negocio de alquiler de maquinaria a otras empresas. Supongamos que esta empresa es propietaria de una máquina, por ejemplo, un automóvil o una excavadora que tiene un precio corriente de mercado de p. ¿Cuánto cobrará la empresa a sus clientes por el uso de la máquina? El propietario de la máquina afronta dos tipos de costos: la depreciación de la máquina y el *costo de oportunidad* de tener sus fondos invertidos en una máquina, en lugar de tenerlos en una inversión que genera la tasa de rendimiento existente en la actualidad. Si suponemos que los costos de la depreciación por periodo son un porcentaje constante (d) del precio de mercado de la máquina y que la tasa de interés real está dada por r, el costo del propietario de la máquina para un periodo está determinado por

$$pd + pr = p(r + d). \qquad (17.20)$$

Si suponemos que el mercado de alquiler de maquinaria está en competencia perfecta, entonces no será posible obtener un beneficio a largo plazo alquilando máquinas. El funcionamiento del mercado garantizará que la tasa de alquiler de la máquina por periodo (v) sea exactamente igual al costo del propietario de la máquina. Por consiguiente, tendremos el resultado básico de que

$$v = p(r + d). \qquad (17.21)$$

La tasa de alquiler competitiva es la suma de los intereses a los que renuncia el dueño de la máquina y del costo por depreciación que debe pagar. Por ejemplo, supongamos que la tasa de interés real es del 5% (es decir, 0.05) y que la tasa de depreciación física es del 15% (0.15). Supongamos también que el precio corriente de mercado de la máquina asciende a 10 000 dólares. Entonces, en este sencillo modelo, la máquina tendrá una tasa de alquiler de \$2000 [= \$10 000 × (0.05 + 0.15)] por año y, de esta cantidad, \$500 corresponderían al costo de oportunidad y los \$1500 restantes reflejarían los costos del deterioro físico.

Máquinas que no se deprecian

En el caso hipotético de una máquina que no se deprecia ($d = 0$), podríamos expresar así la ecuación 17.21

$$\frac{v}{P} = r. \tag{17.22}$$

En equilibrio, una máquina que tiene una vida infinita (que no se deprecia) es equivalente a un bono a perpetuidad (véase el apéndice a este capítulo) y, por tanto, debe "rendir" la tasa de rendimiento del mercado. La tasa de alquiler, como porcentaje del precio de la máquina, debe ser igual a r. Si $v/p > r$, entonces todo el mundo se precipitaría a comprar máquinas, porque alquilarlas produciría más que las tasas de rendimiento en otras inversiones. De otra parte, si $v/p < r$, entonces nadie estaría en el negocio de alquilar máquinas, porque podría ganar más en otras inversiones.

Propiedad de las máquinas

Hasta aquí, nuestro análisis ha supuesto que las empresas alquilan todas las máquinas que emplean. Si bien estos alquileres existen en el mundo real (por ejemplo, muchas empresas se dedican al negocio de alquilar aviones, camiones, vagones de carga y computadoras a otras empresas), las empresas por lo común son propietarias de las máquinas que emplean. Una empresa comprará una máquina y la empleará en combinación con el trabajo que contrata para fabricar sus productos. La propiedad de las máquinas hace que el análisis de la demanda de capital resulte algo más complejo que el de la demanda de trabajo. No obstante, si reconocemos la importante diferencia entre *acervo* y *flujo,* podremos demostrar que estas dos demandas son bastante similares.

Una empresa emplea *servicios de capital* para fabricar sus productos. Estos servicios representan la magnitud de un *flujo*. Lo que importa para el proceso de producción es el número de horas-máquina, al igual que el número de horas de trabajo, y no la cantidad de máquinas *per se*. Sin embargo, con frecuencia partimos del supuesto de que el flujo de servicios de capital es proporcional al *acervo* de máquinas (si 100 máquinas son empleadas totalmente durante una hora rinden 100 horas-máquina de servicios); por lo cual muchas veces empleamos estos dos conceptos como si fueran sinónimos. Si una empresa desea disponer de determinado número de horas-máquina durante un periodo, ello generalmente se entiende como que la empresa desea disponer de cierta cantidad de máquinas. La demanda de servicios de capital de la empresa también es una demanda de capital.[7]

Una empresa que maximiza el beneficio en competencia perfecta elegirá el nivel de factores productivos de modo tal que el ingreso del producto marginal de una unidad adicional de un factor cualquiera sea igual a su costo. Este resultado también es válido para la demanda de horas-máquina. El costo de los servicios del capital está dado por la tasa de alquiler (v) de la ecuación 17.21. Este costo es asumido por la empresa, sea que alquile la máquina en el mercado o que sea de su propiedad. En el primer caso se trata de un costo explícito, mientras que en el segundo, la empresa está, en esencia, en dos negocios: 1) fabricar su producción y 2) poseer máquinas y alquilárselas a sí misma. En el segundo caso, las decisiones de la empresa serían iguales a las de otra empresa que alquile máquinas, porque contrae los mismos costos. El hecho de que la empresa sea propietaria de la máquina, en una primera aproximación, es irrelevante para determinar el costo. Por lo tanto, también podemos aplicar nuestro análisis anterior de la demanda factorial por caso:

Demanda de capital. Una empresa que maximiza el beneficio y afronta un mercado de alquiler de capital, en competencia perfecta, contratará una cantidad adicional del factor capital hasta el punto en el cual el ingreso del producto marginal (IMP_k) sea igual a la tasa de alquiler

[7]Como parte del estudio de los ciclos económicos, con frecuencia también estudiamos las decisiones de la empresa sobre qué tan intensivamente usará un determinado acervo de capital durante un periodo.

en el mercado, v. En competencia perfecta, el alquiler reflejará los costos de depreciación y también los costos de oportunidad de inversiones alternativas. Así pues, tenemos

$$IMP_k = v = p(r + d). \tag{17.23}$$

Teoría de la inversión

Si una empresa sigue la regla para maximizar el beneficio de la ecuación 17.23 y encuentra que desea tener más servicios de capital que los que puede conseguir con su acervo corriente de maquinaria, tiene dos opciones. En primer término, puede contratar las máquinas adicionales que necesita en el mercado de alquiler. Formalmente, esto sería idéntico a su decisión de contratar más trabajo. En segundo, la empresa puede comprar más maquinaria para satisfacer sus necesidades. Esta segunda alternativa es la que se suele elegir con más frecuencia y se dice que la adquisición de equipo nuevo por parte de la empresa es una *inversión*.

En la teoría microeconómica, la demanda de inversión es un elemento importante de la "demanda agregada". Con frecuencia, se supone que la demanda de planta y equipo (es decir, de maquinaria) guarda una relación inversa con la tasa de interés, o lo que hemos llamado "tasa de rendimiento". Si se emplea el análisis desarrollado en esta parte del libro, podemos demostrar los vínculos de este argumento. Una disminución de la tasa de interés real (r) provocará que (*ceteris paribus*), disminuya la tasa de alquiler del capital (ecuación 17.21). Dado que el interés al que ha renunciado el propietario de una máquina representa un costo implícito para él, una disminución de r de hecho, disminuye el precio (es decir, la tasa de alquiler) del factor capital. Esta disminución de v implica que el capital ahora será un factor relativamente menos caro y esto llevará a las empresas a aumentar la cantidad de capital que emplean.

Planteamiento del valor presente descontado para las decisiones de inversión

Cuando una empresa adquiere una máquina, en realidad, está adquiriendo un flujo neto de ingresos en periodos futuros. Para decidir si debe comprar la máquina, la empresa debe calcular el valor presente descontado de este flujo.[8] La única forma de que la empresa tome debida cuenta de los efectos de los intereses a los que renunciará es haciendo este cálculo. Esto ofrece un planteamiento alternativo para explicar las decisiones de inversión.

Consideremos el caso de una empresa que está en el proceso de decidir si compra o no una máquina determinada. El dueño espera que la máquina dure n años y que le proporcione un flujo de rendimientos monetarios (es decir, ingresos del producto marginal) en cada uno de los n años. Diremos que R_i representa el rendimiento en el año i. Si r es la tasa de interés presente y si esperamos que esta tasa de interés prevalezca en los próximos n años, el valor presente descontado (VPD) del flujo de ingresos netos que la máquina tiene para su propietario estará determinado por

$$VPD = \frac{R_1}{1+r} + \frac{R_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1+r)^n}. \tag{17.24}$$

Este valor presente descontado representa el valor total del flujo de pagos proporcionados por la máquina, una vez que se ha tomado debida cuenta del hecho de que estos pagos se producen en distintos años. Si el VPD de este flujo de pagos excede al precio de la máquina (p) entonces la empresa debería hacer la compra, al igual que otras empresas similares. Incluso cuando se tiene en cuenta el efecto del pago de intereses que la empresa podría haber obtenido sobre sus fondos si no hubiera comprado la máquina, ésta promete un rendimiento superior a su precio actual. De otra parte, si $p > VPD$, la empresa quedaría en mejor situación si invierte sus fondos en alguna alternativa que prometa una tasa de rendimiento r. Si toma en cuenta los intereses a los que renunciará, la máquina no se pagará a sí misma. Así pues, en un mercado en competencia, el único equilibrio que puede prevalecer es aquel en el cual el precio de la máquina es igual

[8] En el apéndice de este capítulo encontrará un análisis más amplio del valor presente descontado.

al valor presente descontado de los ingresos netos provenientes de la máquina. Ésta es la única situación en la cual no habrá un exceso de demanda de máquinas ni uno de oferta de máquinas. Por consiguiente, el equilibrio del mercado exige que

$$p = VPD = \frac{R_1}{1+r} + \frac{R_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1+r)^n}. \qquad (17.25)$$

Ahora emplearemos esta condición para demostrar dos situaciones en las cuales el criterio del valor presente descontado de la inversión produce las mismas condiciones de equilibrio que describimos antes en este capítulo.

El caso simple

Supongamos primero que las máquinas tienen una vida infinita y que el ingreso del producto marginal (es decir, R_i) es el mismo cada año. Este rendimiento uniforme también será igual a la tasa de alquiler de las máquinas (v), porque esta cantidad sería la que otra empresa estaría dispuesta a pagar por usar la máquina durante un periodo cualquiera. Partiendo de estos supuestos que simplifican las cosas, podemos expresar el valor presente descontado por la propiedad de la máquina como

$$\begin{aligned} VPD &= \frac{v}{(1+r)} + \frac{v}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{v}{(1+r)^n} + \cdots \\ &= v \cdot \left(\frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^n} + \cdots \right) \\ &= v \cdot \left(\frac{1}{1 - 1/(1+r)} - 1 \right) \\ &= v \cdot \left(\frac{1+r}{r} - 1 \right) \\ &= v \cdot \frac{1}{r}. \end{aligned} \qquad (17.26)$$

Pero, en equilibrio $p = VPD$, por lo que

$$p = v \cdot \frac{1}{r} \qquad (17.27)$$

o

$$\frac{v}{p} = r, \qquad (17.28)$$

como ya habíamos demostrado en la ecuación 17.22. En este caso, el criterio del valor presente descontado produce resultados idénticos a los expuestos en la sección anterior.

El caso general

También podemos obtener la ecuación 17.21 para el caso más general en el cual la tasa de alquiler de las máquinas no es constante a lo largo del tiempo y en el cual se registra cierta depreciación. Podremos realizar este análisis si se emplea tiempo continuo. Supongamos que la tasa de alquiler de una máquina *nueva* en un momento s cualquiera está dado por $v(s)$. Supongamos también que la máquina se deprecia de manera exponencial a una tasa de d.[9] Por lo tanto, la tasa neta de alquiler y el ingreso del producto marginal de una máquina disminuirá a lo largo del

[9]En vista de esta depreciación, suponemos que las máquinas se "evaporan" a una tasa fija por unidad de tiempo. Este modelo de decadencia es, en muchos sentidos, idéntico a los supuestos de decadencia radiactiva que plantea la física. La depreciación física puede tomar otras formas y ésta es tan sólo una fácil de tratar desde el punto de vista matemático.

Es importante tener en mente que el concepto de depreciación física (la depreciación que afecta la productividad de una máquina) es diferente del de la depreciación contable. Este segundo sólo es importante porque el método contable elegido para la depreciación puede afectar la tasa fiscal aplicada al ingreso generado por una máquina. Sin embargo, desde un punto de vista económico, el costo de una máquina es un costo hundido. Toda elección sobre la forma de "cancelar" este costo es arbitraria en cierta medida.

tiempo, a medida que la máquina vaya envejeciendo. En el año s la tasa neta de alquiler de una máquina *vieja* adquirida en un año (t) anterior, sería

$$v(s)e^{-d(s-t)}, \tag{17.29}$$

puesto que $s - t$ es el número de años a lo largo de los cuales la máquina ha ido envejeciendo. Por ejemplo, supongamos que una máquina ha sido adquirida en 2000. Así, su tasa neta de alquiler en 2006 sería la tasa de alquiler obtenida de las máquinas nuevas en 2005 [$v(2005)$] descontada por el factor e^{-5d} para explicar la cantidad de depreciación que se ha producido a lo largo de los cinco años de vida de la máquina.

Si la empresa está analizando la posibilidad de comprar la máquina cuando es nueva en el año t, debería descontar todos estos alquileres netos, retrocediendo hasta esa fecha. El valor presente de la tasa neta de alquiler en el año s descontado en retroceso hasta el año t es, por tanto (si r es la tasa de interés),

$$e^{-r(s-t)}v(s)e^{-d(s-t)} = e^{(r+d)t}v(s)e^{-(r+d)s}, \tag{17.30}$$

porque, de nueva cuenta, $(s - t)$ transcurren años desde el momento en que la máquina fue comprada hasta que los alquileres netos son recibidos. Por tanto, el valor presente descontado de una máquina adquirida en el año t es la suma (integral) de estos valores presentes. Debemos hacer esta suma desde el año t (cuando la máquina es comprada) a todos los años futuros:

$$VPD(t) = \int_t^\infty e^{(r+d)t}v(s)e^{-(r+d)s}ds. \tag{17.31}$$

Utilizando el hecho de que, en equilibrio, el precio de la máquina en el año t [$p(t)$] será igual a su valor presente, tendremos la siguiente ecuación fundamental:

$$p(t) = \int_t^\infty e^{(r+d)t}v(s)e^{-(r+d)s}ds. \tag{17.32}$$

Esta ecuación bastante formidable es, sencillamente, una versión más compleja de la ecuación 17.25 y puede emplearse para obtener la ecuación 17.21. Primero volvemos a expresar la ecuación de la forma

$$p(t) = e^{(r+d)t}\int_t^\infty v(s)e^{-(r+d)s}ds. \tag{17.33}$$

Ahora, al derivar respecto a t, y emplear la regla de la derivada de un producto:

$$\begin{aligned}\frac{dp(t)}{dt} &= (r+d)e^{(r+d)t}\int_t^\infty v(s)e^{-(r+d)s}ds - e^{(r+d)t}v(t)e^{-(r+d)t} \\ &= (r+d)p(t) - v(t).\end{aligned} \tag{17.34}$$

Por lo tanto,

$$v(t) = (r+d)p(t) - \frac{dp(t)}{dt}. \tag{17.35}$$

Éste es, precisamente, el resultado que mostramos antes en la ecuación 17.21, salvo porque hemos añadido el término $-dp(t)/dt$. La explicación económica de la presencia del término que hemos añadido es que representa las ganancias de capital que se acreditan al propietario de la máquina. Por ejemplo, si cabe esperar que el precio de la máquina aumente, el propietario podría aceptar algo menos que $(r + d)p$ por su alquiler.[10] Por otra parte, si cabe esperar que el precio de la máquina vaya a disminuir [$dp(t)/dt < 0$], entonces el propietario pedirá un alquiler más alto del que especifica la ecuación 17.21. Si cabe esperar que el precio de la máquina se mantenga constante a lo largo del tiempo, entonces, $dp(t)/dt = 0$ las ecuaciones serán idénticas. Este análisis demuestra, en definitiva, que existe una relación entre el precio de una máquina en un momento cualquiera, el flujo de beneficios futuros que promete la máquina y la tasa corriente de alquiler de esa máquina.

[10] Por ejemplo, las casas de alquiler en suburbios en los cuales los precios de las casas se aprecian velozmente, normalmente, se alquilarán por un poco menos que el costo real del casero, porque éste también obtiene una ganancia por la apreciación del precio.

EJEMPLO 17.2

La tala de un árbol

Como ejemplo del criterio del valor presente descontado, consideremos el caso de un leñador que debe decidir cuándo cortar un árbol que está creciendo. Supongamos que el valor del árbol en un momento cualquiera, t, está dado por $f(t)$ (donde $f'(t) > 0$, $f''(t) < 0$), y que, inicialmente, ha invertido l dólar en forma de pago a los trabajadores que plantaron el árbol. Supongamos también que la tasa de interés de mercado (continua) está dada por r. Cuando el árbol es plantado, el valor presente descontado de las utilidades del propietario del árbol está determinado por

$$VPD(t) = e^{-rt}f(t) - l, \tag{17.36}$$

que es, sencillamente, la diferencia entre (el valor presente de) el ingreso y el costo presente. Por lo tanto, la decisión del leñador será elegir la fecha de tala, t, para maximizar este valor. Como siempre, se debe calcular este valor al derivar:

$$\frac{dVPD(t)}{dt} = e^{-rt} f'(t) - re^{-rt} f(t) = 0, \tag{17.37}$$

y, dividir ambos lados entre e^{-rt}:

$$f'(t) - rf(t) = 0; \tag{17.38}$$

por lo tanto,

$$r = \frac{f'(t)}{f(t)}. \tag{17.39}$$

Vale la pena destacar dos características de esta condición óptima. En primer término, nótese que el costo del factor trabajo inicial desaparece con la derivación. Este costo es literalmente un costo "hundido", el cual no es importante para la decisión de maximizar el beneficio. En segundo, podemos interpretar la ecuación 17.39 como si dijera que el árbol debería ser cortado cuando la tasa de interés sea igual a la tasa proporcional de crecimiento del árbol. La intuición nos dice que este resultado tiene sentido. Si el árbol está creciendo a mayor velocidad que la tasa de interés existente, su propietario debería dejar sus fondos invertidos en el árbol, porque el árbol ofrece el mejor rendimiento disponible. Por otra parte, si el árbol crece a menor velocidad que la tasa de interés existente, debería cortar el árbol y utilizar el fondo que obtendría de su venta para invertirlo en otra parte a una tasa r.

La ecuación 17.39 sólo es una condición necesaria para alcanzar un máximo. Si derivamos la ecuación 17.38 de nueva cuenta, fácilmente se verá que también es necesario que, al valor elegido de t,

$$f''(t) - rf'(t) < 0, \tag{17.40}$$

para que las condiciones de primer orden representen un verdadero máximo. Dado que hemos supuesto que $f'(t) > 0$ (el árbol siempre está creciendo) y $f''(t) < 0$ (el crecimiento se desacelera con el tiempo), es evidente que se cumple esta condición.

Una ilustración numérica. Supongamos que los árboles crecen según la ecuación

$$f(t) = e^{0.4\sqrt{t}}. \tag{17.41}$$

Esta ecuación siempre tiene una tasa de crecimiento positiva $[f'(t) > 0]$ y

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{0.2}{\sqrt{t}}, \tag{17.42}$$

(*continúa*)

EJEMPLO 17.2 *CONTINUACIÓN*

la tasa proporcional de crecimiento del árbol disminuye a lo largo del tiempo. Si la tasa de interés real fuera, por ejemplo, 0.04, entonces podremos calcular la edad óptima para talarlo como

$$r = 0.04 = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{0.2}{\sqrt{t}} \tag{17.43}$$

o

$$\sqrt{t} = \frac{0.2}{0.04} = 5$$

por lo que

$$t^* = 25. \tag{17.44}$$

Hasta una edad de 25 años, el volumen de madera del árbol aumenta a una tasa superior al 4% anual, por lo cual la decisión óptima será mantener el árbol en pie. Sin embargo, en el caso de $t > 25$, la tasa de crecimiento anual disminuye por debajo del 4% y el leñador puede encontrar mejores inversiones; tal vez plantar árboles nuevos.

Una variación en la tasa de interés. Si la tasa de interés real aumenta hasta el 5%, la ecuación 17.43 pasaría a ser

$$r = 0.05 = \frac{0.2}{\sqrt{t}}, \tag{17.45}$$

y la edad óptima para talar el árbol sería

$$t^* = \left(\frac{0.2}{0.05}\right)^2 = 16. \tag{17.46}$$

La tasa de interés real más alta desincentiva la inversión en árboles, por lo que sugiere al leñador elegir una edad más temprana para la tala.[11]

Pregunta: Supongamos que todos los precios, inclusive los de los árboles, están aumentando al 10% anual. En este problema, ¿esto cómo cambiaría el resultado de la edad óptima para talarlos?

Asignación óptima de los recursos a lo largo del tiempo

La teoría del capital se ocupa fundamentalmente de la asignación de los recursos a lo largo del tiempo. Tanto las empresas como los individuos tienen motivos para guardar, en forma de acumulación de capital, una parte de la producción corriente con el propósito de producir más en periodos futuros. Muchos problemas económicos se enmarcan dentro de este tipo general; es decir, los agentes económicos deben decidir si aumentan o disminuyen el acervo y esas decisiones afectarán el bienestar corriente y el futuro. En esta sección se analizará cuál sería la forma óptima de tomar estas decisiones, es decir, para maximizar la utilidad.

[11]Encontrará más sobre economía relacionada con la tala en los problemas 17.4 y 17.5.

Un modelo matemático con control óptimo

El problema de asignar recursos a lo largo del tiempo tiene dos variables de interés primordial: el acervo que designaremos (k) y una variable de "control" (c) que se empleará para aplicar incrementos o reducciones a k. En este análisis, pensar que k es el acervo de capital y que c representa la tasa de ahorro o la inversión neta total puede ser de gran ayuda, pero en economía se pueden presentar otras muchas interpretaciones. Dado que estas variables tendrán, evidentemente, distintos valores en distintos periodos, debemos expresarlas en función del tiempo [$k(t)$ y $c(t)$]. Sin embargo, para la mayor parte de nuestro desarrollo será conveniente no mostrar de manera explícita esta dependencia funcional del tiempo.

Las elecciones de k y c producirán utilidad a lo largo del tiempo a los agentes económicos implicados. Denotaremos con $U(k, c, t)$ esta utilidad en un momento del tiempo. El objetivo de los agentes consiste en maximizar

$$\int_0^T U(k, c, t)dt, \tag{17.47}$$

donde T indica el periodo en el cual toman las decisiones.

En los problemas de la teoría del control hay dos tipos de restricciones. La primera muestra las reglas que rigen los cambios de k a lo largo del tiempo:

$$\frac{dk}{dt} = f(k, c, t). \tag{17.48}$$

En este caso, la notación indica que los cambios de k dependerán del nivel de la variable misma, de las decisiones relativas a la variable de control (c), y (posiblemente) del punto concreto del tiempo que estemos observando. Para evitar una notación engorrosa, adoptaremos la convención de denotar la derivada del tiempo de una variable, x, cualquiera como $\dot{x}$. Por lo tanto, se expresará la restricción dada en la ecuación 17.48 como

$$\frac{dk}{dt} = \dot{k} = f(k, c, t). \tag{17.49}$$

Otro tipo de restricción en este problema de maximización es el que se refiere a la condición inicial y terminal que especifiquemos para el acervo k. Al principio del problema, k se presentará como parte de los datos históricos que no es posible modificar y al final del periodo planificado podremos fijar otro tipo de condición para k (por ejemplo, que k sea igual a cero). Se expresarán estas restricciones del punto final como

$$\begin{aligned} k(0) &= k_0 \\ k(T) &= k_T, \end{aligned} \tag{17.50}$$

donde el valor particular de las restricciones k_0 y k_T dependerá de la naturaleza del problema que estemos analizando.

El principio del máximo: un planteamiento intuitivo

El problema de optimización dinámica que hemos descrito exige que encontremos una trayectoria óptima de tiempo para las variables k y c. Este problema es considerablemente más complejo que otros de maximización analizados en este libro, en los cuales teníamos que encontrar un punto óptimo único y no toda una trayectoria de puntos en el tiempo. Una estrategia para encontrar una solución consiste en transformar el problema dinámico a uno de un "periodo único" y, a continuación, demostrar que la solución de ese problema simplificado, para un punto aleatorio de tiempo, también resuelve el problema dinámico.

Para transformar un problema dinámico en un problema de un periodo único, empezamos por reconocer que toda decisión corriente respecto a cómo debemos cambiar el acervo de k afectará el bienestar corriente y futuro. Una elección óptima que emplea a c para efectuar cambios corrientes en k ahora debería equilibrar los costos corrientes de cambiar k con la utilidad futura de cambiar k y viceversa. Para ayudarnos en este proceso de equilibrio, se introduce un multiplicador lagrangiano, $\lambda(t)$, que podemos interpretar como el cambio marginal de la utilidad futura que genera el cambio de una unidad de k. Por tanto, $\lambda(t)$ es una medida del valor (marginal) del acervo k en el tiempo corriente t. Esa variable, al igual que en los otros problemas de maximización que hemos visto, permite encontrar una solución que equilibra la utilidad y el costo de las decisiones corrientes.

Una vez que hemos transformado el problema dinámico en uno de un periodo único, nos restará reformular la solución en un contexto dinámico. Esta reformulación consiste en demostrar cómo $\lambda(t)$ debería cambiar a lo largo del tiempo de modo que 1) los cambios de k se sigan produciendo de forma óptima y 2) que garantice que la condición inicial y la terminal de k (ecuación 17.50) se cumplen. Así, esta solución final proporcionará una trayectoria de tiempo de valores de c y k que maximiza la integral dada en la ecuación 17.47. Una característica adicional es que la solución óptima también proporcionará una trayectoria en el tiempo del multiplicador λ la cual mostrará cómo varía el valor marginal de k (es decir, su precio) a lo largo del tiempo.

Un análisis matemático

A efecto de proceder de manera formal tal como hemos descrito en la sección anterior, introducimos el multiplicador $\lambda(t)$ como una medida del valor marginal del acervo k en un momento cualquiera. El valor total del acervo está dado por $\lambda(t)k$, y la tasa de variación de este valor (es decir, el valor de la ganancia o pérdida que registra el acervo de capital) está determinada por

$$\frac{d\lambda(t)k}{dt} = \lambda\frac{dk}{dt} + k\frac{d\lambda}{dt} = \lambda\dot{k} + k\dot{\lambda}, \tag{17.51}$$

Por tanto, el valor neto total de la utilidad en un momento cualquiera (inclusive todo efecto que los cambios corrientes de $\dot{k}$ pudieran tener; es decir, lo que permite que este problema de un periodo único represente muchos periodos) está determinado por

$$H = U(k, c, t) + \lambda\dot{k} + k\dot{\lambda}, \tag{17.52}$$

donde hemos denominado esta expresión con "*H*" para indicar su similitud con la función "hamiltoniana" que encontramos en la teoría formal de la optimización dinámica.[12] En cierto sentido, la función H es similar a la expresión lagrangiana que hemos empleado en repetidas ocasiones para resolver problemas de maximización en otras partes de este libro.

La condición de primer orden para elegir la c que maximice H es

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{\partial U(k, c, t)}{dc} + \lambda\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = 0, \tag{17.53}$$

porque λ y k (a diferencia de $\dot{k}$) no dependen del valor corriente de c. Si volvemos a expresar esta primera condición para obtener el óptimo tendremos

$$\frac{\partial U}{\partial c} = -\lambda\frac{\partial \dot{k}}{\partial c}. \tag{17.54}$$

En palabras diríamos que, para que la elección de c sea óptima, es necesario que el incremento marginal de U derivado de un incremento de c quede perfectamente compensado por la reducción del cambio del acervo de k que ocasiona dicho incremento de c (donde λ evalúa estos cambios en el margen).

Una vez elegida c para maximizar la utilidad para un periodo único, tendremos que concentrarnos en cómo debe cambiar el valor marginal de k (es decir, λ) a lo largo del tiempo. Para ello, podemos preguntarnos cuál nivel de k maximizaría H. Por supuesto que, en la realidad k

[12]La función hamiltoniana habitual omite el término final de la ecuación 17.52. Véase la bibliografía al final de este capítulo.

no es una variable que podamos elegir en un momento cualquiera; es decir, su valor está determinado por el historial pasado. Sin embargo, si "fingimos" que k se encuentra en su valor óptimo, podremos inferir qué comportamiento debe observar λ. La derivada de H respecto de k da lugar a

$$\frac{\partial H}{\partial k} = \frac{\partial U}{\partial k} + \lambda \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} + \dot{\lambda} = 0 \tag{17.55}$$

como condición de primer orden para obtener un máximo. Si se reordenan los términos de la ecuación tendremos

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial U}{\partial k} + \lambda \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}. \tag{17.56}$$

Podemos interpretar que esta expresión señala que toda reducción del valor marginal de k debe ser igual a la productividad neta de k cuando aumenta U o aumenta $\dot{k}$. El valor de k debe ir cambiando en forma opuesta a la que la propia k afecta la suma de la utilidad presente y futura.

Si unimos estas dos condiciones del óptimo se obtendrá

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial c} &= \frac{\partial U}{\partial c} + \lambda \frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial k} &= \frac{\partial U}{\partial k} + \lambda \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} + \dot{\lambda} = 0. \end{aligned} \tag{17.57}$$

Estas condiciones muestran cómo deben evolucionar c y λ a lo largo del tiempo de modo que k se mantenga en su trayectoria óptima.[13] Una vez que el sistema de ecuaciones empieza a funcionar, la trayectoria completa en el tiempo de las variables relevantes queda determinada. Para presentar una solución completa, también tendremos que asegurarnos que la trayectoria de k es "factible", en el sentido de que cumple la condición inicial o terminal de la ecuación 17.50. Normalmente, podemos lograr lo anterior al ajustar los valores iniciales de c y λ a determinados niveles adecuados. El ejemplo siguiente muestra cómo podemos hacerlo.

Recursos agotables

La preocupación por el aumento en los precios de la energía en la década de 1970 hizo que los economistas volvieran a analizar la teoría del uso óptimo del acervo de los recursos naturales. Dado que el tema implica, por necesidad, el análisis del patrón óptimo de tiempo para un acervo fijo de un recurso (por ejemplo, el petróleo, el carbón o el hierro) que se agotará, podemos estudiarlo empleando los instrumentos de la teoría del control óptimo que acabamos de desarrollar.[14]

Supongamos que la función de demanda (inversa) del recurso en cuestión está determinada por

$$p = p(c), \tag{17.58}$$

donde p es el precio de mercado y c es la cantidad consumida durante un periodo. Para un nivel de producción c, la utilidad total derivada del consumo está determinada por

$$U(c) = \int_0^c p(x)dx. \tag{17.59}$$

(*continúa*)

[13]Éstas son tan sólo las condiciones de primer orden para obtener un máximo. Aquí no vamos a analizar las condiciones de segundo orden.

[14]El modelo que hemos desarrollado aquí se puede generalizar fácilmente al caso de los recursos renovables como la madera o el pescado.

EJEMPLO 17.3 *CONTINUACIÓN*

Si la tasa de preferencia del tiempo está dada por r, el patrón óptimo de uso del recurso será aquel que maximice

$$\int_0^T e^{-rt}U(c)dt. \tag{17.60}$$

De nueva cuenta, las restricciones de este problema son de dos tipos. En primer término, dado que el acervo del recurso es fijo, el nivel de consumo reduce dicho acervo en cada periodo:

$$\dot{k} = -c. \tag{17.61}$$

Además de esta regla para los cambios de k, el acervo de recursos también debe cumplir la restricción inicial y la terminal

$$k(0) = k_0$$

y

$$k(T) = k_T. \tag{17.62}$$

Normalmente, el acervo inicial, k_0, representará la cantidad de "reservas conocidas" corrientes del recurso, mientras que el acervo final, k_T, será nulo, suponiendo que los recursos que quedan en el suelo no tienen valor.

Si se establece la función hamiltoniana,

$$\begin{aligned} H &= e^{-rt}(U) + \lambda\dot{k} + \dot{\lambda}k \\ &= e^{-rt}(U) - \lambda c + \dot{\lambda}k, \end{aligned} \tag{17.63}$$

tendremos las siguientes condiciones de primer orden para obtener un máximo:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-rt}\frac{\partial U}{\partial c} - \lambda = 0 \tag{17.64}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = \dot{\lambda} = 0. \tag{17.63}$$

En este problema, la segunda ecuación ilustra el importante resultado de que el precio sombra del recurso (λ) se debe mantener constante a lo largo del tiempo. Dado que estamos distribuyendo un acervo fijo, podríamos mejorar, en términos de que proporcione más utilidad, toda trayectoria en la cual el recurso haya tenido un precio sombra superior en un periodo que en otro si se reduce el consumo en el periodo en el cual el precio sombra es alto y se aumenta el consumo en el periodo en el cual dicho precio sombra es bajo.[15]

Trayectoria óptima del precio. Para interpretar esta primera condición podemos emplear la ecuación 17.59 para demostrar que

$$\frac{\partial U}{\partial c} = p(c). \tag{17.66}$$

Esta condición es muy similar a las condiciones de la mayor parte de los modelos de maximización de la utilidad de la parte 2. Al sustituir esto en la ecuación 17.64,

$$e^{-rt}p(c) = \lambda. \tag{17.67}$$

[15]Uno de los primeros autores que reconoció este punto fundamental fue H. Hotelling, en su artículo pionero. "The Economics of Exhaustible Resources", *Journal of Political Economy 39*, abril de 1931, pp. 137-175.

Dado que sabemos, con base en el análisis anterior, que λ debe ser constante, esta ecuación exige que elijamos una trayectoria para c de modo que el precio de mercado aumente a una tasa r por periodo. Éste es precisamente el tipo de solución que surgiría en un mercado en competencia. Para que un recurso ofrezca una inversión que esté en equilibrio con otras alternativas, su precio debe aumentar al mismo ritmo que la tasa de interés. Todo ritmo más lento de incremento del precio hará que los inversionistas coloquen sus fondos en alguna forma alternativa de capital, mientras que todo ritmo más veloz atraería todos los fondos disponibles hacia inversiones en el recurso. Por tanto, este resultado sugiere que, cuando menos en este caso simple, los mercados en competencia asignarán los recursos naturales de forma eficiente a lo largo del tiempo.

Una ilustración numérica. En el caso de los recursos naturales, podemos resolver las restricciones del periodo final si analizamos aquellas que se relacionan con el acervo final del recurso. Para que el acervo del recurso se agote totalmente, es necesario que el precio en el periodo final, $p(T)$, sea tal que la demanda llegue a cero a ese precio. En la mayor parte de las aplicaciones, podemos determinar este precio fijándolo en un punto lo bastante alto como para que los sustitutos del recurso en cuestión dominen totalmente el mercado. Por ejemplo, si supiéramos que la energía solar sustituirá en su totalidad las fuentes de energía del petróleo en el año 2038 si el petróleo en ese año se vende a más de \$50 por barril, entonces \$50 sería el precio terminal. Empleando este precio y la ecuación 17.67, podemos calcular la trayectoria completa en el tiempo de los precios [inclusive el precio inicial $p(0)$]. Con un tasa de interés real del 3%, el precio de equilibrio en 2005 sería de $\$50 \cdot e^{-0.03(33)} = \$18.58$.

Cabe señalar un último aspecto de este problema de los precios de los recursos. A lo largo del mismo, hemos supuesto que los costos de extracción son nulos, pero no debemos pensar que eso implica que el uso de los recursos en sí "no cuesta nada". El consumo corriente de los recursos implica un menor consumo futuro, y este costo no es menos real que lo que serían los costos de producción. Algunos autores se refieren a los costos de esta naturaleza (los relacionados con la naturaleza fija del acervo del recurso) como "costos de uso" o "costos de escasez". El precio sombra del acervo del recurso, λ, es el idóneo para medir los costos.

Pregunta: Supongamos que la extracción de petróleo cuesta mucho. ¿Esto cómo cambiaría los cálculos que hemos hecho en este caso?

RESUMEN

En este capítulo se han analizado diversos aspectos de la teoría del capital, con especial énfasis en integrar esa teoría con la teoría de la demanda de capital por parte de la empresa. Algunos de los resultados obtenidos son:

- La acumulación del capital significa que se debe sacrificar consumo presente para obtener consumo futuro. La tasa de rendimiento mide los términos que sirven para realizar este intercambio.

- Fijamos la tasa de rendimiento mediante mecanismos muy similares a los que utilizamos para fijar un precio de equilibrio cualquiera. La tasa de rendimiento de equilibrio será positiva y reflejará las preferencias relativas de los individuos por bienes presentes en lugar de por los bienes futuros, así como la productividad física positiva de la acumulación de capital.

- La tasa de rendimiento o tasa de interés real es un elemento importante de los costos asociados a la posesión de capital. Es un determinante importante del precio de alquiler del capital en el mercado, v.

- Debemos descontar el rendimiento futuro de la inversión en capital a la tasa de interés real existente. Emplear este concepto de valor presente ofrece una ruta alternativa para abordar el estudio de las decisiones de inversión de la empresa.
- Podemos estudiar la acumulación de capital, y otros problemas dinámicos, empleando técnicas de la teoría de control óptimo. Con frecuencia, estos modelos dan lugar a resultados análogos a los de competencia perfecta.

PROBLEMAS

17.1

Un individuo tiene una riqueza fija (W) que asignará al consumo de dos periodos (c_1 y c_2). La función de utilidad del individuo está determinada por

$$U(c_1, c_2),$$

y la restricción presupuestaria es

$$W = c_1 + \frac{c_2}{1+r},$$

donde r es la tasa de interés para un periodo.

a. Demuestre que, para poder maximizar la utilidad, dada esta restricción presupuestaria, el individuo debe elegir c_1 y c_2 de modo que la *TMS* (de c_1 por c_2) sea igual a $1 + r$.

b. Demuestre que $\partial c_2/\partial r \geq 0$ pero que el signo de $\partial c_1/\partial r$ es ambiguo. Si $\partial c_1/\partial r$ es negativa, ¿qué puede concluir sobre la elasticidad-precio de la demanda de c_2?

c. ¿Cómo se modificarían sus conclusiones del inciso b si el individuo recibiera ingresos en cada periodo (y_1 y y_2) de modo que la restricción presupuestaria esté determinada por

$$y_1 - c_1 + \frac{y_2 - c_2}{1+r} = 0?$$

17.2

Supongamos que un individuo espera trabajar durante 40 años y que después se jubilará, teniendo una esperanza de vida de 20 años más. Supongamos también que las percepciones del individuo aumentan a una tasa del 3% anual y que la tasa de interés también es del 3% (en este problema, el nivel general de precios es constante). ¿Qué proporción (constante) del ingreso debe ahorrar el individuo cada año de su vida laboral para poder financiar un nivel de ingresos de jubilación igual al 60% de las percepciones del año anterior a su jubilación?

17.3

A medida que envejece el whisky escocés aumenta su valor. Un dólar de whisky en el año 0 vale $V(t) = e^{2\sqrt{t} - 0.15t}$ dólares en el momento t. Si la tasa de interés es del 5%, ¿cuántos años tendrán que pasar para que la persona pueda vender el whisky de forma que se maximice el *VPD* de esta venta?

17.4

Al igual que en el ejemplo 17.2, supongamos que se producen árboles aplicando una unidad de trabajo en el momento 0. El valor de la madera de un árbol en un momento cualquiera (t) está dado por $f(t)$. Si el salario de mercado es w y la tasa de interés real es r, ¿cuál es el *VPD* de este proceso de producción y cómo debemos elegir t para maximizar este *VPD*?

a. Si el valor óptimo de t está dado por t^*, demuestre que la condición de que no haya utilidades puras en la competencia perfecta requiere que

$$w = e^{-rt} f(t^*).$$

¿Puede explicar el significado de esta expresión?

b. Un árbol que se venda antes de t^* no será talado de inmediato. Por el contrario, seguirá teniendo sentido que el nuevo propietario deje que el árbol siga creciendo hasta t^*. Demuestre que el precio de un árbol con u años de edad será we^{ru} y que este precio excederá al valor de la madera del árbol $[f(u)]$ para cada valor de u excepto cuando $u = t^*$, en cuyo caso los dos valores son iguales.

c. Supongamos que el terrateniente tiene un bosque "equilibrado", con un árbol de "cada" edad desde 0 hasta t^*. ¿Cuál es el valor de este bosque? (*Pista:* es la suma de los valores de todos los árboles del bosque.)

d. Si el valor del bosque es V, demuestre que el interés instantáneo sobre V (es decir, $r \cdot V$) es igual a las "ganancias" obtenidas cada instante por el propietario, donde ganancias se entiende como la diferencia entre los ingresos obtenidos de la venta de un árbol totalmente maduro $[f(t^*)]$ y el costo de plantar otro árbol (w). Este resultado demuestra que no hay utilidad pura si solicitamos un préstamo para comprar un bosque, porque tendríamos que pagar por concepto de intereses, en cada momento, exactamente lo mismo que ganaríamos por talar un árbol totalmente maduro.

17.5

Los cálculos del problema 17.4 suponen que no hay diferencia entre la decisión de cortar un único árbol y la administración del bosque. Sin embargo, administrar el bosque también exige una reforestación, que debemos modelar de manera explícita. Para ello, supongamos que el propietario de un bosque está analizando la posibilidad de plantar un único árbol a un costo w, talarlo en t^*, plantar otro árbol y, así, indefinidamente. Así, el flujo de utilidades descontadas de esta actividad será

$$V = -w + e^{-rt}[f(t) - w] + e^{-r2t}[f(t) - w] \ldots$$
$$e^{-rnt}[f(t) - w] + \ldots$$

a. Demuestre que el valor total de esta actividad de tala planificada está determinado por

$$V = \frac{f(t) - w}{e^{rt} - 1} - w.$$

b. Encuentre el valor de t que maximiza V. Demuestre que este valor resuelve la ecuación

$$f'(t^*) = rf(t^*) + rV(t^*).$$

c. Interprete el resultado del inciso b; ¿cómo refleja el uso óptimo del "factor" tiempo? ¿El valor de t^* calculado en el inciso anterior por qué difiere del valor calculado en el ejemplo 17.2?

d. Supongamos que el crecimiento del árbol (medido en dólares constantes) sigue la función logística

$$f(t) = 50/(1 + e^{10 - 0.1t}).$$

¿Cuál es el valor máximo de la madera disponible de este árbol?

e. Si el crecimiento del árbol se caracteriza por la ecuación dada en el inciso d, ¿cuál será el periodo óptimo de rotación si $r = 0.05$, $w = 0$? ¿Este periodo produce un rendimiento "máximo sostenible"?

f. ¿Cómo cambiaría el periodo óptimo si r disminuyera a 0.04?

(*Nota:* la ecuación obtenida en el inciso b se conoce como la ecuación de Faustmann en la economía de la silvicultura.)

17.6

Este problema se centra en la interacción entre los impuestos de las empresas y las decisiones de inversión de éstas.

a. Supongamos (a diferencia de lo que ocurre en realidad) que, para efectos fiscales, las utilidades se definieran como lo que hemos denominado utilidad económica pura. ¿Un impuesto sobre estas utilidades cómo afectaría las decisiones de inversión?

b. De hecho, para efectos fiscales, las utilidades se definen como

$$\pi' = pq - wl - \textbf{depreciación},$$

donde la depreciación está determinada por directrices del gobierno y de la industria que buscan asignar los costos de una máquina a lo largo de su vida "útil". Si la depreciación fuera igual a la tasa de deterioro físico real, y si una empresa se encontrara en el equilibrio competitivo a largo plazo, ¿un impuesto sobre π' cómo afectaría el factor capital que elija la empresa?

c. En las condiciones del inciso b, ¿la adopción de una política de "depreciación acelerada", que especifica tasas de depreciación que exceden al deterioro físico al principio de la vida de la máquina, pero tasas de depreciación mucho más bajas a medida que la máquina envejece, cómo afectaría el uso de capital?

d. En las condiciones del apartado anterior, ¿una reducción del impuesto sobre las utilidades de las empresas cómo afectaría el uso de capital?

17.7

Se cuenta que un activo vendedor de seguros de vida planteó el argumento siguiente: "A su edad, una póliza de seguro de vida vitalicio, de \$100 000, es una compra mucho mejor que una póliza temporal. En el caso de la póliza del seguro vitalicio tendrá que pagar \$2000 por año los primeros cuatro años, pero nada más durante el resto de su vida. Una póliza temporal le costará \$400 anuales durante toda su vida. Si vive 35 años, sólo pagará \$8000 por el seguro vitalicio, pero \$14 000 (= \$400 · 35) por una póliza temporal. Sin duda, la póliza de un seguro de vida vitalicio es mucho mejor".

Suponiendo que el supuesto del vendedor sobre las expectativas de vida es correcto, ¿cómo evaluaría usted su argumentación? En concreto, calcule el valor presente descontado de los costos de la prima de las dos pólizas, suponiendo que la tasa de interés es del 10 por ciento.

17.8

Supongamos que un individuo dispone de W dólares para asignarlos al consumo de este periodo (c_0) y al consumo del periodo siguiente (c_1) y que la tasa de interés está dada por r.

a. Elabore una gráfica del equilibrio inicial del individuo e indique el valor total del ahorro del periodo corriente ($W - c_0$).

b. Supongamos que, una vez que el individuo ha tomado su decisión de ahorrar (comprando bonos de un periodo), la tasa de interés disminuye a r'. ¿Esto cómo cambiará la restricción presupuestaria del individuo? Muestre la nueva posición que maximiza la utilidad. Explique cómo podemos interpretar la mejor posición del individuo que resulta de la "ganancia de capital" de su compra inicial del bono.

c. Supongamos que las autoridades fiscales quieren aplicar un impuesto sobre el "ingreso" en función de las ganancias de capital. Si valoramos todas las ganancias de capital en función de c_0 conforme se "devengan", muestre cómo deberíamos calcular dichas ganancias de capital. Denomine este valor G_1.

d. Supongamos, por el contrario, que medimos las ganancias de capital cuando se "realizan"; es decir, las ganancias de capital se definen de modo que sólo incluyen la proporción del bono que se recauda para comprar c_0 adicional. Muestre cómo podemos medir estas ganancias de capital realizadas. Denomine este valor G_2.

e. Desarrolle una medida del verdadero incremento de la utilidad que se deriva de una disminución de r, medida en función de c_0. Denomine esta "verdadera" ganancia de capital G_3. Demuestre que $G_3 < G_2 < G_1$. ¿Qué puede concluir respecto a la política fiscal que sólo grava las ganancias realizadas?

(*Nota:* este problema ha sido adaptado de J. Whalley. "Capital Gains Taxation and Interest Rate Changes", *National Tax Journal*, marzo de 1979, pp. 87-91.)

17.9

En el ejemplo 17.3 supusimos que el petróleo era producido en un mercado en competencia. Suponiendo las demás condiciones del ejemplo, ¿cómo cambiaría el uso óptimo del recurso si todo el petróleo fuera propiedad de una única empresa monopolista?

17.10

Podemos emplear la teoría del control óptimo para generalizar el modelo de la elección de consumo intertemporal del ejemplo 17.1. Consideremos el siguiente modelo simple del ciclo de vida: un individuo recibe un salario (w) cada periodo, y un rendimiento sobre su capital invertido. Sea k = capital, r = tasa de interés del mercado al que el individuo puede prestar dinero o tomarlo a préstamo. En cada periodo, el individuo opta por consumir (c) para maximizar

$$\int_0^T U(c)e^{-\rho t}dt,$$

donde ρ es la tasa de preferencia temporal del individuo. Dados estos supuestos, la restricción presupuestaria intertemporal de este problema es

$$\dot{k} = w + rk - c$$

con restricciones sobre k inicial y final de la forma $k(0) = k(T) = 0$.

a. En este problema, ¿cuáles son las condiciones necesarias para alcanzar un máximo?

b. ¿En qué condiciones aumentará el consumo óptimo a lo largo del tiempo? ¿Cuándo disminuirá el consumo a lo largo del tiempo?

c. Supongamos que $U(c) = \ln(c)$, ¿cuál es el patrón óptimo de consumo?

d. De forma más general, supongamos que

$$U(c) = \frac{c^\delta}{\delta} \quad \delta < 1.$$

¿Cuál es el patrón de tiempo óptimo para el consumo? ¿Qué ocurre si lo comparamos con el caso especial del inciso c?

e. En este problema, el patrón óptimo de tiempo, ¿cómo determina la riqueza medida del individuo en distintos puntos del ciclo de vida?

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Blaug, M. *Economic Theory in Retrospect,* edición revisada, Richard D. Irwin, Homewood, IL, 1978, cap. 12.

Una buena reseña de una teoría austriaca del capital y de los intentos por conceptuar el proceso de acumulación de capital.

Dixit, A. K. *Optimization in Economic Theory,* 2a. ed., Oxford University Press, Nueva York, 1990.

Amplio tratamiento de la teoría del control óptimo con un formato relativamente fácil de seguir.

Dorfman, R. "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory", *American Economic Review 59*, diciembre de 1969, pp. 817-831.

Utiliza el planteamiento de este capítulo para estudiar la acumulación óptima de capital. Estupenda introducción intuitiva.

Hotelling, H. "The Economics of Exhaustible Resources", *Journal of Political Economy 39*, abril de 1931, pp. 137-175.

Obra fundamental sobre la asignación de recursos naturales. Analiza casos de competencia perfecta y de monopolio.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory,* Oxford University Press, Oxford, 1995.

El capítulo 20 cubre ampliamente cuestiones de la definición del equilibrio a lo largo del tiempo. La explicación de los modelos de "generaciones que se traslapan" es especialmente útil.

Ramsey, F. P. "A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal 38*, diciembre de 1928, pp. 542-559.

Una de las primeras aplicaciones del cálculo de las variaciones para resolver problemas económicos.

Solow, R. M. *Capital Theory and the Rate of Return*, North-Holland, Amsterdam, 1964.

Ponencias sobre la naturaleza del capital. Muy agradable de leer.

Sydsaeter, K., A. Strom y P. Berck. *Economists' Mathematical Manual,* 3a. ed., Pringer-Verlag, Berlín, 2000.

El capítulo 27 proporciona una serie de fórmulas que son valiosas para la teoría de las finanzas y del crecimiento.

Apéndice

LAS MATEMÁTICAS DEL INTERÉS COMPUESTO

El objetivo de este apéndice es reunir algunos resultados sencillos de las matemáticas del interés compuesto. Podemos aplicar resultados a una amplia variedad de problemas económicos, que van desde la política macroeconómica hasta la forma óptima de cultivar árboles de Navidad.

Suponemos que, en el mercado, prevalece una tasa de interés actual de i por periodo, por decir, un año. Además, suponemos que esta tasa de interés será cierta y constante para todos los periodos futuros.[1] Si invertimos \$1 a esta tasa, i, y después calculamos el interés compuesto (es decir, el pago de los intereses futuros se calcula sobre los intereses devengados antes de éste), al final de un periodo \$1 será

$$\$1 \times (1 + i),$$

al final de dos periodos \$1 será

$$\$1 \times (1 + i) \times (1 + i) = \$1 \times (1 + i)^2,$$

y al final de n periodos \$1 será

$$\$1 \times (1 + i)^n.$$

De otra parte, $\$N$ aumentarán como

$$\$N \times (1 + i)^n$$

[1]Es evidente que el supuesto de un i constante no es realista. Dado que los problemas que se plantean considerando una tasa de interés que varía en todos los periodos complica mucho la notación, sin añadir una medida considerable de conocimientos conceptuales, aquí no se efectuará tal análisis. En muchos casos, la generalización al caso de una tasa de interés variable es tan sólo una aplicación trivial del concepto de que toda tasa de interés en múltiples periodos se puede considerar como el resultado compuesto de varias tasas de interés de varios periodos únicos. Si r_{ij} es la tasa de interés que prevalece entre los periodos i y j (donde $i < j$), entonces,

$$1 + r_{ij} = (1 + r_{i,i+1}) + (1 + r_{i+1,i+2}) \ . \ . \ . \ (1 + r_{j-1,j}).$$

Valor presente descontado

El *valor presente* de $1 pagadero dentro de un periodo contado a partir de hoy es

$$\frac{\$1}{(1+i)}.$$

Esta cantidad es, simplemente, la que un individuo estaría dispuesto a pagar hoy a cambio de la promesa de obtener $1 al final de un periodo. De otra parte, el valor presente de $1 pagadero dentro de n periodos contados a partir de hoy es

$$\frac{\$1}{(1+i)^n},$$

y el valor presente de $\$N$ pagaderos en n periodos contados a partir de hoy es

$$\frac{\$N}{(1+i)^n}.$$

El *valor presente descontado de un flujo* de pagos $N_0, N_1, N_2, \ldots, N_n$ (donde los subíndices indican el periodo en el cual se realizará el pago) es

$$VPD = N_0 + \frac{N_1}{(1+i)} + \frac{N_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{N_n}{(1+i)^n}. \qquad \mathbf{(17A.1)}$$

El VPD es la cantidad que un individuo estaría dispuesto a pagar a cambio de la promesa de recibir el flujo $N_0, N_1, N_2, \ldots, N_n$. Éste representa la cantidad que tendría que invertir hoy si quisiera duplicar el flujo de pagos.

Anualidades y perpetuidades

Una *anualidad* es la promesa de que se pagarán $\$N$ en cada uno de n periodos, a partir del siguiente. El VPD de un contrato así sería

$$VPD = \frac{N}{(1+i)} + \frac{N}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{N}{(1+i)^n}. \qquad \mathbf{(17A.2)}$$

Si $\delta = 1/(1+i)$; entonces,

$$\begin{aligned} VPD &= N(\delta + \delta^2 + \cdots + \delta^n) \\ &= N\delta(1 + \delta + \delta^2 + \cdots + \delta^{n-1}) \\ &= N\delta\left(\frac{1-\delta^n}{1-\delta}\right). \end{aligned} \qquad \mathbf{(17A.3)}$$

Nótese que

$$\lim_{n\to\infty} \delta^n = 0.$$

Por tanto, para una anualidad de duración infinita,

$$VPD \text{ de una anualidad infinita} = \lim_{n\to\infty} VPD = N\delta\left(\frac{1}{1-\delta}\right), \qquad \mathbf{(17A.4)}$$

que, por la definición de δ,

$$
\begin{aligned}
&= N\left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1}{1-1/(1+i)}\right) \\
&= N\left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1+i}{i}\right) = \frac{N}{i}.
\end{aligned}
\quad \textbf{(17A.5)}
$$

Con frecuencia, este caso de una anualidad en periodos infinitos se conoce como *perpetuidad*. La fórmula simplemente expresa que la cantidad que se debe invertir para obtener $\$N$ por periodo, eternamente, es $\$N/i$, porque esta cantidad de dinero generará $\$N$ intereses en cada periodo ($i \cdot \$N/i = \$N$).

El caso especial de un bono

Un *bono* a n periodos es la promesa de que se pagarán $\$N$ cada periodo, a partir del siguiente, durante n periodos. También promete devolver el valor principal (nominal) del bono al término de los n periodos. Si el valor principal del bono es $\$P$ (generalmente, \$1000 en el mercado de bonos de Estados Unidos), el valor presente descontado de esta promesa será

$$
VPD = \frac{N}{(1+i)} + \frac{N}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{N}{(1+i)^n} + \frac{P}{(1+i)^n}. \quad \textbf{(17A.6)}
$$

De nueva cuenta, si $\delta = 1/(1+i)$; entonces,

$$
VPD = N\delta + N\delta^2 + \cdots + (N+P)\delta^n. \quad \textbf{(17A.7)}
$$

Existe la posibilidad de adoptar otra perspectiva ante la ecuación 17A.7. Supongamos que conocemos el precio de intercambio del bono en el presente, por ejemplo, B. En tal caso, podríamos preguntarnos cuál valor de i hace que el *VPD* del bono sea igual a B. Para encontrar este i hacemos que

$$
B = VPD = N\delta + N\delta^2 + \cdots + (N+P)\delta^n. \quad \textbf{(17A.8)}
$$

Dado que conocemos el valor de B, N y P podemos resolver esta ecuación para δ y, por tanto, para i.[2] Decimos que este i que resuelve la ecuación es el producto del bono y es la mejor medida del rendimiento real que se obtiene de él. El producto del bono representa un rendimiento que se genera tanto de los pagos directos por concepto de intereses como todo diferencial entre el precio inicial (B) y el precio a su vencimiento (P).

Nótese que a medida que aumenta i el *VPD* disminuye. Ésta es una forma precisa de formular el conocido concepto de que los precios de los bonos (los *VPD*) y las tasas de interés (rendimientos) mantienen una correlación inversa.

Tiempo continuo

Hasta este punto, nuestro planteamiento se ha ocupado del tiempo discreto; es decir, hemos dividido el análisis en periodos. Con frecuencia suele ser más conveniente manejar un tiempo continuo. En tal caso, el interés compuesto de una inversión se conoce "inmediatamente" y el crecimiento a lo largo del tiempo es "terso". Esto facilita el análisis de los problemas de maximización porque es más fácil calcular las derivadas de funciones exponenciales. En años recien-

[2]Dado que esta ecuación es en realidad un polinomio de grado n, existen n soluciones (raíces). Sólo una de estas soluciones es la solución relevante que se muestra en las calculadoras o en las tablas de bonos. Las demás soluciones son imaginarias o irracionales. En este ejemplo sólo hay una solución real.

tes, muchos intermediarios financieros (por ejemplo, las instituciones de ahorro) han adoptado fórmulas de tipos de interés (casi) continuos.

Supongamos que i está dado como la tasa de interés (nominal) anual, pero que la mitad del valor compuesto de esta tasa nominal se calcula cada seis meses. En tal caso, al final de un año, una inversión de $1 habrá aumentado a

$$\$1 \times \left(1 + \frac{i}{2}\right)^2. \qquad \textbf{(17A.9)}$$

Nótese que este valor es más alto que el de la inversión a un año a una tasa de interés simple, i, porque se han pagado intereses sobre intereses; es decir,

$$\left(1 + \frac{i}{2}\right)^2 > (1 + i). \qquad \textbf{(17A.10)}$$

Consideremos el límite de este proceso; es decir, para la tasa nominal de i por periodo, consideremos la cantidad que se realizaría si, de hecho i fuera una tasa "compuesta n veces durante el periodo"; si $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n \qquad \textbf{(17A.11)}$$

Este límite existe y es, simplemente e^i donde e es la base de los logaritmos naturales (el valor de e es, aproximadamente, de 2.72). Cabe señalar que $e^i > (1 + i)$; es decir, es mejor tener una tasa compuesta continua a lo largo del periodo que un interés simple.

Podemos plantearnos qué tasa continua, r, produce la misma cantidad al final de un periodo que una tasa simple i. Queremos encontrar el valor de r que resuelve la ecuación

$$e^r = (1 + i). \qquad \textbf{(17A.12)}$$

Por tanto,

$$r = \ln(1 + i). \qquad \textbf{(17A.13)}$$

Si se emplea esta fórmula resulta sencillo traducir las tasas de interés discretas a tasas continuas. Si medimos i como una tasa de interés anual decimal, entonces, r es una tasa anual continua. La tabla 17A.1 muestra la tasa de interés anual efectiva (i) asociada a las tasas de interés (r) compuestas de forma continua.[3] Con frecuencia, las ventanas de instituciones de ahorro muestran tablas similares a la 17A.1, anunciando los "verdaderos" rendimiento de sus cuentas de ahorro.

Crecimiento continuo

Un dólar invertido a una tasa de interés continua r se convertirá en

$$V = \$1 \cdot e^{rT} \qquad \textbf{(17A.14)}$$

transcurridos T años. Esta fórmula de crecimiento es muy cómoda para trabajar. Por ejemplo, resulta fácil demostrar que la tasa relativa de cambio inmediato de V está dada, como cabría esperar, por r

$$\textbf{tasa relativa de cambio} = \frac{dV/dt}{V} = \frac{re^{rt}}{e^{rt}} = r. \qquad \textbf{(17A.15)}$$

[3]Para calcular las cifras de la tabla 17A.1, las tasas de interés se utilizan en decimales y no en porcentajes (es decir, una tasa de interés del 5% es asentada como 0.05 para utilizarla en la ecuación 17A.12).

TABLA 17A.1 **Tasas de interés anuales efectivas de algunas tasas compuestas de interés**

Tasa compuesta continuamente	Tasa anual efectiva
3.0%	3.05%
4.0	4.08
5.0	5.13
5.5	5.65
6.0	6.18
6.5	6.72
7.0	7.25
8.0	8.33
9.0	9.42
10.0	10.52

Las tasas de interés continuas también resultan cómodas para calcular los valores presentes descontados. Supongamos que queremos calcular el *VPD* de \$1 pagadero en *T* años a partir de hoy. Este valor estaría determinado por[4]

$$\frac{\$1}{e^{rT}} = \$1 \times e^{-rT}. \qquad \textbf{(17A.16)}$$

La lógica de este cálculo es exactamente la misma que la que empleamos para el análisis del tiempo discreto en este apéndice; es decir, los dólares futuros valen menos que los presentes.

Flujos de pagos

Una aplicación interesante del descuento continuo se presenta cuando calculamos el *VPD* de \$1 por periodo, pagado en plazos pequeños, en cada instante desde hoy (tiempo 0) hasta el periodo *T*. Dado que se producirá un número infinito de pagos, debemos emplear el instrumento matemático de la integración para calcular este resultado:

$$VPD = \int_0^T e^{-rt}\,dt. \qquad \textbf{(17A.17)}$$

Esta expresión señala que estamos sumando todos los dólares descontados a lo largo del periodo de tiempo que corre entre 0 y *T*.

El valor de esta integral definida está determinado por

$$\begin{aligned} VPD &= \left.\frac{-e^{-rt}}{r}\right|_0^T \\ &= \frac{-e^{-rT}}{r} + \frac{1}{r}. \end{aligned} \qquad \textbf{(17A.18)}$$

Si dejamos que *T* tienda a infinito, este valor se convierte en

$$VPD = \frac{1}{r}, \qquad \textbf{(17A.19)}$$

como en el caso de una anualidad de duración infinita en el caso discreto.

[4]En física esta fórmula se presenta como un ejemplo de la “decadencia radiactiva”. Si una unidad de una sustancia decae continuamente a una tasa δ, entonces, tras *T* periodos, quedará, $e^{-\delta T}$. Esta cantidad no llega a ser nunca cero, por muy grande que sea *T*. En la teoría del capital, podemos tratar la depreciación de esta misma manera.

El descuento continuo es particularmente cómodo para calcular el *VPD* de un flujo arbitrario de pagos a lo largo del tiempo. Supongamos que $f(t)$ registra la cantidad de dólares que se pagarán durante el periodo t. Entonces, el *VPD* del pago en el momento t es

$$e^{-rt}f(t), \tag{17A.20}$$

y el *VPD* de todo el flujo desde el momento presente (año 0) hasta el año T está determinado por

$$\int_0^T f(t)e^{-rt}dt. \tag{17A.21}$$

Con frecuencia, los agentes económicos pueden tratar de maximizar una expresión como la de la ecuación 17A.21. El empleo del tiempo continuo hace que el análisis de estas elecciones sea sencillo porque podemos emplear métodos de cálculo estándar para la maximización.

Duración

El uso del tiempo continuo también puede aclarar una serie de conceptos financieros que, de lo contrario, serían bastante complejos. Por ejemplo, supongamos que queremos saber cuánto tiempo se requiere para que un individuo reciba el pago de un flujo dado de pagos, $f(t)$. El valor presente de este flujo está determinado por

$$V = \int_0^T f(t)e^{-rt}dt \tag{17A.22}$$

Si derivamos este valor en función del factor de descuento, e^{-r} tendremos

$$\frac{\partial V}{\partial e^{-r}} = \int_0^T tf(t)e^{-r(t-1)}dt \tag{17A.23}$$

y la elasticidad de este cambio estará determinada por

$$e = \frac{\partial V}{\partial e^{-r}} \frac{e^{-r}}{V} = \frac{\int_0^T tf(t)e^{-rt}dt}{V}. \tag{17A.24}$$

Por tanto, la elasticidad del valor presente de este flujo de pagos respecto al factor de descuento anual (que es similar, por ejemplo, a la elasticidad de los precios de los bonos respecto a las variaciones de las tasas de interés) está determinada por el cociente del valor presente de un flujo de pagos ponderado con el tiempo respecto al flujo no ponderado. Por lo tanto, desde el punto de vista conceptual, esta elasticidad representa el tiempo promedio que debe esperar un individuo en recibir el pago típico. En la prensa financiera este concepto se conoce como la *duración* del flujo de pagos. Se trata de una medida importante de la volatilidad del valor presente de este flujo respecto a las variaciones de la tasa de interés.[5]

[5]Por ejemplo, una duración de 8 años significa que la extensión media de tiempo que debe esperar el individuo para el pago típico es de 8 años. También significa que la elasticidad del valor de este flujo respecto al factor de descuento es 8.0. Dado que la elasticidad del propio factor de descuento respecto a la tasa de interés es simplemente $-r$, entonces la elasticidad del valor del flujo respecto a esta tasa de interés es $-8r$. Por ejemplo, si $r = 0.05$, la elasticidad del valor presente del flujo respecto a r será -0.40.

Parte 7

INCERTIDUMBRE, INFORMACIÓN Y EXTERNALIDADES

En esta parte del libro se analizarán los factores económicos que podrían provocar que los mercados no asignaran los recursos eficientemente. La parte inicia con el capítulo 18, el cual contiene una explicación general de la teoría económica del comportamiento en condiciones de incertidumbre. El capítulo, básicamente, pretende explicar por qué las personas suelen sentir aversión al riesgo y, por lo mismo, pagarán algo para evitar la incertidumbre. En concreto, comprarán seguros y, si el precio de éstos es justo, ellos les protegerán por completo contra la incertidumbre.

El capítulo 19 emplea el material del comportamiento en condiciones de incertidumbre para demostrar que la información imperfecta puede afectar el adecuado funcionamiento de los mercados. De nueva cuenta, nos concentramos en los mercados de seguros. Se demuestra que la asimetría de información que tienen los compradores y los vendedores de seguros puede provocar problemas de riesgo moral (cuando los asegurados toman precauciones que distan de ser óptimas) y la selección adversa (en cuyo caso las personas que no representan un riesgo alto tal vez no puedan adquirir cantidades eficientes de seguros). El capítulo también contiene un análisis del problema entre el principal y el agente, en cuyo caso se pide a los actores que tienen más conocimientos económicos que tomen decisiones en nombre de los que tienen menos información.

En el capítulo 20 se analizan los problemas de asignación que provocan las externalidades. Cuando los actos de un individuo o de una empresa afectan a un tercero, los precios no transmiten información adecuada para garantizar la asignación eficiente, y este capítulo analiza dos ejemplos de este problema. En primer término estudia las "externalidades" tradicionales, como la contaminación del aire o del agua. El capítulo muestra cómo hacer modelos de estos efectos y cómo evaluar las consecuencias de posibles actos para mejorar las cosas. El capítulo 20 también analiza las externalidades provocadas por los "bienes públicos"; es decir, los bienes que podrían no ser exclusivos ni rivales. De nueva cuenta, la presentación busca aclarar la naturaleza de los problemas que plantean estos bienes, así como evaluar las posibles soluciones.

Por último, en el capítulo 21 se analizan algunos modelos del proceso político. Muestra que es posible hacer modelos, en cierto sentido, de forma muy similar a la que hemos utilizado en otras partes del libro para hacer modelos de los mercados privados. No obstante, la teoría del equilibrio político está mucho menos desarrollada que la del equilibrio del mercado, por lo cual este análisis, en el mejor de los casos, sólo será una sugerencia.

Capítulo 18

INCERTIDUMBRE Y AVERSIÓN AL RIESGO

En este capítulo nos centraremos en algunos de los elementos básicos que caracterizan la motivación de los individuos cuando toman decisiones en condiciones de incertidumbre. Se muestra cómo es posible generalizar el concepto de utilidad para aplicarlo a aquellos casos en los cuales los resultados están sujetos a cierto grado de aleatoriedad. Después se utiliza este concepto ampliado de la utilidad para analizar el fenómeno de la "aversión al riesgo". Es decir, mostramos por qué a los individuos normalmente les desagradan las situaciones inciertas y podrían estar dispuestos a pagar algo para reducir la incertidumbre que afrontan.

Probabilidad y valor esperado

El estudio del comportamiento de los individuos en situaciones de incertidumbre y el estudio matemático de la probabilidad y la estadística tienen un origen histórico común, en el sentido que son un intento por comprender, y presuntamente ganar, los juegos de azar. Por ejemplo, el estudio del simple juego que consiste en tirar una moneda al aire ha sido excepcionalmente productivo para las matemáticas y para arrojar luz sobre ciertas características del comportamiento humano que los juegos dejan ver. Dos conceptos estadísticos que tienen su origen en estos juegos y que nos serán muy útiles a lo largo de este capítulo son la *probabilidad* y el *valor esperado*.

La *probabilidad* de que un hecho se vuelva a repetir,[1] en términos generales, es la frecuencia relativa con la que se producirá. Por ejemplo, cuando decimos que, al tirar una moneda al aire sin hacer trampa, la probabilidad de que resulte cara es de un medio, queremos decir que, si tiramos la moneda al aire muchas veces, esperaríamos que alrededor de la mitad de las veces resulte cara. Por otra parte, cuando tiramos un dado, la probabilidad de que resulte un dos es de un sexto; es decir, más o menos, en una de cada seis tiradas aparecerá un dos.

Supongamos que una lotería ofrece n premios distintos (algunos de los cuales pueden ser 0 o incluso negativos), $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y que las probabilidades de ganar estos premios son $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$. Si suponemos que a un jugador sólo se le entregará un único premio, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1. \qquad \textbf{(18.1)}$$

[1]En el caso de hechos que se repiten, la probabilidad es un concepto que se define de forma objetiva. Los individuos también pueden asignar probabilidades *subjetivas* a hechos que no son recurrentes. La mayor parte de las veces no señalaremos diferencia alguna entre estos dos tipos de estimaciones de la probabilidad. En las ampliaciones de este capítulo explicamos otros conceptos de la estadística.

La ecuación 18.1 simplemente afirma que nuestra lista indica todos los resultados posibles de la lotería y que uno de ellos tiene que ocurrir. Para tener una medida de la ganancia promedio de esta lotería, definimos el valor esperado de la manera siguiente:

DEFINICIÓN

Valor esperado. En el caso de una lotería (X) con premios $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y probabilidades de $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, el *valor esperado* de la lotería será[2]

$$\begin{aligned} \text{valor esperado} = E(X) &= \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \cdots + \pi_n x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i. \end{aligned} \tag{18.2}$$

El valor esperado de la lotería es una suma ponderada de los premios, en la cual, los pesos ponderados son las respectivas probabilidades. Es el monto promedio del premio que ganará el jugador. Por ejemplo, supongamos que Juan y Santiago acuerdan tirar una moneda al aire una sola vez. Si resulta cara, Juan pagará 1 dólar a Santiago; si resulta cruz, éste pagará 1 dólar a Juan. Desde la posición de Santiago, este juego tiene dos premios: si resulta cara, $x_1 = +\$1$; si resulta cruz, $x_2 = -\$1$, donde el signo negativo indica que Santiago tendrá que pagar. Desde la posición de Juan, el juego es exactamente igual, salvo que los signos de los resultados se presentan al contrario. Por tanto, el valor esperado de este juego es

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}(\$1) + \frac{1}{2}(-\$1) = 0. \tag{18.3}$$

El juego tiene un valor esperado igual a 0. Si los dos jugaran al juego varias veces, es poco probable que uno de ellos pudiera aventajar mucho al otro.

Supongamos ahora que cambian los premios del juego de forma que (de nuevo, desde la posición de Santiago) $x_1 = \$10$, $x_2 = -\$1$. Santiago ganará 10 dólares si sale cara, pero sólo perderá 1 dólar si sale cruz. El valor esperado de este juego es

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}(\$10) + \frac{1}{2}(-\$1) = \$5 - \$0.50 = \$4.50. \tag{18.4}$$

Si lo juegan muchas veces, no cabe duda que Santiago acabará siendo el gran ganador. De hecho, Santiago podría estar dispuesto a pagar algo a Juan por el privilegio de jugar. Los juegos que tienen un valor esperado igual a 0 o los que cuestan su valor esperado por el derecho a jugar (en este caso, precisamente $4.50) se conocen (actuarialmente) como *juegos justos.* Una observación frecuente es que, en muchas situaciones, la gente se niega a participar en juegos actuarialmente justos. Este hecho es esencial para comprender los avances que ha registrado la teoría de la incertidumbre y se retomará en la próxima sección.

---

[2]Si la situación analizada tiene resultados continuos (por ejemplo, la variación del precio de una acción medida en términos muy exactos), entonces tenemos que modificar un poco esta definición. Si la probabilidad de que el resultado de este hecho aleatorio (x) se encuentre en un intervalo muy pequeño (dx) está dada por $f(x)\,dx$, entonces podremos modificar la ecuación 18.1 de la manera siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

En este caso, el valor esperado de x está dado por

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

En muchas situaciones (por ejemplo, cuando x tiene una distribución normal), la manipulación de estos valores esperados puede ser mucho más sencilla que en el caso discreto que se muestra en la ecuación 18.2. En las ampliaciones de este capítulo encontrará algunos ejemplos.

Juegos justos y la hipótesis de la utilidad esperada

La gente normalmente no participaría en un juego justo.[3] A veces, yo podría aceptar tirar una moneda al aire apostando pequeñas cantidades de dinero, pero si me ofrecieran la oportunidad de jugarme 1000 dólares en una sola tirada, probablemente me negaría a hacerlo. De igual manera, la gente a veces paga una pequeña cantidad de dinero por participar en un juego actuarialmente injusto, como una lotería estatal, pero evitará pagar mucho dinero por participar en juegos arriesgados, pero justos.

La paradoja de San Petersburgo

Un ejemplo convincente es la "paradoja de San Petersburgo", que el matemático Daniel Bernoulli fuera el primero en investigar con rigor en el siglo XVIII.[4] La paradoja de San Petersburgo propone el siguiente juego: tirar una moneda al aire hasta que resulte cara. Si ésta sale por primera vez en la n-ésima tirada, el jugador recibirá $\$2^n$. Este juego tiene un número infinito de resultados (podríamos estar tirando una moneda al aire desde hoy hasta el día del juicio final sin que salga cara jamás, aun cuando existe escasa probabilidad de que esto ocurra), pero podemos expresar fácilmente los primeros resultados. Si x_i representa el premio otorgado cuando aparece la primera cara en la i-ésima tirada, entonces

$$x_1 = \$2,\ x_2 = \$4,\ x_3 = \$8,\ \ldots,\ x_n = \$2^n. \tag{18.5}$$

La probabilidad de conseguir cara por primera vez en la i-ésima tirada es $(\frac{1}{2})^i$; o sea la probabilidad de obtener $(i - 1)$ cruces y, a continuación, una cara. Por tanto, las probabilidades de los premios de la ecuación 18.5 son

$$\pi_1 = \frac{1}{2}, \pi_2 = \frac{1}{4}, \pi_3 = \frac{1}{8}, \cdots, \pi_n = \frac{1}{2^n}. \tag{18.6}$$

El valor esperado del juego de la paradoja de San Petersburgo es infinito:

$$\begin{aligned} \text{valor esperado} &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i\frac{1}{2^i}} \\ &= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \infty. \end{aligned} \tag{18.7}$$

Sin embargo, una rápida reflexión convencerá a cualquiera de que ningún jugador pagaría mucho (y por supuesto que mucho menos que infinito) por jugar a este juego. Si yo cobrara 1000 millones de dólares por jugar a este juego, seguramente nadie aceptaría jugar, a pesar de que 1000 millones de dólares sean considerablemente menos que el valor esperado del juego. Por lo tanto, ésta es la paradoja: en cierto sentido, el juego de Bernoulli no vale su valor esperado (infinito) en dólares.

Utilidad esperada

Bernoulli resolvió esta paradoja argumentando que a los individuos no les importan directamente los premios en dólares que pague un juego, sino que, más bien, responden a la utilidad que les proporcionan estos dólares. Si suponemos que la utilidad marginal de la riqueza disminuye a medida que la riqueza aumenta, el juego de San Petersburgo podrá converger a un valor finito de *utilidad esperada* que los jugadores estarán dispuestos a pagar por tener derecho a jugar. Bernoulli dijo que este valor de la utilidad esperada era el *valor moral* del juego, porque representa el valor que el juego tiene para el individuo. Dado que la utilidad podría aumentar más despacio que el valor monetario de los premios, es posible que el valor moral de un juego esté por debajo de su valor monetario esperado.

---

[3] Los juegos que analizamos aquí supuestamente no producen otra utilidad que no sean los premios y, por tanto, la observación de que muchos individuos juegan con probabilidades "injustas" no necesariamente refuta esta afirmación. Por el contrario, es razonable suponer que los individuos derivan cierta utilidad de las circunstancias asociadas con el desarrollo del juego. Por tanto, es posible diferenciar el aspecto del consumo del juego y el del riesgo puro.

[4] El artículo original de Bernoulli ha sido reimpreso como D. Bernoulli. "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk", *Econometrica 22*, enero de 1954, pp. 23-36.

EJEMPLO 18.1

La solución de Bernoulli a la paradoja

Supongamos, como hizo Bernoulli, que en la paradoja de San Petersburgo la utilidad de cada premio está determinada por

$$U(x_i) = \ln(x_i). \tag{18.8}$$

Esta función de la utilidad en logaritmo natural muestra una utilidad marginal decreciente (es decir, $U' > 0$, pero $U'' < 0$), y el valor de la utilidad esperada de este juego converge a un número finito:

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada} &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i U(x)_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \ln(2^i). \end{aligned} \tag{18.9}$$

Algunas operaciones con esta expresión nos darán[5] el resultado de que el valor de la utilidad esperada de este juego es 1.39. Por tanto, un individuo con este tipo de función de utilidad podría estar dispuesto a invertir recursos que, de otra manera, le producirían hasta 1.39 unidades de utilidad (una cierta riqueza de unos $4 proporcionaría esta utilidad) para adquirir el derecho a jugar a este juego. Por consiguiente, el supuesto de que los muy cuantiosos premios que promete la paradoja de San Petersburgo tienen una utilidad marginal decreciente permitió a Bernoulli ofrecer una solución a la paradoja.

Pregunta: ¿La solución de Bernoulli en realidad "resuelve" la paradoja? Empleando la función de utilidad logarítmica, ¿usted cómo redefiniría los premios de este juego de forma que tuviera una utilidad esperada de valor infinito?

El teorema de von Neumann-Morgenstern

En su libro *The Theory of Games and Economic Behavior,* John von Neumann y Oscar Morgenstern crearon modelos matemáticos para estudiar el comportamiento económico de los individuos en condiciones de incertidumbre.[6] Para poder comprender estas relaciones, primero tuvieron que investigar los motivos de las personas que participan en estos "juegos". Dado que la hipótesis de que, en situaciones de incertidumbre, los individuos toman decisiones en función de la utilidad esperada parecía intuitivamente razonable, los autores se propusieron demostrar que axiomas más básicos sobre el comportamiento "racional" permitían derivar esta hipótesis. Los axiomas representan un intento de los autores por generalizar los fundamentos de la teoría de la elección individual de modo que abarcara situaciones de incertidumbre. Si bien muchos de estos axiomas resultan eminentemente razonables a primera vista, han surgido muchas interrogantes importantes respecto a su validez. Sin embargo, aquí no se analizarán estas interrogantes.[7]

---

[5]Demostración: la utilidad esperada $= \sum_{i=1}^{\infty} \cdot 1/2^i \cdot \ln 2 = \ln 2 \sum_{i=1}^{\infty} i/2^i$. Pero podemos demostrar que el valor de esta serie infinita final es 2.0. Por tanto, la utilidad esperada será = 2 ln 2 = 1.39.

[6]J. von Neumann y O. Morgenstern. *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944. El apéndice explica los axiomas de racionalidad en situaciones de incertidumbre.

[7]Encontrará una explicación de algunas de las cuestiones planteadas en el debate sobre los axiomas de von Neumann-Morgenstern, véase Mark J. Machina. "Choice Under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved", *Journal of Economic Perspectives*, verano de 1987, pp. 121-154.

El índice de utilidad de von Neumann-Morgenstern

Para empezar, supongamos que hay n premios que podría ganar un individuo que participa en una lotería. Denominemos a estos premios $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y supongamos que han sido clasificados por orden ascendente de deseos por obtenerlos. Por tanto x_1 es el premio que el individuo prefiere menos y x_n el que prefiere más. Ahora, asignemos, arbitrariamente, números de utilidad a estos dos premios extremos. Por ejemplo, resultaría cómodo asignar

$$\begin{aligned} U(x_1) &= 0 \\ U(x_n) &= 1, \end{aligned} \tag{18.10}$$

pero otro par cualquiera de números nos serviría igual de bien.[8] Empleando estos dos valores de la utilidad, el objetivo del teorema de von Neumann-Morgenstern consiste en demostrar que existe una forma razonable de asignar números específicos de utilidad a los demás premios disponibles. Supongamos que elegimos otro premio, por ejemplo, x_i. Analicemos el siguiente experimento. Pidamos al individuo que diga cuál es la probabilidad, por ejemplo, π_i, ante la cual se mostraría indiferente entre x_i con *certeza*, y una *jugada arriesgada* que ofrezca premios de x_n con probabilidad π_i y x_1 con probabilidad $(1 - \pi_i)$. Parece razonable, si bien éste es uno de los supuestos problemáticos del planteamiento de von Neumann-Morgenstern, que esta probabilidad exista: al individuo siempre le será indiferente una jugada arriesgada o algo seguro, siempre y cuando la probabilidad de ganar el mejor premio posible sea lo suficientemente alta. También parece probable que π_i será mayor cuanto más deseable sea x_i cuanto mejor sea x_i, tanto mayor tendrá que ser la posibilidad de ganar x_n para conseguir que el individuo juegue. Por tanto, la probabilidad π_i representa qué tan deseable es el premio x_i. De hecho, la técnica de von Neumann-Morgenstern consiste en definir la utilidad de x_i como la utilidad esperada de la jugada arriesgada que el individuo considera igual de deseable que x_i:

$$U(x_i) = \pi_i \cdot U(x_n) + (1 - \pi_i) \cdot U(x_1). \tag{18.11}$$

Debido a la escala elegida en la ecuación 18.10 tendremos

$$U(x_i) = \pi_i \cdot 1 + (1 - \pi_i) \cdot 0 = \pi_i. \tag{18.12}$$

Al elegir juiciosamente los números de utilidad que asignamos al mejor premio y al peor hemos podido demostrar que el número de utilidad ligado a otro premio cualquiera es, sencillamente, la probabilidad de ganar el premio más alto de una jugada arriesgada que el individuo considera equivalente al premio en cuestión. Esta elección de los números de utilidad es arbitraria. Podríamos haber empleado otro par de números para construir esta escala de utilidad, pero nuestra elección inicial (ecuación 18.10) resulta particularmente cómoda.

Maximización de la utilidad esperada

Acorde con la escala y el origen elegido y que representa la ecuación 18.10, supongamos que hemos asignado la probabilidad π_i para representar la utilidad de todo premio x_i. Nótese concretamente que $\pi_1 = 0$, $\pi_n = 1$, y que todos los demás valores de la utilidad están dentro de estos extremos. Empleando estos números de la utilidad, podemos demostrar que un individuo "racional" elegirá entre distintas jugadas arriesgadas en función de su "utilidad" esperada, es decir, en función del valor esperado de estos números del índice de utilidad de von Neumann-Morgenstern.

Por ejemplo, analicemos dos jugadas arriesgadas. Una de ellas ofrece x_2, con una probabilidad q, y x_3, con una probabilidad $(1 - q)$. La otra jugada ofrece x_5, con una probabilidad t, y x_6, con una probabilidad $(1 - t)$. Queremos demostrar que el individuo elegirá la jugada 1 si, y sólo si, la utilidad esperada de la jugada arriesgada 1 excede a la de la jugada 2. Ahora, en el caso de estas jugadas:

$$\begin{aligned} \textbf{utilidad esperada (1)} &= q \cdot U(x_2) + (1 - q) \cdot U(x_3) \\ \textbf{utilidad esperada (2)} &= t \cdot U(x_5) + (1 - t) \cdot U(x_6). \end{aligned} \tag{18.13}$$

[8]Técnicamente, un índice de utilidad de von Neumann-Morgenstern tan sólo es único por cuanto a la elección de la escala y el origen; es decir, sólo por cuanto a una "transformación lineal". Este requisito es más estricto que el de la función de utilidad que debe ser única por cuanto a una transformación monótona.

Al sustituir los números de utilidad del índice (es decir, π_2 es la "utilidad" de x_2, etc.), tendremos

$$\begin{aligned}\textbf{utilidad esperada (1)} &= q \cdot \pi_2 + (1 - q) \cdot \pi_3 \\ \textbf{utilidad esperada (2)} &= t \cdot \pi_5 + (1 - t) \cdot \pi_6.\end{aligned} \tag{18.14}$$

Queremos demostrar que el individuo preferirá la jugada 1 a la 2 si, y sólo si

$$q \cdot \pi_2 + (1 - q) \cdot \pi_3 > t \cdot \pi_5 + (1 - t) \cdot \pi_6. \tag{18.15}$$

Para demostrar lo anterior, recuerde las definiciones del índice de utilidad. El individuo es indiferente entre x_2 y una jugada que promete x_1 con una probabilidad $(1 - \pi_2)$ y x_n con una probabilidad π_2. Podemos emplear este hecho para sustituir jugadas que sólo incluyan x_1 y x_n para todas las utilidades en la ecuación 18.14 (aun cuando el individuo es indiferente ante éstas, el supuesto de que podemos realizar esta sustitución es uno de los axiomas más problemáticos de von Neumann-Morgenstern). Tras unas operaciones algebraicas, podemos concluir que la jugada 1 es equivalente a la que promete x_n con la probabilidad $q\pi_2 + (1 - q)\pi_3$, y que la jugada 2 es equivalente a la que promete x_n con una probabilidad $t\pi_5 + (1 - t)\pi_6$. Cabe suponer que el individuo preferirá la jugada que representa mayor probabilidad de ganar el mejor premio. Por tanto, elegirá la jugada 1 si, y sólo si

$$q\pi_2 + (1 - q)\pi_3 > t\pi_5 + (1 - t)\pi_6. \tag{18.16}$$

Esto es precisamente lo que queríamos demostrar. Por tanto, hemos demostrado que un individuo elegirá la jugada arriesgada que ofrezca el mayor nivel de utilidad esperada (von Neumann-Morgenstern). Ahora se utilizará mucho este resultado, que se puede resumir de la manera siguiente:

PRINCIPIO DE OPTIMIZACIÓN

Maximización de la utilidad esperada. Si los individuos obedecen los axiomas de von Neumann-Morgenstern sobre el comportamiento en condiciones de incertidumbre, entonces actuarán como si eligieran la opción que maximiza el valor esperado de su índice de utilidad von Neumann-Morgenstern.

Aversión al riesgo

Dos loterías pueden tener el mismo valor monetario esperado, pero diferir en cuanto a su riesgo. Por ejemplo, tirar una moneda al aire por 1 dólar o tirarla por 1000 dólares son dos juegos justos y ambos tienen el mismo valor esperado (0). No obstante, el segundo juego es, en cierto sentido, más "arriesgado" que el primero, y habrá menos personas dispuestas a participar en un juego en el cual el premio consiste en ganar o en perder 1000 dólares. El objetivo de esta sección es explicar el significado del término "arriesgado" y por qué la aversión al riesgo está tan generalizada.

El término *riesgo* se entiende como la variabilidad de los resultados de determinada actividad incierta.[9] Si la variabilidad es poca, casi podemos dar por seguro la actividad. Con una noción de variabilidad no más compleja que ésta, podemos demostrar por qué los individuos, cuando afrontan una elección entre dos jugadas arriesgadas, que tienen el mismo valor esperado, normalmente elegirán la que tenga un rendimiento menos variable. La intuición nos dice que la razón que explica lo anterior es que normalmente suponemos que la utilidad marginal de los dólares adicionales del premio monetario (es decir, la riqueza) disminuye a medida que el premio va siendo mayor. Tirar una moneda al aire por 1000 dólares promete una ganancia de utilidad relativamente pequeña si ganamos, pero una gran pérdida de utilidad si perdemos. Una apuesta de sólo 1 dólar "no tiene consecuencias" y la ganancia de utilidad derivada de ganar compensa, aproximadamente, la disminución de la utilidad derivada de una pérdida.[10]

---

[9]El concepto estadístico de "variación" muchas veces se emplea como sinónimo de riesgo. Véanse el ejemplo 18.3 y las ampliaciones de este capítulo.

[10]Una definición alternativa y más general de la aversión al riesgo es que $E[U(W)] < U[E(W)]$ para toda riqueza, W distribuida aleatoriamente. La utilidad marginal decreciente garantiza esta condición.

Aversión al riesgo y apuestas justas

La figura 18.1 ilustra este argumento. En este caso, W^* representa la riqueza corriente de un individuo y $U(W)$ es un índice de utilidad von Neumann-Morgenstern que refleja la opinión del individuo respecto a distintos niveles de riqueza. $U(W)$ ha sido trazada como una función cóncava de W para reflejar el supuesto de la utilidad marginal decreciente. Suponemos que obtener 1 dólar más aumenta la utilidad cada vez menos a medida que aumenta la riqueza total. Ahora, supongamos que a esta persona le ofrecen la posibilidad de participar en dos jugadas justas: una probabilidad de 50% de ganar o perder $\$h$ o una probabilidad de 50% de ganar o perder $\$2h$. La utilidad de la riqueza actual es $U(W^*)$. La utilidad esperada si participa en la jugada 1 está determinada por $U^h(W^*)$:

$$U^h(W^*) = \frac{1}{2}U(W^* + h) + \frac{1}{2}U(W^* - h), \tag{18.17}$$

y la utilidad esperada de la jugada 2 está determinada por $U^{2h}(W^*)$:

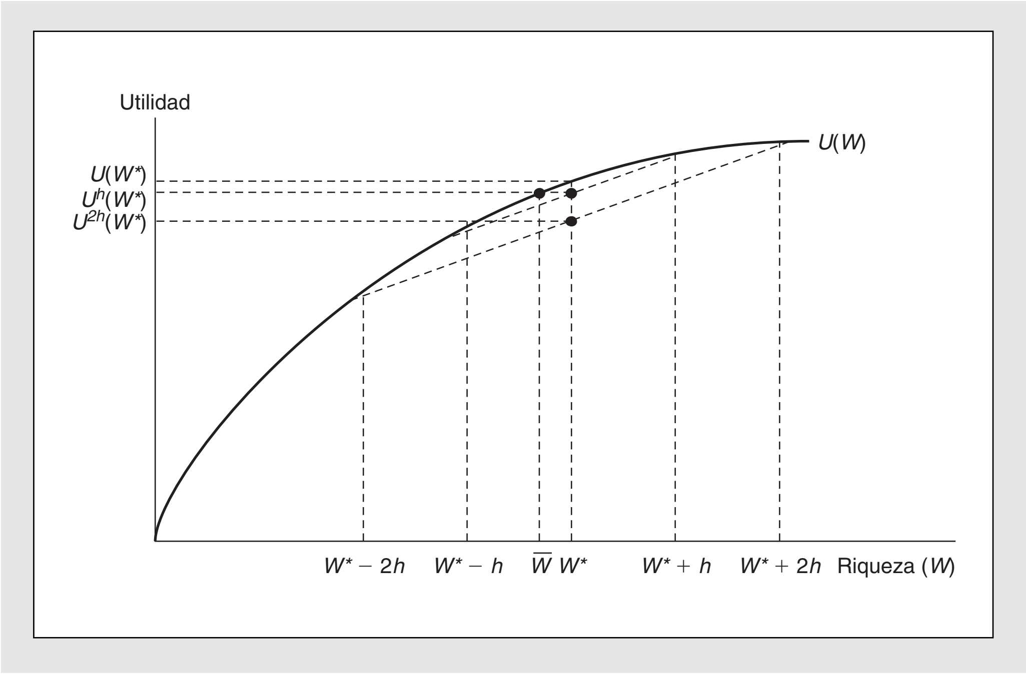
$$U^{2h}(W^*) = \frac{1}{2}U(W^* + 2h) + \frac{1}{2}U(W^* - 2h). \tag{18.18}$$

La figura deja en claro, geométricamente, que[11]

$$U(W^*) > U^h(W^*) > U^{2h}(W^*). \tag{18.19}$$

FIGURA 18.1 **Utilidad de la riqueza de dos apuestas justas con distinta variabilidad**

Si la función de utilidad de la riqueza es cóncava, es decir, si exhibe una utilidad marginal decreciente de la riqueza, esta persona rechazará las apuestas justas. Por ejemplo, una apuesta con el 50% de posibilidades de ganar o perder h dólares produce menos utilidad [$U^h(W^*)$] que rechazar la apuesta. Esto se explica porque ganar h dólares significa menos para este individuo que perder h dólares.



[11]Para ver por qué la utilidad esperada de la apuesta h y de la apuesta $2h$ son las que se muestran, nótese que estas utilidades esperadas son el promedio de la utilidad de un resultado favorable y uno desfavorable. Dado que W^* está a medio camino entre $W^* + h$ y $W^* - h$, U^h también está a medio camino entre $U(W^* + h)$ y $U(W^* - h)$.

Por tanto, esta persona preferirá su riqueza actual a la riqueza combinada con una jugada arriesgada justa y preferirá una jugada de poco monto a una elevada. Esto se explica porque ganar una apuesta justa suma una cantidad de placer menor al dolor que genera perder. Aun cuando, en este caso, los premios son iguales, ganar proporciona una cantidad de utilidad menor a lo que cuesta perder.

Aversión al riesgo y seguros

De hecho, esta persona podría estar dispuesta a pagar cierta cantidad para no tener que participar en una jugada arriesgada en absoluto. Nótese que un nivel determinado de riqueza de $\overline{W}$ proporciona la misma utilidad que la participación en la jugada 1. El individuo estará dispuesto a pagar una cantidad cualquiera hasta $W^* - \overline{W}$ para evitar participar en la jugada. Esto explica por qué las personas compran seguros. Están renunciando a una cantidad pequeña y cierta (la prima de la póliza) para evitar el resultado arriesgado contra el que se están asegurando. Por ejemplo, la prima que una persona paga por un seguro de daños materiales para su automóvil, le proporciona una póliza en la que la aseguradora acepta reparar el automóvil en caso de siniestro. El uso tan extendido de seguros parecería implicar que la aversión al riesgo está muy generalizada. Por tanto, se presenta la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Aversión al riesgo. Alguien que siempre rechaza las apuestas justas será considerada una persona que siente *aversión al riesgo*. Si la utilidad marginal de la riqueza de los individuos es decreciente, éstos sentirán aversión al riesgo. Por tanto, estarán dispuestos a pagar algo para no tener que tomar apuestas justas.

EJEMPLO 18.2

Disposición a pagar un seguro

Para ilustrar la relación entre la aversión al riesgo y los seguros, analicemos el caso de una persona que tiene una riqueza actual de 100 000 dólares y que, a lo largo del año siguiente, afronta una posibilidad del 25% de perder su automóvil, que vale 20 000 dólares, a causa de robo. Supongamos también que el índice de utilidad de von Neumann-Morgenstern de esta persona es logarítmico; es decir, $U(W) = \ln(W)$.

Si esta persona afronta el año siguiente sin un seguro, su utilidad esperada será

$$\begin{aligned}\textbf{utilidad esperada} &= \mathbf{0.75}\,U(\mathbf{100\,000}) + \mathbf{0.25}\,U(\mathbf{80\,000})\\ &= \mathbf{0.75 \ln 100\,000 + 0.25 \ln 80\,000}\\ &= \mathbf{11.45714.}\end{aligned} \tag{18.20}$$

En esta situación, una prima de seguro justa sería de \$5000 (25% de \$20 000, suponiendo que la compañía de seguros sólo afronta los costos de la reclamación y que los costos administrativos son 0). Por tanto, si esta persona asegura totalmente su automóvil, su riqueza será de \$95 000, independientemente de que su automóvil sea sustraído o no. En este caso, pues,

$$\begin{aligned}\textbf{utilidad esperada} &= U(\mathbf{95\,000})\\ &= \mathbf{\ln(95\,000)}\\ &= \mathbf{11.46163.}\end{aligned} \tag{18.21}$$

Es evidente que esta persona estará en mejor situación cuando contrata un seguro justo. De hecho, podemos determinar la cantidad máxima que se podría pagar por la protección de este seguro (x) estableciendo

$$\begin{aligned}\textbf{utilidad esperada} &= U(\mathbf{100\,000} - x)\\ &= \mathbf{\ln(100\,000} - x)\\ &= \mathbf{11.45714.}\end{aligned} \tag{18.22}$$

Al resolver esta ecuación para x se obtiene

$$\mathbf{100\,000} - x = e^{\mathbf{11.45714}}. \tag{18.23}$$

Por tanto, la prima máxima es

$$x = 5426. \tag{18.24}$$

Esta persona estaría dispuesta a pagar hasta $426 por costos administrativos a una compañía de seguros, además de la prima de $5000 para cubrir el valor de la pérdida esperada. Incluso cuando paga estos costos, esta persona estará igual de bien que si tiene que afrontar el mundo sin un seguro.

Pregunta: Supongamos que la utilidad de la riqueza hubiera sido lineal. ¿Esta persona estaría dispuesta a pagar algo más que la cantidad actuarialmente justa por el seguro? ¿Qué pasaría si la utilidad es una función convexa de la riqueza?

Medición de la aversión al riesgo

Cuando estudiamos las elecciones económicas en situaciones de riesgo, suele ser conveniente disponer de una medida cuantitativa de qué tanta aversión al riesgo siente una persona. La medida más utilizada de la aversión al riesgo fue desarrollada, inicialmente, por J. W. Pratt en la década de los sesenta.[12] Se define la medida de la aversión al riesgo, $r(W)$, como

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U''(W)}. \tag{18.25}$$

Dado que la característica que define a los individuos que sienten aversión al riesgo es la utilidad marginal decreciente de la riqueza $[U''(W) < 0]$, la medida de Pratt es positiva en estos casos. La medida no varía con respecto a las transformaciones lineales de la función de utilidad y, por tanto, no se ve afectada por el orden von Neumann-Morgenstern que utilicemos.

Aversión al riesgo y primas de seguros

La característica más útil del indicador de la aversión al riesgo de Pratt, tal vez sea que es proporcional a la cantidad que un individuo pagará por asegurarse de rechazar una apuesta justa. Supongamos que las ganancias de una apuesta justa están dadas por la variable aleatoria h (variable que puede ser positiva o negativa). Dado que la apuesta es justa, $E(h) = 0$ (donde E significa "valor esperado"). Asimismo, sea p el monto de la prima del seguro que dejaría al individuo exactamente indiferente entre aceptar la apuesta justa h o pagar p con certeza para evitar la jugada arriesgada:

$$E[U(W + h)] = U(W - p), \tag{18.26}$$

donde W es la riqueza actual del individuo. Ahora ampliamos los dos lados de la ecuación 18.26 utilizando la serie de Taylor.[13] Dado que p es un monto fijo, basta una sencilla aproximación lineal del lado derecho de la ecuación:

$$U(W - p) = U(W) - pU'(W) + \text{ otros términos de orden superior.} \tag{18.27}$$

[12]J. W. Pratt. "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica*, enero/abril de 1964, pp. 122-136.

[13]La serie de Taylor nos ofrece una forma de aproximar toda función diferenciable respecto a un punto dado. Si $f(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes, podremos demostrar que

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + (h^2/2)f''(x) + \text{otros términos de orden superior.}$$

En álgebra, la fórmula punto-pendiente es un sencillo ejemplo de la serie de Taylor.

Para el lado izquierdo es necesaria una aproximación cuadrática para dar cabida a la variabilidad de la jugada arriesgada, h:

$$E[U(W+h)] = E[U(W) + hU'(W) + \frac{h^2}{2}U''(W) \tag{18.28}$$

$$+ \text{ otros términos de orden superior}]$$

$$= U(W) + E(h)U'(W) + \frac{E(h^2)}{2}U''(W) \tag{18.29}$$

$$+ \text{ otros términos de orden superior.}$$

Ahora, recordando que $E(h) = 0$, eliminando los términos de orden superior y empleando la constante k para representar $E(h^2)/2$, podemos igualar las ecuaciones 18.27 y 18.29 como

$$U(W) - pU'(W) \cong U(W) + kU''(W) \tag{18.30}$$

o

$$p \cong -\frac{kU''(W)}{U'(W)} = kr(W). \tag{18.31}$$

Es decir, el monto que el individuo que no quiere riesgos está dispuesto a pagar para evitar una apuesta justa es aproximadamente proporcional a la medida de aversión al riesgo de Pratt.[14] Dado que podemos observar las primas que se pagan por los seguros en el mundo real, es frecuente que éstas sean usadas para estimar los coeficientes de aversión al riesgo de los individuos o para comparar estos coeficientes entre grupos de individuos. Por tanto, es posible emplear la información proveniente del mercado para conocer bastante de las actitudes ante situaciones arriesgadas.

Aversión al riesgo y riqueza

Una interrogante importante sirve para saber si la aversión al riesgo aumenta o disminuye con niveles de mayor riqueza. La intuición nos dice que la disposición a pagar para evitar determinada apuesta justa disminuirá a medida que la riqueza vaya aumentando, porque la utilidad marginal decreciente hará que las posibles pérdidas sean menos graves para los individuos que tienen una gran riqueza. Sin embargo, esta respuesta intuitiva no es necesariamente correcta, porque la utilidad marginal decreciente también hace que las ganancias por ganar jugadas arriesgadas sean menos atractivas. Por tanto, el resultado neto no es determinado, sino que depende de la forma precisa de la función de utilidad. De hecho, si la utilidad de la riqueza es cuadrática,

$$U(W) = a + bW + cW^2, \tag{18.32}$$

donde $b > 0$, $c < 0$, la medida de aversión al riesgo de Pratt es

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{-2c}{b + 2cW}, \tag{18.33}$$

que, en contra de lo que dice la intuición, aumenta a medida que la riqueza va aumentando.

Por otra parte, si la utilidad de la riqueza es logarítmica,

$$U(W) = \ln(W) \qquad (W > 0), \tag{18.34}$$

tendremos

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{1}{W}, \tag{18.35}$$

que, en efecto, disminuye a medida que la riqueza va aumentando.

[14]En este caso, el factor de proporcionalidad también es proporcional a la variación de h. En el ejemplo 18.3 encontrará un ejemplo en el cual esta ecuación encaja exactamente.

La función exponencial de utilidad

$$U(W) = -e^{-AW} = -exp(-AW) \tag{18.36}$$

(donde A es una constante positiva) exhibe una aversión al riesgo constante en todos los rangos de riqueza, porque ahora

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{A^2 e^{-AW}}{Ae^{-AW}} = A. \tag{18.37}$$

Podemos emplear esta característica de la función exponencial de utilidad para presentar algunas estimaciones numéricas de la disposición a pagar para evitar las jugadas arriesgadas, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 18.3

Aversión constante al riesgo

Supongamos que un individuo, cuya riqueza inicial es de W_0 y cuya utilidad está determinada por la función que exhibe una aversión al riesgo constante, afronta una probabilidad del 50% de ganar o perder \$1000. ¿Qué tanto (f) estaría dispuesto a pagar para evitar el riesgo? Para encontrar este valor, hacemos que la utilidad de $W_0 - f$ sea igual a la utilidad esperada de la jugada arriesgada:

$$\begin{aligned} -exp[-A(W_0 - f)] = -0.5exp[-A(W_0 + 1000)] \\ -0.5exp[-A(W_0 - 1000)]. \end{aligned} \tag{18.38}$$

Dado que todos los términos de la ecuación 18.38 contienen el factor $-exp(-AW_0)$ podemos hacer una división para suprimirlos, demostrando así que, para la función exponencial de utilidad, la voluntad a pagar para evitar la incertidumbre es independiente de la riqueza inicial. Ahora, podemos emplear los términos restantes

$$exp(Af) = 0.5exp(-1000A) + 0.5exp(1000A) \tag{18.39}$$

para resolver f en función de distintos valores de A. Si $A = 0.0001$, $f = 49.9$; es decir, una persona con este grado de aversión al riesgo pagaría unos \$50 para evitar una apuesta justa de \$1000. Por otra parte, si $A = 0.0003$, esta persona con mayor aversión al riesgo pagaría $f = 147.8$ para evitar la jugada arriesgada. Dado que la intuición sugiere que estos valores no son irrazonables, las investigaciones empíricas a veces utilizan los valores del parámetro A de aversión al riesgo dentro de estos rangos.

Distribución normal de un riesgo. Ahora podemos combinar la función de utilidad constante de aversión al riesgo y el supuesto de que una persona afronta una amenaza aleatoria contra su riqueza, la cual sigue una distribución normal (véanse las ampliaciones de este capítulo que contienen algunos antecedentes estadísticos de este concepto) para poder llegar a un resultado particularmente simple. En concreto, si la riqueza en riesgo de una persona sigue una distribución normal con una media μ_W y una variación σ_W^2, entonces la función de densidad de probabilidad de la riqueza estará determinada por $f(W) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-z^2/2}$, donde $z = [(W - \mu_W)/\sigma_W]$. Si la función de utilidad de la riqueza de esta persona está determinada por $U(W) = -e^{-AW}$, entonces la utilidad esperada de su riqueza en riesgo estará determinada por

$$E[U(W)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(W)f(W)dW = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int -e^{-AW} e^{-[(W-\mu_W)/\sigma]^2/2} dW. \tag{18.40}$$

Para nuestra sorpresa, esta integración tal vez no sea muy difícil de lograr, aun cuando requiera de bastante práctica. Realizar esta integración y tomar una serie de transformaciones monótonas de la expresión resultante nos lleva al resultado final de que

$$E[U(W)] \cong \mu_W - \frac{A}{2} \cdot \sigma_W^2 \tag{18.41}$$

(*continúa*)

EJEMPLO 18.3 *CONTINUACIÓN*

Por lo tanto, la utilidad esperada es tan sólo una función lineal de los dos parámetros de la función de la densidad de la probabilidad de la riqueza y el parámetro de la aversión al riesgo del individuo (A) determina el tamaño del efecto negativo que la variabilidad tiene en la utilidad esperada. Por ejemplo, supongamos que una persona ha invertido sus fondos de modo que la riqueza tiene un rendimiento esperado de \$100 000, pero una desviación estándar del rendimiento (σ_W) de \$10 000. Por tanto, con la distribución normal, esta persona podría esperar que su riqueza disminuya a menos de \$83 500 alrededor del 5% del tiempo y aumente por encima de \$116 500 una fracción similar del tiempo. Con estos parámetros, la utilidad esperada estará determinada por $E[U(W)] = 100\,000 - \frac{A}{2}(10\,000)^2$. Si $A = 0.0001 = 10^{-4}$, la utilidad esperada estará determinada por $100\,000 - 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot (10^4)^2 = 95\,000$. Por lo tanto, esta persona recibe la misma utilidad de su riqueza en condiciones de incertidumbre que la que obtendría de una riqueza segura de \$95 000. Una persona que siente más aversión al riesgo podría tener $A = 0.0003$ y, en este caso, el "cierto equivalente" de su riqueza sería \$85 000.

Pregunta: Supongamos que esta persona tuviera a su alcance dos formas de invertir su riqueza: la asignación 1: $\mu_W = 107\,000$ $\sigma_W = 10\,000$; y la asignación 2: $\mu_W = 102\,000$ $\sigma_W = 2000$. ¿La actitud de esta persona ante el riesgo, cómo afectaría la asignación que elija de estas dos?[15]

Aversión relativa al riesgo

Es poco probable que la disposición a pagar por evitar una jugada arriesgada dada sea independiente del nivel de riqueza de una persona. Un supuesto más atractivo sería que esta disposición a pagar guarda una proporción inversa con la riqueza y que la expresión

$$rr(W) = Wr(W) = -W\frac{U''(W)}{U'(W)} \tag{18.42}$$

podría ser aproximadamente constante. Según la terminología propuesta por J. W. Pratt,[16] la función $rr(W)$ definida en la ecuación 18.42 se ha denominado *aversión relativa al riesgo*. La función de utilidad del poder

$$U(W) = \frac{W^R}{R} \text{ (para } R < 1, \neq 0) \tag{18.43}$$

y

$$U(W) = \ln W \text{ (para } R = 0)$$

exhibe una aversión al riesgo absoluta decreciente:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{(R-1)W^{R-2}}{W^{R-1}} = -\frac{(R-1)}{W} \tag{18.44}$$

pero una aversión relativa constante al riesgo:

$$rr(W) = Wr(W) = -(R-1) = 1 - R. \tag{18.45}$$

[15]Este ejemplo numérico es una aproximación (a groso modo) de los datos históricos de los rendimientos reales de acciones y bonos, respectivamente, pero los cálculos sólo tienen el propósito de ilustrar el caso. Encontrará más detalles sobre temas de asignación de cartera en las ampliaciones de este capítulo y en el problema 18.8 (así como la referencia contenida en el mismo).

[16]Pratt. "Risk Aversion".

La evidencia empírica[17] suele ser consistente con valores de R de un rango de entre –3 a –1. Por lo tanto, al parecer, los individuos son algo más contrarios al riesgo que lo que implica la función logarítmica de utilidad, aun cuando en muchas aplicaciones esta función proporciona una aproximación razonable. Es necesario destacar que la función de utilidad constante de aversión relativa al riesgo de la ecuación 18.43 tiene la misma forma que la función de utilidad CES descrita por primera vez en el capítulo 3. Esto proporciona cierta intuición geométrica sobre la naturaleza de la aversión al riesgo que se analizará más adelante en este mismo capítulo. La función también ha sido empleada para explorar la "prima de riesgo" que ganan algunas inversiones arriesgadas. Se analiza esta aplicación brevemente en el problema 18.8.

EJEMPLO 18.4

Aversión relativa constante al riesgo

Un individuo que observa un comportamiento que se caracteriza por una función de utilidad constante con aversión relativa al riesgo se preocupará por las ganancias o las pérdidas proporcionales de su riqueza. Por tanto, podemos preguntar a qué tanto de su riqueza inicial (f) estaría esta persona dispuesta a renunciar para evitar una jugada justa, por ejemplo, del 10% de su riqueza inicial. Primero suponemos que $R = 0$ para que la función logarítmica de utilidad sea adecuada. Si hacemos que la utilidad de la riqueza cierta restante de este individuo sea igual a la utilidad esperada de la jugada que arriesga el 10% tendremos

$$\ln[(1-f)W_0] = 0.5 \ln(1.1\ W_0) + 0.5 \ln(0.9 W_0). \qquad (18.46)$$

Dado que los dos términos contienen la riqueza inicial ln W_0, podemos eliminarla de esta expresión:

$$\ln(1-f) = 0.5[\ln(1.1) + \ln(0.9)] = \ln(0.99)^{0.5}$$

de modo que

$$(1-f) = (0.99)^{0.5} = 0.995$$

y

$$f = 0.005. \qquad (18.47)$$

Por tanto, esta persona sacrificará hasta la mitad del 1% de su riqueza para no arriesgar el 10% en la jugada. Podemos emplear un cálculo similar para el caso $R = -2$ de modo que tengamos

$$f = 0.015. \qquad (18.48)$$

Por lo tanto, esta persona que siente más aversión al riesgo estaría dispuesta a renunciar hasta el 1.5% de su riqueza inicial para no tener que arriesgar el 10% en la jugada.

Pregunta: Con la función de aversión relativa constante al riesgo, ¿la disposición de esta persona a pagar para evitar una jugada arriesgada dada (por ejemplo, de 1000) cómo depende de su riqueza inicial?

El planteamiento de la preferencia por un estado y elección en condiciones de incertidumbre

Hasta ahora, el análisis hecho en este capítulo ha ofrecido información relativa a distintas cuestiones, pero parece ser bastante distinto del planteamiento que habíamos adoptado en otros capítulos. Al parecer, hemos perdido el modelo básico de maximización de la utilidad sujeta a una restricción del presupuesto. Por tanto, para poder seguir avanzando en nuestro análisis del

[17]Algunos autores expresan la función de utilidad de la ecuación 18.43 como $U(W) = W^{1-a}/(1-a)$ y pretenden medir $a = 1 - R$, de modo que a es positiva.

comportamiento en situaciones de incertidumbre, desarrollaremos algunas técnicas nuevas que permitirán devolver el análisis de este comportamiento al marco estándar de la teoría de la elección.

Estados del mundo y bienes contingentes

Partimos del supuesto que los resultados de un hecho aleatorio cualquiera pueden ser clasificados en función de una serie de *estados del mundo*. No podemos prever con exactitud qué ocurrirá, por ejemplo, mañana, pero suponemos que sí es posible clasificar, en función de un número fijo de *estados* bien definidos, todos los hechos que podrían ocurrir. Por ejemplo, podríamos recurrir a una aproximación muy general y decir que, mañana, el mundo sólo podrá estar en dos estados; o sea, en "épocas buenas" o en "épocas malas". Podríamos hacer una clasificación mucho más fina de los estados del mundo (incluso millones de estados posibles), pero podemos desarrollar la mayor parte de los fundamentos de la teoría empleando tan sólo dos estados.

Una idea conceptual que podemos desarrollar al mismo tiempo que el concepto de los estados del mundo es la referente a los *bienes contingentes*. Se trata de bienes que sólo se entregarán si se presenta un estado dado en el mundo. "\$1 en épocas buenas" es un ejemplo de un bien contingente que promete al individuo \$1 en épocas buenas, pero nada si mañana se presentaran épocas malas. Incluso podemos, estirando bastante nuestra capacidad intuitiva, pensar que podremos comprar este bien; es decir, podría comprar a alguien la promesa de \$1 si mañana resulta ser una época buena. Dado que mañana podría haber una mala época, este bien probablemente se venderá por menos de \$1. Si también hubiera alguien dispuesto a venderme el bien contingente "\$1 en épocas malas", entonces yo podría asegurar que tendré 1 dólar mañana si compro los dos bienes contingentes: "\$1 en épocas buenas" y "\$1 en épocas malas".

Análisis de la utilidad

El análisis de las elecciones que maximizan la utilidad, de bienes contingentes, tiene una forma muy similar a la empleada antes para las elecciones. La principal diferencia es que, tras ocurrido el hecho, la persona sólo habrá obtenido un bien contingente, dependiendo de si la época fue buena o mala. Sin embargo, antes de que se resuelva la incertidumbre, el individuo tiene que elegir de entre dos bienes contingentes y probablemente compre un poco de ambas, porque no sabe cuál estado se presentará. Se denotarán estos dos bienes contingentes como W_b (riqueza en épocas buenas) y W_m (riqueza en épocas malas). Suponiendo que esta utilidad es independiente de la situación que se pudiera presentar[18] y que este individuo cree que la probabilidad de que haya una época buena es π, la utilidad esperada asociada a estos dos bienes contingentes es

$$V(W_b, W_m) = \pi\, U(W_b) + (1 - \pi)\, U(W_m). \tag{18.49}$$

Ésta es la magnitud que el individuo quiere maximizar, dada su riqueza inicial, W.

Precios de los bienes contingentes

Suponiendo que esta persona, en una época buena, puede comprar 1 dólar de riqueza por p_b y, en una época mala, 1 dólar de riqueza por p_m, su restricción presupuestaria será

$$W = p_b W_b + p_m W_m. \tag{18.50}$$

La razón de precios p_b/p_m muestra cómo esta persona puede intercambiar dólares de riqueza de una época buena por dólares de riqueza de una época mala. Por ejemplo, si $p_b = 0.80$ y $p_m = 0.20$, el sacrificio de \$1 de riqueza en la época buena permitiría que esta persona comprara un bien

[18]Este supuesto es insostenible en situaciones en las cuales la utilidad de la riqueza depende del estado del mundo. Por ejemplo, la utilidad que ofrece determinado nivel de riqueza podría variar dependiendo de que un individuo esté "enfermo" o "sano". Sin embargo, aquí no contemplaremos estas complejidades. En la mayor parte de nuestro análisis, supondremos que la utilidad de la riqueza es cóncava $U'(W) > 0$, $U''(W) < 0$.

contingente que ofrece $4 de riqueza en caso de que se presente una época mala. Por supuesto que el hecho de que este intercambio mejore la utilidad dependerá de las circunstancias concretas de la situación. No obstante, la posibilidad de analizar problemas que involucran incertidumbre como si fueran estados en los cuales se intercambian distintos bienes contingentes es un elemento clave que ofrece el modelo de las preferencias por el estado.

Mercados justos para los bienes contingentes

Si los mercados de los títulos de riqueza contingente están bien desarrollados y si existe una coincidencia general en la probabilidad de que se presente una época buena (π), los precios de estos títulos serán actuarialmente justos; es decir, serán iguales a las probabilidades subyacentes:

$$\begin{aligned} p_b &= \pi \\ p_m &= (1-\pi), \end{aligned} \tag{18.51}$$

Luego entonces, la proporción de precios p_b/p_m simplemente reflejará las probabilidades de que se presenten épocas buenas:

$$\frac{p_b}{p_m} = \frac{\pi}{1-\pi}. \tag{18.52}$$

En nuestro ejemplo anterior, si $p_b = \pi = 0.8$ y $p_m = (1-\pi) = 0.2$, entonces $\pi/(1-\pi) = 4$. En este caso, expresaríamos la probabilidad de que haya una época buena como de "4 a 1". Los mercados justos de títulos contingentes, como los mercados de seguros, también reflejarán esta probabilidad. La "probabilidad" adjudicada a los caballos en una carrera ofrece una buena analogía. Esta probabilidad es "justa" cuando refleja la verdadera probabilidad de que diversos caballos ganen.

Aversión al riesgo

Ahora estamos en posición de demostrar cómo se manifiesta la aversión al riesgo en el modelo de preferencias por situaciones. En concreto, podemos demostrar que, si los mercados de títulos contingentes son justos, el individuo que maximiza la utilidad optará por una situación en la cual $W_b = W_m$; es decir, arreglará las cosas de tal manera que la riqueza que obtenga al final de cuentas sea la misma, independientemente de la situación que se presente.

Como en los capítulos anteriores, la maximización de la utilidad sujeta a una restricción presupuestaria exige que este individuo haga que la *TMS* de W_b por W_m sea igual a la proporción de los precios de estos "bienes":

$$TMS = \frac{\partial V/\partial W_b}{\partial V/\partial W_m} = \frac{\pi U'(W_b)}{(1-\pi)U'(W_m)} = \frac{p_b}{p_m}. \tag{18.53}$$

Dado el supuesto de que los mercados de títulos contingentes son justos (ecuación 18.52), esta condición de primer orden se reduce a

$$\frac{U'(W_b)}{U'(W_m)} = 1$$

o[19]

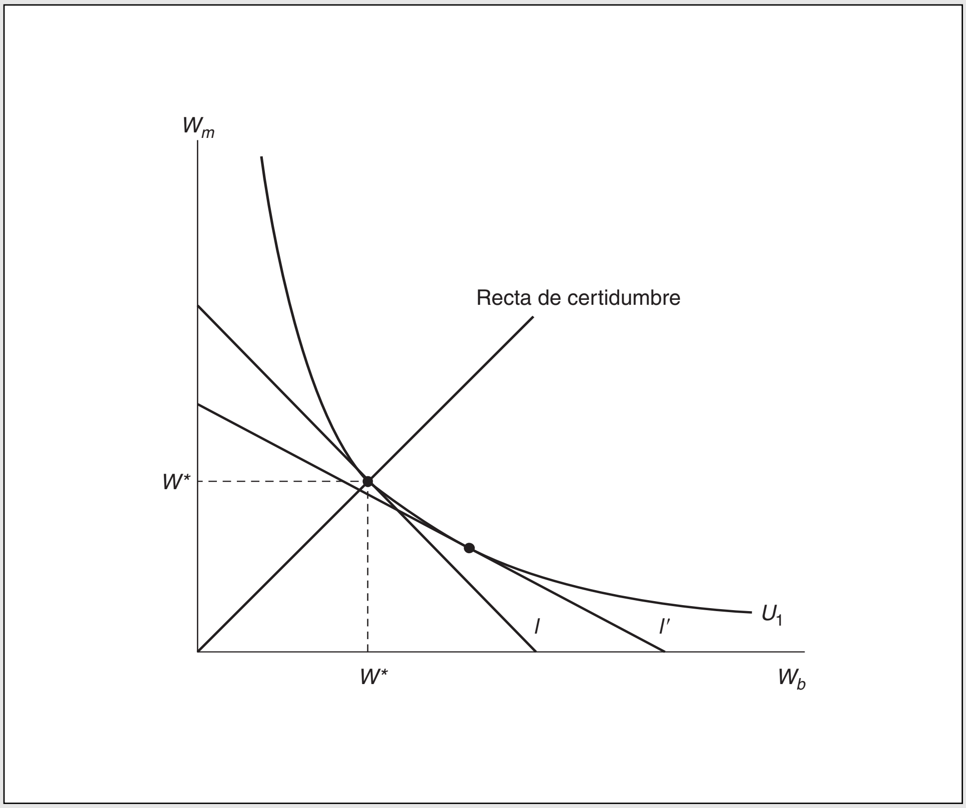
$$W_b = W_m. \tag{18.54}$$

Por lo tanto, este individuo, ante los mercados justos de los títulos contingentes de riqueza, sentirá aversión al riesgo y optará por asegurarse de que tendrá el mismo nivel de riqueza independientemente de la situación que se presente.

[19]Nótese que este paso exige que la utilidad sea independiente del estado y que $U'(W) > 0$.

FIGURA 18.2 **Aversiones al riesgo en el modelo de preferencias por el estado**

La línea I representa la restricción presupuestaria del individuo para los títulos de riqueza contingentes: $W = p_b W_b + p_m W_m$. Si el mercado de los títulos contingentes es actuarialmente justo $[p_b/p_m = \pi/(1-\pi)]$, la utilidad se maximizará en la recta de certidumbre, donde $W_b = W_m = W^*$. Si los precios no son actuarialmente justos, la restricción presupuestaria se parecería más a I' y la utilidad se maximizará en un punto donde $W_b > W_m$.



Un análisis gráfico

La figura 18.2 ilustra la aversión al riesgo con una gráfica. La restricción presupuestaria de este individuo (I) se muestra como una tangente a la curva de indiferencia U_1 donde $W_b = W_m$; es decir, un punto sobre la "recta de certidumbre" en la cual la riqueza (W^*) es independiente del estado que se presente en el mundo. En W^* la pendiente de la curva de indiferencia $[\pi/(1-\pi)]$ es precisamente igual a la razón de precios p_b/p_m.

Si el mercado de títulos de riqueza contingentes no fuera justo, entonces la maximización de la utilidad podría no darse sobre la recta de certidumbre. Por ejemplo, supongamos que $\pi/(1-\pi) = 4$ pero que $p_b/p_m = 2$ porque asegurar la riqueza en una época mala es sumamente caro. En este caso, la restricción presupuestaria se parecería a la recta I' de la figura 18.2 y la maximización de la utilidad se produciría por debajo de la recta de certidumbre.[20] En este caso, este individuo se arriesgaría un poco al optar por $W_b > W_m$, porque los títulos de W_m son relativamente caros. El ejemplo 18.5 muestra la utilidad de este planteamiento para evaluar algunas de las alternativas que podrían estar disponibles.

[20]Dado que la *TMS* sobre la recta de certidumbre siempre es $\pi/(1-\pi)$, como muestra la ecuación 18.54, las tangentes con una pendiente menos pronunciada que ésta se presentarán por debajo de la recta de certidumbre.

EJEMPLO 18.5

Seguros en el modelo de preferencias por el estado

Podemos ilustrar el planteamiento de las preferencias por el estado replanteando el caso de los seguros de automóviles del ejemplo 18.2 como un problema en el cual hay dos bienes contingentes, la "riqueza sin robo" (W_b) y la "riqueza con robo" (W_m). Si, al igual que antes, suponemos una utilidad logarítmica y que la probabilidad de un robo (es decir, $1 - \pi$) es 0.25, tendremos

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada} &= 0.75\,U(W_b) + 0.25\,U(W_m) \\ &= 0.75 \ln W_b + 0.25 \ln W_m. \end{aligned} \tag{18.55}$$

Si el individuo no emprende acción alguna, la utilidad estará determinada por la dotación inicial de riqueza, $W_b^* = 100\ 000$, $W_m^* = 80\ 000$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada} &= 0.75 \ln 100\ 000 + 0.25 \ln 80\ 000 \\ &= 11.45714. \end{aligned} \tag{18.56}$$

Para analizar los intercambios que se alejan de estas dotaciones iniciales, expresamos la restricción presupuestaria en términos de los precios del bien contingente, p_b y p_m:

$$p_b W_m^* + p_b W_m^* = p_b W_m + p_b W_m. \tag{18.57}$$

Suponiendo que estos precios son iguales a las probabilidades de las dos situaciones ($p_b = 0.75$, $p_m = 0.25$) podemos expresar esta restricción como

$$0.75(100\ 000) + 0.25(80\ 000) = 95\ 000 = 0.75\,W_b + 0.25\,W_m; \tag{18.58}$$

es decir, el valor esperado de la riqueza es \$95 000, y esta persona asignará esta cantidad entre W_b y W_m. Ahora, la maximización de la utilidad respecto a esta restricción del presupuesto dará $W_b = W_m = 95\ 000$. Por tanto, el individuo se moverá hacia la recta de certidumbre y recibirá una utilidad esperada de

$$\text{utilidad esperada} = \ln 95\ 000 = 11.46163, \tag{18.59}$$

una clara mejora respecto a la alternativa de no hacer nada. Para lograr esta mejora, esta persona debe ser capaz de transferir \$5000 de riqueza en una época buena (sin robo) y convertirlos en \$15 000 de riqueza adicional en caso de una época mala (robo). Un contrato de seguro justo permitirá este intercambio, porque costaría \$5000 pero devolvería \$20 000 en caso de que ocurriera un robo, pero nada si no se produce el robo. Nótese aquí que el cambio de riqueza prometido por el seguro $dW_m/dW_b = 15\ 000/-5000 = -3$; es exactamente igual al lado negativo de la razón de probabilidades $-\pi/(1-\pi) = -0.75/0.25 = -3$.

Una póliza con cláusula de deducible. Diversos contratos de seguros podrían mejorar más la utilidad en esta situación, pero no todos ellos llevarían a elecciones sobre la recta de certidumbre. Por ejemplo, una póliza que costara \$5200 y devolviera \$20 000 en caso de robo permitiría que esta persona alcanzara la recta de certidumbre con $W_b = W_m = 94\ 800$ y

$$\text{utilidad esperada} = \ln 94\ 800 = 11.45953, \tag{18.60}$$

lo cual también excede a la utilidad que se puede obtener con la dotación inicial. Una póliza que costara \$4900 y que exigiera que el individuo pague los primeros \$1000 de un siniestro por robo daría

$$\begin{aligned} W_b &= 100\ 000 - 4900 = 95\ 100 \\ W_m &= 80\ 000 - 4900 + 19\ 000 = 94\ 100 \end{aligned} \tag{18.61}$$

(*continúa*)

EJEMPLO 18.5 *CONTINUACIÓN*

y

$$\begin{aligned} \textbf{utilidad esperada} &= 0.75 \ln 95\,100 + 0.25 \ln 94\,100 \\ &= 11.46004. \end{aligned} \tag{18.62}$$

Si bien esta póliza no permite que el individuo alcance la recta de certidumbre, sí mejora la utilidad. El seguro no necesariamente debe ser completo para ofrecer la promesa de una mayor utilidad.

Pregunta: ¿Cuál es el monto máximo que un individuo estaría dispuesto a pagar por una póliza de seguro con la cual deba absorber los primeros $1000 de un siniestro?

Aversión al riesgo y primas por riesgo

El modelo de preferencias por los estados también es especialmente útil para analizar la relación entre la aversión al riesgo y la disposición de los individuos a pagar por el riesgo. Consideremos el caso de dos personas, que empiezan ambas con determinada riqueza, W^*. Cada una intenta maximizar una función de utilidad esperada de forma

$$V(W_b, W_m) = \pi \frac{W_b^R}{R} + (1 - \pi) \frac{W_m^R}{R}. \tag{18.63}$$

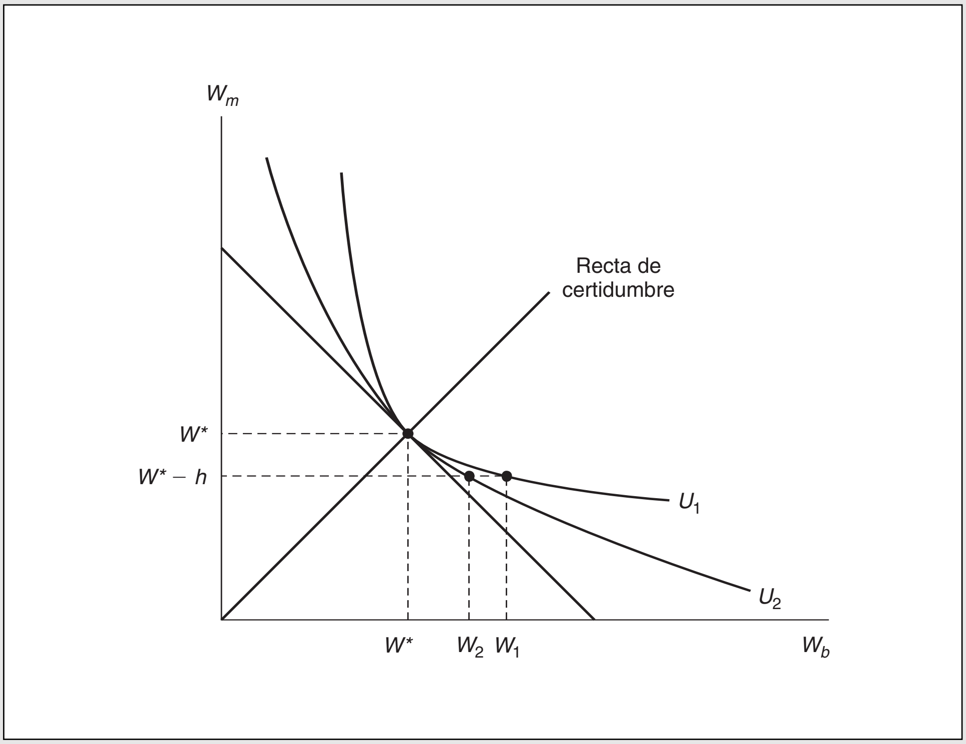
En este caso, la función de utilidad constante muestra una aversión relativa al riesgo (véase el ejemplo 18.4). Nótese también que la función es muy similar a la función de utilidad CES que analizamos en el capítulo 3 y en otras partes del libro. En este caso, el parámetro R determina el grado de la aversión al riesgo y también el grado de curvatura de las curvas de indiferencia que implica la función. Un individuo que siente una gran aversión al riesgo tendrá un valor negativo muy alto de R y curvas de indiferencia muy pronunciadas, como la curva U_1 que muestra la figura 18.3. Una persona que tolera más riesgo tendrá un mayor valor de R y curvas de indiferencia más planas (como U_2).[21]

Supongamos ahora que estos individuos afrontan la perspectiva de perder h dólares de riqueza en una época mala. Este riesgo sería aceptable para el individuo 2 si la riqueza en una época buena aumentara de W^* a W_2. Sin embargo, en el caso del individuo que siente enorme aversión al riesgo, la riqueza tendría que aumentar hasta W_1 para que el riesgo fuera aceptable. Por tanto, la diferencia entre W_1 y W_2 indica el efecto que la aversión al riesgo tiene en la disposición a asumir riesgos. Algunos de los problemas de este capítulo recurren a esta gráfica para mostrar la relación entre las preferencias (tal como refleja la función de utilidad de la ecuación 18.63) y el comportamiento en situaciones de riesgo.

[21]La tangencia de U_1 y U_2 en W^* está garantizada, porque la *TMS* a lo largo de la recta de certidumbre está dada por $\pi/(1 - \pi)$ independientemente del valor de R.

FIGURA 18.3 **Aversión al riesgo y primas por riesgo**

La curva de indiferencia U_1 representa las preferencias de una persona que siente gran aversión al riesgo, mientras que la persona con preferencias representadas por la curva U_2 está dispuesta a asumir más riesgos. La persona 2, cuando tiene que asumir el riesgo de perder h en una época mala, exigirá una compensación de $W_2 - W^*$ en épocas buenas, mientras que la persona 1 exigirá una cantidad superior, dada por $W_1 - W^*$.



RESUMEN

En este capítulo hemos presentado material de introducción que permitirá estudiar el comportamiento del individuo en situaciones de incertidumbre. Los resultados básicos que hemos visto son:

- En situaciones de incertidumbre, a los individuos les preocupa la utilidad esperada asociada a diversos resultados. Si obedecen los axiomas de von Neumann-Morgenstern, harán elecciones que les permitan maximizar su utilidad esperada.
- Si suponemos que los individuos tienen una utilidad marginal decreciente de la riqueza, también sentirán aversión al riesgo. Es decir, se negarán a tomar apuestas que son actuarialmente justas.
- Los individuos que sienten aversión al riesgo también querrán asegurarse totalmente contra los hechos inciertos si las primas de seguros son actuarialmente justas. Podrían estar dispuestos a pagar primas actuarialmente injustas para no tener que correr riesgos.

- Podemos analizar las decisiones en condiciones de incertidumbre dentro de un marco teórico de elecciones si hacemos un planteamiento de preferencias por el estado para escoger entre bienes contingentes. Con este modelo, si las preferencias de un individuo son independientes de la situación y si los precios son actuarialmente justos, los individuos preferirán las asignaciones a lo largo de su "recta de certidumbre" que garantizan el mismo nivel de riqueza, independientemente de la situación que se presente.

PROBLEMAS

18.1

George apuesta $100 000 a favor de los Bulls pensando que ganarán el campeonato de la NBA. Si George tiene una función logarítmica de utilidad de la riqueza y si su riqueza actual es de $1 000 000, ¿cuál será la probabilidad mínima que asigna al posible triunfo de los Bulls?

18.2

Demuestre que si la función de utilidad de la riqueza de un individuo es convexa (en vez de cóncava, como se muestra en la figura 18.1), éste preferirá jugadas justas, en lugar de la certidumbre de los ingresos, y que incluso estaría dispuesto a aceptar jugadas arriesgadas relativamente injustas. ¿Considera usted que este tipo de comportamiento amante del riesgo es frecuente? ¿Qué factores tenderían a limitar la posibilidad de que se produzca?

18.3

Una persona compra una docena de huevos y tiene que llevarlos a casa. Llegar a casa no le cuesta nada, pero existe un 50% de probabilidad de que todos los huevos que transporte en uno de los viajes se rompan por el camino. Analiza dos estrategias posibles:

Estrategia 1: Hacer un solo viaje con los 12 huevos.

Estrategia 2: Hacer dos viajes con seis huevos en cada uno.

a. Haga una lista de todos los resultados posibles de estas dos estrategias y de las probabilidades de estos resultados. Demuestre que, con una estrategia u otra, en promedio quedarán seis huevos sin romper.

b. Elabore una gráfica para demostrar la utilidad que este individuo puede obtener con cada estrategia. ¿Cuál estrategia sería preferible?

c. ¿Podría aumentar la utilidad todavía más si hiciera más de dos viajes? Si los viajes tuvieran un costo, ¿cómo se vería afectada esta posibilidad?

18.4

Supongamos que hay una probabilidad del 50% de que un individuo que siente aversión al riesgo y que tiene una riqueza actual de $20 000 se enferme y registre una pérdida de $10 000.

a. Calcule el costo de un seguro actuarialmente justo para esta situación y emplee una gráfica de la utilidad de la riqueza (como la que muestra la figura 18.1) para demostrar que el individuo preferirá un seguro justo que cubra este siniestro, en lugar de aceptar la jugada arriesgada sin seguro.

b. Supongamos que hay dos tipos de pólizas de seguro disponibles:

   1) Una póliza justa que cubre un siniestro completo.

   2) Una póliza justa que tan sólo cubre la mitad de un siniestro cualquiera.

   Calcule el costo del segundo tipo de póliza y demuestre que, por lo general, el individuo la considerará inferior a la del primer tipo.

18.5

La Sra. Fogg está haciendo planes para un viaje alrededor del mundo, en el cual piensa gastar \$10 000. La utilidad de este viaje es una función de cuánto gaste, de hecho, en el mismo (Y), dada por

$$U(Y) = \ln Y.$$

a. Si existe una probabilidad del 25% de que la Sra. Fogg extravíe \$1000 de su dinero durante el viaje, ¿cuál es la utilidad esperada del viaje?

b. Supongamos que la Sra. Fogg puede comprar un seguro contra el extravío de \$1000 (por ejemplo, comprando cheques de viajero) a una prima "actuarialmente justa" de \$250. Demuestre que su utilidad esperada es mayor si compra este seguro que si asume el riesgo de extraviar los \$1000 sin seguro.

c. ¿Cuál es el monto máximo que la Sra. Fogg estaría dispuesta a pagar para asegurar sus \$1000?

18.6

Cuando alguien decide estacionar su auto en una zona prohibida, sabe que la probabilidad de ser multado es p y que la multa que tendrá que pagar será f. Supongamos que todos los individuos sienten aversión al riesgo (es decir, $U''(W) < 0$, donde W es la riqueza del individuo).

¿Qué será más eficaz para evitar que la gente se estacione en una zona prohibida: un incremento proporcional de la probabilidad de ser multado o un incremento proporcional de la multa impuesta? [*Pista*: emplee la aproximación de la serie de Taylor aproximación de la serie

$$U(W - f) = U(W) - fU'(W) + \frac{f^2}{2}U''(W).]$$

18.7

Un agricultor considera que hay una probabilidad del 50% de que la próxima temporada sea excepcionalmente lluviosa. Su función de utilidad esperada tiene la forma

$$\text{utilidad esperada} = \frac{1}{2}\ln Y_{NR} + \frac{1}{2}\ln Y_R,$$

donde Y_{NR} y Y_R representan el ingreso del agricultor, respectivamente, en la situación de "lluvia normal" o la de "muy lluvioso".

a. Supongamos que el agricultor debe elegir entre dos cultivos que prometen las siguientes perspectivas de ingresos:

Cultivo	Y_{NR}	Y_R
Trigo	\$28 000	\$10 000
Maíz	19 000	15 000

¿Cuál cultivo sembrará?

b. Supongamos que el agricultor puede sembrar un cultivo en una mitad de su campo y el otro en la otra mitad. ¿Elegiría esta opción? Explique su resultado.

c. ¿Qué combinación de trigo y maíz proporcionaría la mayor utilidad esperada a este agricultor?

d. ¿Un seguro para el cultivo del trigo, a disposición de agricultores que sólo cultivan trigo, que cuesta \$4000 y ofrece pagar \$8000 en caso de que la temporada sea demasiado lluviosa, provocará que el agricultor decida cambiar de cultivo?

18.8

Para la función de utilidad constante con aversión relativa al riesgo (ecuación 18.63) hemos demostrado que el grado de aversión al riesgo es medido por $(1 - R)$. En el capítulo 3 demostramos que la elasticidad de sustitución para la misma función está dada por $1/(1 - R)$. Por consiguiente, una medida es recíproca de la otra. A partir de este resultado, explique las preguntas siguientes:

a. ¿La aversión al riesgo por qué guarda una relación con la disposición de un individuo a sustituir riqueza de una situación del mundo a otra? ¿Qué fenómeno captan estos dos conceptos?

b. ¿Cómo interpretaría usted los casos polares $R = 1$ y $R = -\infty$ en el marco de aversión al riesgo y en el de sustitución?

c. Un aumento del precio de los títulos contingentes en épocas malas (P_m) producirá efectos ingreso y sustitución en la demanda de W_b y de W_m. Si el individuo tiene un presupuesto fijo para repartir entre estos dos bienes, ¿ello cómo afectaría la cantidad que elija de estos bienes? ¿Por qué podría aumentar o disminuir W_b dependiendo del grado de aversión al riesgo que exhiba este individuo?

d. Supongamos que los datos empíricos sugieren que un individuo requiere un rendimiento promedio del 0.5% para poder convencerle de que coloque su dinero en una inversión que tiene el 50% de probabilidades de ganar o perder un 5%. Es decir, esta persona obtiene la misma utilidad de W_0 que de una apuesta igual a $1.055\ W_0$ o a $0.955\ W_0$.

   i. ¿Qué valor de R es coherente con este comportamiento?

   ii. ¿Qué rendimiento promedio exigirá esta persona para aceptar la probabilidad del 50% de ganar o perder un 10%?

   Nota: esta parte requiere resolver ecuaciones no lineales, por lo cual bastarán las soluciones aproximadas. La comparación del canje entre riesgo y rendimiento ilustra lo que se conoce como "la paradoja de la prima de capital" porque, al parecer, las inversiones arriesgadas ofrecen una cantidad mucho mayor de la que sería congruente con el grado de aversión al riesgo que sugieren otros datos. Véase N. R. Kocherlakota. "The Equity Premium: It's Still a Puzzle", *Journal of Economic Literature*, marzo de 1996, pp. 42-71.

18.9

Podemos analizar la inversión en activos arriesgados, dentro del marco de las preferencias por las situaciones, suponiendo que W^* dólares invertidos en un activo con un rendimiento seguro, r, producirán $W^*(1 + r)$ en las dos situaciones del mundo, mientras que una inversión en un activo arriesgado producirá $W^*(1 + r_b)$ en épocas buenas y $W^*(1 + r_m)$ en épocas malas (donde $r_b > r > r_m$).

a. Elabore una gráfica de los resultados de las dos inversiones.

b. Demuestre que su gráfica podría ilustrar una "cartera mixta", que incluya tanto activos con riesgo como activos libres de riesgo. ¿Cómo mostraría usted la parte de la riqueza invertida en el activo con riesgo?

c. Demuestre que las actitudes de los individuos hacia el riesgo determinarán la combinación de activos arriesgados y activos sin riesgo que poseerán. ¿En qué caso no tendrán activos con riesgo?

d. Si la utilidad constante de un individuo tiene la forma de aversión relativa al riesgo (ecuación 8.62), explique por qué esta persona no cambiará la parte de activos con riesgo que tiene a medida que aumenta su riqueza.[22]

---

[22]Este problema y el siguiente han sido tomados de J. E. Stiglitz. "The Effects of Income, Wealth, and Capital Gains Taxation in Risk Taking", *Quarterly Journal of Economics*, mayo de 1969, pp. 263-283.

18.10

Supongamos que los rendimientos de los activos del problema 18.9 están sujetos a impuestos.

a. Demuestre, con las condiciones del problema 18.9, por qué un impuesto proporcional sobre la renta no afectará la parte de la riqueza que se asigne a los activos arriesgados.

b. Supongamos que sólo el rendimiento de los activos seguros está sujeto al impuesto proporcional sobre la renta. ¿Esto cómo afectaría la parte de la riqueza que se tendría en activos arriesgados? ¿Qué inversionistas se verían más afectados por este impuesto?

c. ¿Su respuesta al inciso b cómo cambiaría si los rendimientos de todos los activos estuvieran sujetos a un impuesto proporcional sobre la renta?

(*Nota:* este problema requiere que calcule la asignación de la riqueza *antes de impuestos* que permitirá maximizar la utilidad *después de impuestos*).

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Arrow, K. J. "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing", *Review of Economic Studies 31*, 1963, pp. 91-96.
Presenta el concepto de la preferencia por la situación e interpreta los valores como títulos sobre bienes contingentes.

———. "Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care", *American Economic Review 53*, 1963, pp. 941-973.
Excelente explicación de las implicaciones que los seguros tienen para el bienestar. Contiene un apéndice de matemáticas, claro y conciso. Es aconsejable leerlo al mismo tiempo que el artículo de Pauly sobre el riesgo moral (véase el capítulo 10).

Bernoulli, D. "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk", *Econometrica 22*, 1954, pp. 23-36.
Reimpresión del análisis clásico de la paradoja de San Petersburgo.

Friedman, M. y L. J. Savage. "The Utility Analysis of Choice", *Journal of Political Economy 56*, 1948, pp. 279-304.
Analiza por qué los individuos podrían hacer jugadas arriesgadas y también comprar seguros. Lectura muy agradable.

Huang, Chi-fu y R. H. Litzenberger. *Foundations for Financial Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
Contiene una buena explicación de las medidas del "dominio estocástico" y su relación con la aversión al riesgo.

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston y Jerry R. Green. *Microeconomic Theory,* Oxford University Press, Nueva York, 1995, cap. 6.
Ofrece un magnífico resumen de los fundamentos de la teoría de la utilidad esperada. También analiza con detalle el supuesto de la "independencia de las situaciones" y demuestra que algunos conceptos de la aversión al riesgo también se aplican a casos de dependencia de las situaciones.

Pratt, J. W. "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica 32* (1964), pp. 122-136.
Desarrollo teórico de las medidas de la aversión al riesgo. Tratamiento bastante técnico, pero fácil de leer.

Rothschild, M. y J. E. Stiglitz. "Increasing Risk: 1. A Definition", *Journal of Economic Theory 2*, 1970, pp. 225-243.
Desarrolla una definición económica de lo que significa que una jugada sea más "arriesgada" que otra. Un artículo posterior publicado en Journal of Economic Theory *presenta ejemplos económicos.*

Silberberg, E. y W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis,* 3a. ed., Irwin/McGraw Hill, Boston, 2001.
El capítulo 13 es una buena introducción a la relación entre los conceptos estadísticos y la maximización de la utilidad esperada. También muestra, con detalle, la integración mencionada en el ejemplo 18.3.

AMPLIACIONES

Teoría de cartera y los precios de riesgo

En el capítulo 18 hemos visto que los individuos pagarán cierta cantidad para evitar la incertidumbre y que su grado de sacrificio dependerá de sus actitudes ante el riesgo. Esto sugiere que las relaciones entre muchos individuos crearán un mercado de "riesgos" en el cual la incertidumbre se puede reducir pagando un "precio". Por lo tanto, el problema consiste en encontrar una forma de cuantificar el riesgo y que permita analizar cómo fijar su precio. Los modelos mejor desarrollados de este proceso probablemente son los que encontramos en el estudio de cómo se fijan los precios de los activos de capital, en cuyo caso los economistas han analizado ampliamente la relación entre el rendimiento esperado que ofrece un activo y los riesgos asociados a ese rendimiento. Aquí se resumirán brevemente algunas de las ideas principales de este vasto tema. Primero serán necesarios unos pocos preliminares estadísticos.

Fundamentos estadísticos

Decimos que una variable x es una *variable aleatoria* si asume diversos valores con probabilidades específicas. La "función de densidad probabilística" de x (que denotamos con $f(x)$) indica la probabilidad de que x asuma valores de una banda estrecha, dx. Una función cualquiera servirá como función de densidad probabilística siempre y cuando

$$f(x) \geq 0$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad \text{(i)}$$

Los estudiosos de la estadística han empleado una amplia variedad de estas funciones para explicar observaciones empíricas. La más útil de ellas con seguridad es la función normal (o gausiana)

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad \text{(ii)}$$

que tiene la conocida forma de campana, alcanzando la simetría en torno al punto cero. Esta función concreta ha desempeñado un papel central en el desarrollo de la teoría de cómo se fijan los precios del riesgo y en muchos otros campos de la estadística.

En el caso de una variable aleatoria cualquiera, x, la *media* (o el valor esperado) se define como

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad \text{(iii)}$$

y definimos la variación de x como

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)dx. \quad \text{(iv)}$$

La raíz cuadrada de esta variación (denotada por σ_x) se conoce como la desviación estándar de x.

En la distribución normal, en la ecuación ii, es relativamente sencillo demostrar que $\mu_z = 0$, $\sigma_z^2 = \sigma_z = 1$. Podemos generalizar esta función señalando que si

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \quad \text{(v)}$$

tiene la función de distribución en la ecuación ii, se dice que la variable x tiene una distribución normal con una media de μ_x y una desviación estándar de σ_x. Por tanto, la distribución de x está por completo determinada por los dos parámetros μ_x y σ_x.

Si x_i y x_j son dos variables aleatorias, se define la *covariación* entre ellas como

$$\sigma_{ij} = E(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_x)(x_j - \mu_x)f(x_i, x_j)dx_i dx_j. \quad \text{(vi)}$$

Si x_i y x_j tienden a aumentar y a disminuir juntas, σ_{ij} será un valor positivo. Si estas variables tienden a moverse en sentido opuesto, σ_{ij} será negativa.

Si z representa un promedio ponderado de dos variables aleatorias, x_i y x_j,

$$z = \alpha x_i + (1 - \alpha)x_j \quad \text{(vii)}$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces, la aplicación de las distintas definiciones demuestra que

$$\mu_z = \alpha\mu_i + (1 - \alpha)\mu_j \quad \text{(viii)}$$

y

$$\sigma_z^2 = \alpha^2 \sigma_i^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_j^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{ij}. \quad \text{(ix)}$$

Encontrará un desarrollo más extenso de estos conceptos en Freund (1992) o Hoel (1984) o en cualquier otro texto de introducción a la estadística matemática. Aquí empleamos estos conceptos suponiendo que el rendimiento de los activos financieros (x_i) tiene una distribución normal. La media de x_i (μ_i) indica el rendimiento esperado del activo i, mientras que, como veremos, la desviación estándar de x_i (σ_i) es un punto de partida para explicar el riesgo asociado a ese activo. Esta variabilidad del rendimiento es la que pretenden evitar los inversionistas que sienten aversión al riesgo.

A18.1 Diversificación de la cartera

La ecuación ix ofrece la lógica para la diversificación de carteras. Incluso si la distribución de los rendimientos de dos activos es idéntica ($\mu_i = \mu_j$, $\sigma_i = \sigma_j$) la combinación de ambos en una cartera puede ofrecer una combinación más favorable de riesgo y rendimiento. En caso que los rendimientos de los activos sean independientes, por ejemplo ($\sigma_{ij} = 0$), una ponderación de igualdad nos daría

$$\mu_z = 0.5\mu_1 + 0.5\mu_2 = \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{(x)}$$

$$\sigma_z^2 = 0.25\sigma_1^2 + 0.25\sigma_2^2 = 0.5\sigma_1^2 = 0.5\sigma_2^2 \qquad \text{(xi)}$$

$$\sigma_z = 0.707\sigma_1 = 0.707\sigma_2, \qquad \text{(xii)}$$

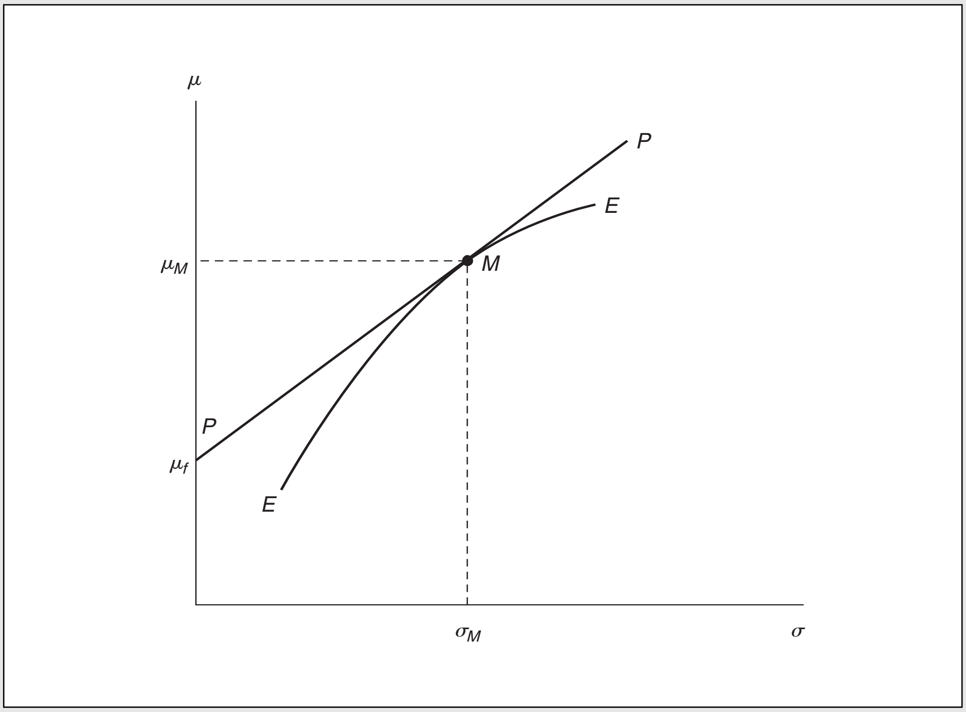
lo cual proporciona el mismo rendimiento que tener uno de los activos individualmente con un menor riesgo. Si los activos tuvieran una covariación negativa ($\sigma_{ij} < 0$), entonces tener los dos ofrecería incluso mayores ventajas de reducción del riesgo.

A18.2 Carteras eficientes

Con muchos activos, el problema de asignación en la cartera consiste en elegir pesos para los activos de forma que minimicen la desviación estándar de la cartera para cada posible rendimiento esperado. Una solución a este problema de optimización ofrece una frontera de eficiencia como la que representa *EE* en la figura A18.1.

FIGURA A18.1 **Carteras eficientes**

La frontera *EE* representa combinaciones óptimas de activos arriesgados, las cuales minimizan la desviación estándar de la cartera, σ, en el caso de cada rendimiento esperado, μ. Un activo sin riesgos, con un rendimiento μ_f ofrece a los inversionistas la oportunidad de tener carteras mixtas a lo largo de *PP* las cuales combinan este activo sin riesgos con la cartera del mercado, *M*.



Las carteras que están debajo de esta frontera son inferiores a las que están sobre ella, porque ofrecen rendimientos esperados más bajos para un grado de riesgo cualquiera. Sharpe (1970) explica las matemáticas necesarias para calcular la frontera *EE*.

Fondos mutualistas

El concepto de eficiencia de la cartera ha sido muy aplicado al estudio de los fondos mutualistas. Por lo general, los fondos mutualistas constituyen una buena respuesta a las necesidades de diversificación de los pequeños inversionistas. Como estos fondos reúnen los fondos de muchos individuos pueden lograr economías de escala en los costos de transacción y de administración. Esto permite que los propietarios de los fondos compartan la fortuna de una variedad de acciones mucho mayor que la que podrían disfrutar si cada uno actuara por su cuenta. No obstante, los administradores de los fondos de inversión tienen sus propios incentivos, por lo cual las carteras que tienen no siempre representan a la perfección las actitudes que sus clientes tienen hacia el riesgo. Por ejemplo, Scharfstein y Stein (1990) desarrollan un modelo que demuestra por qué los administradores de los fondos mutualistas tienen incentivos para "seguir a la manada" cuando escogen sus inversiones. Otros estudios, como la investigación clásica de Jensen (1968), consideran que los administradores de fondos mutualistas rara vez son capaces de obtener rendimientos adicionales lo bastante grandes como para compensar los gastos que cobran a los inversionistas. En años recientes, esto ha llevado a muchos compradores de fondos mutualistas a favorecer fondos "indexados" que simplemente buscan duplicar el promedio del mercado (como el índice de las 500 acciones de Standard & Poor's). Estos fondos tienen gastos muy reducidos y, por tanto, permiten a los inversionistas lograr la diversificación a un costo mínimo.

A18.3 Separación de carteras

Si existe un activo libre de riesgos, con un rendimiento esperado μ_f y $\sigma_f = 0$, las carteras óptimas se compondrán de combinaciones de este activo con otros arriesgados. Todas estas carteras se encontrarán a lo largo de la línea *PP* en la figura 18.1, porque esta recta muestra el rendimiento máximo alcanzable para cada valor de σ de las diversas asignaciones de la cartera. Estas asignaciones sólo incluirán un conjunto específico de activos con riesgo; es decir, el conjunto representado por el punto *M*. En el equilibrio, ésta será la "cartera del mercado", que incluirá todos los activos de capital en proporción a sus cotizaciones en el mercado. Esta cartera del mercado ofrecerá un rendimiento esperado de μ_M y una desviación estándar de dicho rendimiento de σ_M. La ecuación de la recta *PP* que representa una cartera mixta cualquiera está dada por la ecuación lineal

$$\mu_P = \mu_f + \frac{\mu_M - \mu_f}{\sigma_M} \cdot \sigma_P. \qquad \text{(xiii)}$$

Esta expresión muestra que la recta del mercado *PP* permite que los inversionistas individuales "compren" rendimientos superiores a su rendimiento libre de riesgos $(\mu_M - \mu_f)$ asumiendo proporcionalmente más riesgo (σ_P/σ_M). Para elecciones sobre la recta *PP* a la izquierda del punto del mercado, *M*, $\sigma_P/\sigma_M < 1$ y $\mu_f < \mu_P < \mu_M$. Los puntos de mayor riesgo a la derecha de *M*, que se pueden obtener pidiendo prestado para lograr una cartera apalancada, tendrán $\sigma_P/\sigma_M > 1$ y prometerán un rendimiento esperado superior al ofrecido por la cartera del mercado $(\mu_P > \mu_M)$. Tobin (1958) fue uno de los primeros economistas que reconoció el papel que desempeñan los activos libres de riesgo en la identificación de la cartera de mercado y en establecer las condiciones que se deben cumplir para que los inversores puedan obtener rendimientos por encima de los niveles de rendimiento sin riesgo.

A18.4 Elecciones individuales

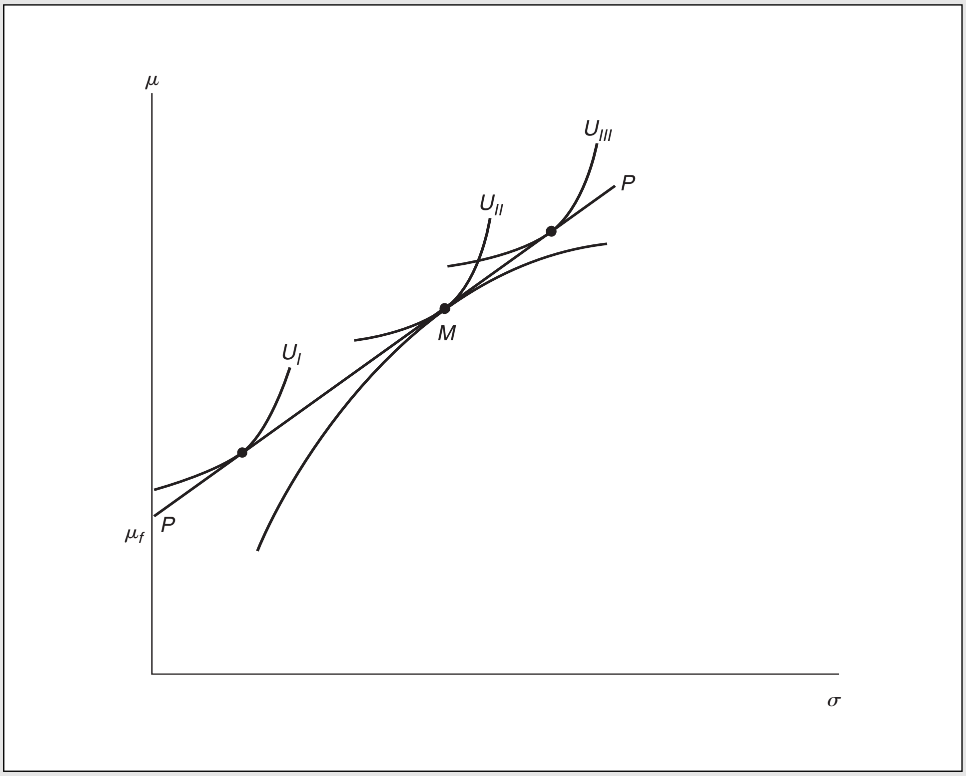
La figura A18.2 ilustra las elecciones de cartera de varios inversores que afrontan las opciones que ofrece la recta *PP*. Los individuos que toleran poco riesgo (*I*) optarán por carteras cuya ponderación se inclina notablemente hacia el activo libre de riesgos. Los inversionistas dispuestos a asumir un grado modesto de riesgo (*II*) optarán por carteras cercanas a la cartera del mercado. Los inversionistas amantes del riesgo (*III*) podrían optar por carteras apalancadas. Nótese que todos los inversionistas tienen el mismo "precio" del riesgo $(\mu_M - \mu_f)$ y sus rendimientos esperados estarán determinados por cuánto riesgo relativo (σ_P/σ_M) están dispuestos a asumir. Nótese también que el riesgo asociado a la cartera de un inversionista depende únicamente de la parte de la cartera invertida en la cartera del mercado (α) porque $\sigma_P^2 = \alpha^2\,\sigma_M^2 + (1-\alpha)^2 \cdot 0$. Por tanto, $\sigma_P/\sigma_M = \alpha$, por lo que la cartera que elige el inversionista es equivalente al riesgo que elige.

A18.5 Modelo de fijación de precios de los activos de capital

El análisis de A18.4 muestra cómo se puede fijar el precio de una cartera que combina activos

FIGURA A18.2 **Comportamiento de los inversionistas y aversión al riesgo**

Dadas las opciones del mercado *PP*, los inversionistas pueden elegir la cantidad de riesgo que quieren asumir. Los inversionistas con una gran aversión al riesgo (U_I) tendrán, sobre todo, activos libres de riesgo, mientras que los amantes del riesgo (U_{III}) optarán por carteras apalancadas.



libres de riesgo con la cartera del mercado, pero no describe el intercambio entre riesgo y rendimiento de un único activo. Dado que, suponiendo que las transacciones no tienen costo alguno, un inversionista siempre puede evitar el riesgo que no está relacionado con el conjunto del mercado optando por diversificarse con una "cartera del mercado", este riesgo "no sistemático" no garantizará un rendimiento superior. Sin embargo, un activo obtendrá un rendimiento superior en la medida en que contribuya al riesgo del conjunto del mercado. Un activo que no produzca este rendimiento superior no estaría incluido en la cartera del mercado, por lo cual no se tendría en absoluto. Ésta es la idea central del modelo de fijación de precios de los activos de capital (*Capital Asset Pricing Model*; CAPM).

Para analizar estos resultados formalmente, consideremos una cartera que combina una pequeña cantidad (α) de un activo con un rendimiento aleatorio x con la cartera del mercado (que tiene un rendimiento aleatorio M). El rendimiento de esta cartera (z) estaría determinado por

$$z = \alpha x + (1 - \alpha)M. \qquad \text{(xiv)}$$

El rendimiento esperado es

$$\mu_z = \alpha\mu_x + (1 - \alpha)\mu_M \qquad \text{(xv)}$$

con variación

$$\sigma_z^2 = \alpha^2\sigma_x^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_M^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{x,M}. \qquad \text{(xvi)}$$

Pero nuestro análisis anterior demuestra que

$$\mu_z = \mu_f + (\mu_M - \mu_f) \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_M}. \qquad \text{(xvii)}$$

Al igualar la ecuación xv a la xvii y derivar respecto a α tendremos

$$\frac{\partial \mu_z}{\partial \alpha} = \mu_x - \mu_M = \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M}\frac{\partial \sigma_z}{\partial \alpha} \qquad \text{(xviii)}$$

al calcular $\frac{\partial \sigma_z}{\partial \alpha}$ a partir de la ecuación xvi y tomar límites cuando α tiende a cero, tendremos

$$\mu_x - \mu_M = \frac{(\mu_M - \mu_f)}{\sigma_M}\left(\frac{\sigma_{x,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right), \quad \textbf{(xix)}$$

o, al volver a ordenar los términos,

$$\mu_x = \mu_f + (\mu_M - \mu_f) \cdot \frac{\sigma_{x,M}}{\sigma_M^2}. \quad \textbf{(xx)}$$

De nueva cuenta, el riesgo tiene un premio de $\mu_M - \mu_f$, pero ahora se mide con $\sigma_{x,M}/\sigma_M^2$; esta relación de covariación entre el rendimiento *x* y el mercado a la variación del rendimiento del mercado se conoce como el coeficiente *beta* del activo. Muchas publicaciones presentan coeficientes beta estimados para activos financieros.

Estudios del CAPM

Esta versión del modelo de fijación de precios de los activos de capital entraña importantes implicaciones sobre los determinantes de la tasa de rendimiento esperada de un activo cualquiera. Debido a su simplicidad, el modelo ha sido objeto de numerosas pruebas empíricas. Por lo general, éstas concluyen que el cálculo que hace el modelo del riesgo sistemático (beta) está, en efecto, correlacionado con los rendimientos esperados, mientras que los cálculos más sencillos del riesgo (por ejemplo, la desviación estándar de los rendimientos pasados) no lo está. De entre las primeras pruebas empíricas que llegaron a esta conclusión, la más influyente tal vez sea la de Fama y MacBeth (1973). Sin embargo, el modelo CAPM tan sólo explica una pequeña parte de las diferencias de rendimiento de diversos activos. Y, a diferencia del CAPM, una serie de autores han encontrado que muchos otros factores económicos afectan sustancialmente los rendimientos esperados. De hecho, los propios fundadores del método ponen en duda el CAPM; véanse Fama y French (1992).

Bibliografía

Fama, E. F. y K. R. French. “The Cross Section of Expected Stock Returns”, *Journal of Finance 47*, 1992, pp. 427-466.

Fama, E. F. y J. MacBeth. “Risk, Return, and Equilibrium”, *Journal of Political Economy* 8, 1973, pp. 607-636.

Freund, J. E. *Mathematical Statistics*, 5a. ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.

Hoel, Paul G. *Introduction to Mathematical Statistics*. 5a. ed., John Wiley and Sons, Nueva York, 1984.

Jensen, M. “The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964”, *Journal of Finance*, mayo de 1968, pp. 386-416.

Lintner, J. “The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets”, *Review of Economics and Statistics*, febrero de 1965, pp. 13-37.

Scharfstein, D. S. y J. Stein. “Herd Behavior and Investment”, *American Economic Review*, junio de 1990, pp. 465-489.

Sharpe, W. F. *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw-Hill, Nueva York, 1970.

Tobin, J. “Liquidity Preference as Behavior Towards Risk”, *Review of Economic Studies*, febrero de 1958, pp. 65-86.

Capítulo 19

ECONOMÍA DE LA INFORMACIÓN

La información es un valioso recurso económico. Las personas que saben dónde comprar bienes de gran calidad a precio bajo expanden más su presupuesto que las que no saben hacerlo; los agricultores que tienen acceso a mejores previsiones del clima esperado pueden evitar errores costosos; y las normas del gobierno que regulan el medio ambiente son más eficaces cuando están fundadas en conocimientos científicos. Estas observaciones respecto al gran valor que tiene la información han sido aceptadas desde hace mucho tiempo, pero la creación de modelos económicos formales sobre la adquisición de información y sus consecuencias para la asignación de recursos es bastante reciente.[1] *A pesar de su inicio tardío, el estudio de la economía de la información se ha convertido en uno de los principales campos de investigación actuales. En este capítulo hablaremos, brevemente, de algunas de las cuestiones esenciales que plantean estas investigaciones.*

Propiedades de la información

Quienes quieren estudiar la economía de la información se encuentran con el problema de que no es fácil definir qué es la "información" en sí. A diferencia de los bienes económicos que hemos estudiado hasta este punto, la "cantidad" de información que pueden obtener las personas mediante diversas acciones no está bien definida y la información que obtienen no es homogénea. Las formas de información útiles para la economía son, sencillamente, demasiado variadas como para permitir las caracterizaciones de precios y cantidades que se han venido empleando en el caso de los bienes básicos de consumo. En cambio, los economistas que quieran estudiar la información deberán tener buen cuidado de especificar cuál es el entorno informativo que existe en un problema de información dado, a veces llamado *contexto de la información*, y cómo los actos de los individuos lo podrían alterar. Cabe suponer que este planteamiento ha dado lugar a una vasta cantidad de modelos de situaciones específicas que tienen muy pocos puntos en común entre ellos.

Otra complicación del estudio de la información es el que se refiere a algunas propiedades técnicas de la información misma. La mayor parte de la información es duradera y conserva su valor tras haber sido empleada. A diferencia de cualquier alimento, que se consume una sola vez, el saber que habrá una venta especial puede ser empleado no sólo por la persona que se entera de ello, sino también por los amigos con quienes comparta esa información. Por lo tanto, los amigos pueden sacar provecho de esa información, a pesar de que no tengan que gastar para

[1]Los modelos formales de la información a veces datan de un artículo, que abriera brecha, escrito por G. J. Stigler. "The Economics of Information", *Journal of Political Economy*, junio de 1961, pp. 213-225.

obtenerla. De hecho, en un caso especial de esta situación, la información tiene las características de un *bien público* puro (véase el capítulo 21). Es decir, la información *no es rival*, en el sentido de que otros la pueden emplear sin costo alguno y, al mismo tiempo, *no es exclusiva*, en el sentido que ningún individuo puede impedir que otros la empleen. El ejemplo clásico de estas propiedades sería el caso de un nuevo descubrimiento científico. Cuando un pueblo prehistórico inventó la rueda, otros la pudieron utilizar sin que ello redujera el valor del descubrimiento y todos los que la vieron la pudieron copiar sin costo alguno.

Estas propiedades técnicas de la información implican que los mecanismos del mercado muchas veces no operan de manera perfecta cuando asignan recursos para adquirirla y ofrecerla. Por lo tanto, la aplicación del modelo estándar de oferta y demanda para comprender esta actividad puede ser relativamente limitado. Es preciso que se desarrollen modelos que, cuando menos, reflejen de manera adecuada los supuestos relativos a las propiedades del entorno informativo. En la parte que resta de este libro se describirán algunas situaciones en las cuales se necesitan dichos modelos. Sin embargo, aquí no se prestará mucha atención al equilibrio entre oferta y demanda y, en cambio, nos centraremos fundamentalmente en algunas cuestiones relativas a la información que surgen en la teoría de la elección individual.

El valor de la información

Para crear un modelo de la adquisición de información se emplearán muchos de los conceptos planteados, en el capítulo anterior, para el análisis de la incertidumbre. En muchos sentidos, la falta de información representa un problema de incertidumbre para la persona que toma una decisión. En ausencia de una información perfecta, ésta podría no saber con exactitud cuáles serán las consecuencias de un acto determinado. Al tener mejor información, la persona podrá reducir esa incertidumbre y, por lo tanto, llegar a mejores decisiones que le proporcionarán niveles de utilidad más altos.

Información y posibilidades subjetivas

El planteamiento de las preferencias por el estado que se introdujeron en el capítulo anterior servirá para ilustrar esta relación entre incertidumbre y adquisición de información. Ahí, supusimos que un individuo se forma opiniones subjetivas en tanto de las probabilidades de que se presenten dos estados en el mundo, “época buena” y “época mala”. En este modelo, la información es valiosa porque permite que el individuo revise las probabilidades que ha estimado y que se beneficie de esta revisión. Por ejemplo, una información que previera que mañana definitivamente será una “época buena” haría que el individuo revisara sus probabilidades para que $\pi_b = 1$, $\pi_m = 0$ y que variara sus compras en consecuencia. Cuando la información recibida es menos contundente, podría cambiar muy ligeramente las probabilidades, pero incluso las revisiones mínimas podrían ser muy valiosas. Si usted pregunta a sus amigos qué experiencia han tenido con distintas marcas de aparatos DVD que está pensando adquirir, tal vez no quiera que las opiniones de ellos dicten su elección personal. Los precios de los aparatos y otro tipo de información (por ejemplo, la obtenida de la revista *Consumer Reports*) también influirán en su opinión. No obstante, al final de cuentas, usted tendrá que procesar todos estos factores para tomar una decisión que reflejará el valor que ha otorgado a las probabilidades de que se presenten distintas “situaciones en el mundo” (en este caso, la calidad que obtendrá de diversas marcas).

Un modelo formal

Para ilustrar cómo se puede integrar la búsqueda de información a un modelo de elección individual, supongamos que se puede medir la información en función del número de “mensajes” (m) “comprados”. Supongamos también que la persona ajusta sus probabilidades subjetivas en función de estos mensajes. Por tanto, π_b y π_m estarán en función de m. Ahora, el objetivo del individuo será maximizar

$$\textbf{utilidad esperada} = \pi_b U(W_b) + \pi_m U(W_m) \qquad \textbf{(19.1)}$$

sujeta a

$$I = p_b W_b + p_m W_m + p_i m, \qquad \textbf{(19.2)}$$

donde p_i es la riqueza en el estado i y p_{msg} es el costo por unidad de los mensajes informativos, es decir, el costo del tiempo de un mecánico, de una llamada telefónica para reunir información sobre precios, etc. Nótese que los mensajes informativos en sí no ofrecen utilidad alguna en este modelo. Su utilidad se debe tan sólo a su capacidad para cambiar las decisiones de esta persona en tanto de cómo asignar W_b y W_m. Si expresamos el lagrangiano de este problema,

$$\mathscr{L} = \pi_b U(W_b) + \pi_m U(W_m) + \lambda(I - p_b W_b - p_m W_m - p_i m) \qquad \textbf{(19.3)}$$

tendremos las siguientes condiciones de primer orden para un máximo sujeto a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial W_b} &= \pi_b U'(W_b) - \lambda p_b = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial W_m} &= \pi_m U'(W_m) - \lambda p_m = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial m} &= \pi_b U'(W_b)\frac{dW_b}{dm} + \pi_m U'(W_m)\frac{dW_m}{dm} + U(W_b)\frac{d\pi_b}{dm} \\
&\quad + U(W_m)\frac{d\pi_m}{dm} - \lambda p_b \frac{dW_b}{dm} - \lambda p_m \frac{dW_m}{dm} - \lambda p_i = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= I - p_b W_b - p_m W_m - p_i m = 0.
\end{aligned} \qquad \textbf{(19.4)}$$

Las dos primeras ecuaciones simplemente vuelven a expresar el resultado óptimo obtenido con anterioridad. En el máximo, la proporción (subjetiva) de las utilidades marginales esperadas debe ser igual a la proporción de precios p_b/p_m. La compleja tercera ecuación representa la elección que maximiza la utilidad a través de la cantidad de información que se debe comprar. En este modelo, todo el valor de estos mensajes proviene de su capacidad para cambiar las probabilidades (subjetivas) de las épocas buenas y las malas. Si la recepción de la información no altera estas probabilidades, entonces las dos primeras condiciones de primer orden no alterarían las asignaciones de riqueza y la información no tendría valor alguno. Cuando la nueva información altera las probabilidades, el individuo debe evaluar cuánta utilidad adicional le producirá, a efecto de decidir cuánto debe invertir en la información misma. La tercera ecuación de este proceso de maximización capta el intercambio que entraña este proceso. Sin embargo, unas cuantas posibilidades discretas reflejan mejor los principios de la adquisición óptima de información que este tipo de modelo de elección continua. El siguiente ejemplo ofrece una sencilla ilustración.

El valor de la información sobre los precios

Para ilustrar cómo la nueva información podría afectar la maximización de la utilidad, volvamos a uno de los primeros modelos empleados en el capítulo 4. Ahí, se demostró que si un individuo consume dos bienes y si la utilidad está determinada por $U(x, y) = x^{0.05} y^{0.05}$, la función de utilidad indirecta será

$$V(p_x, p_y, I) = \frac{I}{2p_x^{0.05} p_y^{0.05}}. \qquad \textbf{(19.5)}$$

Como ejemplo numérico, consideramos el caso de $p_x = 1$, $p_y = 4$, $I = 8$ y calculamos que $V = I/2 \cdot 1 \cdot 2 = 2$. Ahora, supongamos que el bien y representa, por decir, una lata de pelotas de tenis de marca y que este consumidor sabe que lo puede comprar al precio de \$3 o de \$5 en dos tiendas que está considerando, pero que no sabe cuál tienda fija cuál precio. Dado que es igual de probable que una de las dos tiendas tenga el precio más bajo, el valor esperado del precio

(*continúa*)

EJEMPLO 19.1 ***CONTINUACIÓN***

es \$4. Sin embargo, como la función de utilidad indirecta es convexa en el precio, esta persona obtiene de su compra un valor esperado superior a $V = 2$ porque podrá comprar mayor cantidad si encuentra la tienda que tiene el precio bajo. Antes de la compra, la utilidad esperada es

$$\begin{aligned} E[V(p_x, p_y, I)] &= 0.5 \cdot V(1, 3, 8) + 0.5 \cdot V(1, 5, 8) \\ &= 1.155 + 0.894 = 2.049. \end{aligned} \tag{19.6}$$

Si el consumidor supiera cuál de las tiendas ofrece el precio más bajo su utilidad sería incluso más alta. Si esta persona pudiera comprar a $p_y = 3$ con certidumbre, la utilidad indirecta sería $V = 2.309$ y se podrá utilizar este resultado para calcular cuál es el valor de esta información. Es decir, podemos preguntar cuál nivel de ingresos, I^*, produciría la misma utilidad cuando $p_y = 3$, tal como se obtiene cuando esta persona debe elegir, de manera aleatoria, en cuál tienda comprar. Por lo tanto, tenemos que resolver la ecuación

$$V(p_x, p_y, I^*) = \frac{I^*}{2p_x^{0.5}p_y^{0.5}} = \frac{I^*}{2 \cdot 1 \cdot 3^{0.5}} = 2.049. \tag{19.7}$$

La calculadora de este autor presenta un valor de $I^* = 7.098$ para esta solución. Por consiguiente, esta persona estaría dispuesta a pagar hasta 0.902 (= 8 – 7.098) por esta información. Nótese que la posibilidad de disponer de información relativa a los precios ayuda a esta persona en dos sentidos: 1) aumenta la probabilidad de que acuda a la tienda que tiene el precio bajo de 0.5 a 1.0; y 2) le permite comprar una cantidad mayor porque aprovecha la ventaja del precio bajo que ofrece esa tienda.

Pregunta: En este problema resulta extraño que la utilidad esperada con incertidumbre de precios ($V = 2.049$) sea más alta que la utilidad cuando el precio tiene su valor esperado ($V = 2$). ¿Este hecho viola el supuesto de la aversión al riesgo?

Información asimétrica

Una implicación evidente del análisis de la adquisición de información es que el nivel de información que compre el individuo dependerá del precio unitario de los mensajes de información. A diferencia del precio de mercado de la mayor parte de los bienes, que normalmente suponemos es el mismo para todo el mundo, hay muchas razones para pensar que los costos de la información pueden variar de manera sustancial de un individuo a otro. Algunos individuos podrían tener habilidades específicas importantes para la adquisición de información (por ejemplo, pueden tener formación de mecánicos), mientras que otros podrían no tener esas habilidades. Algunos individuos podrían tener otro tipo de experiencias que ofrecen información valiosa, mientras que otros podrían no tener esas experiencias. Por ejemplo, el vendedor de un producto por lo regular sabrá más de las limitaciones de éste que un comprador, porque el vendedor sabrá con exactitud cómo ha sido fabricado el bien y dónde podrían surgir problemas. Por otra parte, los compradores a gran escala, que repiten sus compras, podrían tener mayor acceso a la información del bien que un individuo que lo compra por primera vez. Por último, algunos individuos podrían haber invertido en algunos tipos de servicios de información (por ejemplo, con una computadora conectada a una casa de bolsa o con una suscripción a la revista *Consumer Reports*) que hacen que el costo marginal de obtener información adicional sea más bajo para ellos que para otra persona que no ha realizado una inversión así.

Todos estos factores sugieren que el nivel de información de un participante en las transacciones de mercado puede ser diferente del de otro. Por supuesto que, en muchas ocasiones, los costos de información pueden ser muy bajos y que estas diferencias pueden ser insignificantes. Por ejemplo, la mayor parte de las personas con sólo ver las verduras frescas pueden evaluar su calidad sin gran problema. Sin embargo, cuando los costos de la información son altos y cuando varían de un individuo a otro, cabe esperar que consideren ventajoso adquirir distintas cantidades de información.

Información y seguros

El mercado de los seguros se caracteriza por una serie de asimetrías en la información. La mayor parte de ellas surge de la diferencia de la información que los compradores y los vendedores de seguros tienen respecto al hecho incierto que es el objeto del seguro. Dado que los compradores de un seguro afrontan de manera directa estas incertidumbres, suelen estar en mejor posición para conocer la verdadera probabilidad de que se produzcan y, con frecuencia, pueden tomar medidas que podrían afectar esa probabilidad. Por ejemplo, el propietario de un automóvil, que reside en una zona urbana, sabe si se estaciona en una zona donde existe la probabilidad de que se lo roben o si opta por estacionarlo en un lugar más seguro, posiblemente pagando cierto costo. Por otra parte, las compañías que aseguran automóviles encontrarán que es prohibitivamente caro saber dónde cada asegurado estaciona su vehículo y, por ello, debe fundar sus tarifas básicas en el supuesto de un comportamiento promedio. Dado que este tipo de situación no es exclusiva de los mercados de seguros, sino que es típico de una gran cantidad de transacciones que implican asimetrías en la información, lo analizaremos con cierto detalle. Los conceptos de "riesgo moral" y de "selección adversa" que describiremos tal vez sean los descubrimientos más importantes de la teoría moderna de la información.

Riesgo moral

Los individuos pueden tomar diversas medidas que influirán en la probabilidad de que se produzca un hecho que entraña un riesgo. Los propietarios de viviendas que corren el riesgo de sufrir pérdidas a causa de un incendio, por ejemplo, pueden instalar sistemas de rociadores o colocar extintores de fuego en distintos lugares del inmueble. Asimismo, las personas pueden instalar sistemas de alarma contra robo en los automóviles o mantenerse en buena forma física para reducir la probabilidad de padecer enfermedades. Tratándose de estas actividades, los individuos que maximicen su utilidad procurarán reducir los riesgos hasta el punto en el cual la ganancia marginal de tomar mayores precauciones sea igual al costo marginal que entrañen tales precauciones.

Sin embargo, ante la presencia de la cobertura de un seguro, este cálculo podría cambiar. Si una persona está totalmente asegurada contra las pérdidas, entonces tendrá menos incentivos para tomar costosas medidas de precaución y, por tanto, aumentaría la probabilidad de que sufra una pérdida. Por ejemplo, en el caso del seguro de un automóvil, la persona que tiene una póliza que cubre el riesgo de robo podría estacionarlo en zonas menos seguras o quizá no instalaría una alarma contra robo. Esta respuesta conductual ante la cobertura de los seguros se conoce como "riesgo moral".

DEFINICIÓN

Riesgo moral. El efecto que la cobertura de los seguros tiene en las decisiones que toman los individuos para tomar medidas que podrían modificar la probabilidad de sufrir pérdidas o el tamaño de éstas.

Emplear el término "moral" para describir esta respuesta tal vez no sea adecuado. La conducta descrita no tiene nada de "inmoral"; es decir, que los individuos están respondiendo ante los incentivos que afrontan. En algunas aplicaciones, esta reacción hasta podría ser deseable.[2] Sin embargo, dado que las aseguradoras encuentran que es muy costoso medir y evaluar estas respuestas, el riesgo moral puede tener implicaciones muy importantes para la asignación de recursos. Así, para poder analizarlas, es necesario un modelo de la maximización de la utilidad.

Un modelo matemático

Supongamos que un individuo que siente aversión al riesgo afronta la posibilidad de sufrir una pérdida (l) que reducirá su riqueza inicial (W_0). La probabilidad del siniestro está dada por π, y

[2] Por ejemplo, las personas que cuentan con un seguro médico podrían tener incentivos para someterse muy pronto a un tratamiento, porque el seguro disminuye los costos que deben sufragar por los servicios médicos.

el individuo puede reducir esta probabilidad dependiendo de la cantidad (a) que gaste en medidas precautorias. Si suponemos que los estados son independientes entre sí, podremos hacer que $U(W)$ represente la utilidad del individuo en el estado 1 (sin pérdida) y en el estado 2 (con pérdida). En ausencia de la cobertura de un seguro, la riqueza en los dos estados estará determinada por

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0 - a \\ W_2 &= W_0 - a - l, \end{aligned} \tag{19.8}$$

y el individuo elige a para maximizar

$$\text{utilidad esperada} = E = (1 - \pi)U(W_1) + \pi U(W_2). \tag{19.9}$$

Si recordamos que π está en función de a, la condición de primer orden para un máximo es, por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= -U(W_1)\frac{\partial \pi}{\partial a} - (1 - \pi)U'(W_1) \\ &\quad + U(W_2)\frac{\partial \pi}{\partial a} - \pi U'(W_2) = 0 \end{aligned} \tag{19.10}$$

o

$$\pi U'(W_2) + (1 - \pi)U'(W_1) = [U(W_2) - U(W_1)]\frac{\partial \pi}{\partial a}. \tag{19.11}$$

El resultado concuerda con el sentido común, pues su interpretación es que el individuo debe tomar medidas precautorias hasta el punto en el cual el costo marginal de la utilidad esperada (debida a la reducción de la riqueza) cuando se gasta un dólar más en estas medidas (lado izquierdo de la ecuación 19.11) sea igual a la reducción ($\partial\pi/\partial a$ es negativa) del valor esperado de la pérdida de utilidad que podría encontrarse en épocas malas.

Comportamiento con un seguro y vigilancia perfecta

La historia se complica cuando existe la cobertura de un seguro. En este caso, el individuo puede comprar una cobertura de seguro que le pagaría x si sufriera una pérdida, y la prima de esta cobertura estaría dada por p (que, evidentemente, dependerá de x). Ahora, la riqueza en las dos situaciones posibles está determinada por

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0 - a - p \\ W_2 &= W_0 - a - p - l + x, \end{aligned} \tag{19.12}$$

y el individuo elige a y x para maximizar la utilidad esperada. Si la compañía de seguros pudiera vigilar las medidas precautorias y, por tanto, pudiera conocer la probabilidad de que ocurra la pérdida, entonces podría cobrar una prima justa, de

$$p = \pi x. \tag{19.13}$$

Con esta póliza

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0 - a - \pi x, \\ W_2 &= W_0 - a - l + (1 - \pi)\,x. \end{aligned} \tag{19.14}$$

Si suponemos que esto es independiente del estado, esta persona puede maximizar la utilidad esperada eligiendo x de tal forma que $W_1 = W_2$, lo cual, al igual que en nuestros modelos anteriores, exige un seguro de cobertura total (es decir, $x = l$). Con una cobertura total, la condición de primer orden para una elección de a que maximice la utilidad es

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= -(1 - \pi)U'(W_1)\left(1 + l\frac{\partial \pi}{\partial a}\right) - U(W_1)\frac{\partial \pi}{\partial a} \\ &\quad - \pi U'(W_2)\left(1 + l\frac{\partial \pi}{\partial a}\right) + U(W_2)\frac{\partial \pi}{\partial a} = 0 \end{aligned} \tag{19.15}$$

o, utilizando el hecho de que $W_1 = W_2$,

$$1 = -l \frac{\partial \pi}{\partial a}. \qquad (19.16)$$

Esta condición es directamente análoga a la que derivamos antes para el caso de ausencia de un seguro, pero ahora, con la disponibilidad de una cobertura total, se puede expresar en forma más simple. En la elección que maximiza la utilidad, el costo marginal de una unidad adicional de prevención, que en este caso es sólo 1, debería ser igual a la reducción marginal de la pérdida esperada que ofrece ese gasto adicional. Por consiguiente, con un seguro total y las primas actuarialmente justas que permite calcular una vigilancia perfecta, el individuo sigue comprando medidas precautorias dentro de niveles óptimos.

El problema de la información y la vigilancia imperfecta

Hasta aquí, nuestro análisis ha estado fundado en el supuesto ilógico de que las compañías aseguradoras conocen la probabilidad de sufrir una pérdida que corresponde a cada individuo y que, por tanto, pueden cobrar primas actuarialmente justas a cada persona. Cuando los individuos pueden tomar medidas precautorias, este supuesto resulta especialmente dudoso. Al parecer, exigiría que la aseguradora estuviera vigilando de manera constante las actividades de cada persona para determinar la probabilidad de que ésta sufra una pérdida. Esto exigiría que la aseguradora cotizara una prima distinta para cada comprador, de modo que reflejara las medidas precautorias tomadas por éste. Obtener esta información resulta prohibitivamente caro en casi todos los casos y, por ello, las aseguradoras tienen que optar por métodos, que entrañan mucha menos información, para fijar las primas.

En el caso más sencillo, la aseguradora podría fijar una prima con base en la probabilidad promedio de la pérdida experimentada por algún grupo de personas, sin dar cabida alguna a variaciones debidas a las medidas precautorias de individuos específicos.[3] No obstante, con una póliza así, cada individuo tiene un incentivo para reducir sus medidas precautorias porque son costosas y, en presencia de una cobertura total, no producen beneficio alguno en términos de utilidad. Podemos demostrar este resultado directamente, recurriendo al caso del seguro de cobertura total. Si $x = l$ en las ecuaciones 19.12, $W_1 = W_2$ independientemente de la prima que se cobre o de las precauciones que se tomen. Sin embargo, dado que las primas ahora no dependen de a, es evidente que la utilidad se maximiza cuando $a = 0$. Incluso cuando las primas dependen parcialmente de a, la utilidad máxima resultante se caracterizará por muy poco gasto en prevención y, tal vez, por una cobertura excesiva. Por lo tanto, en esencia, el efecto distorsionante que el riesgo moral tiene en la asignación de recursos surge de la asimetría de la información que poseen los individuos y las aseguradoras en tanto de su capacidad para vigilar las medidas de precaución que se toman.[4]

Riesgo moral y vigilancia

En varios ejemplos del capítulo 18 analizamos la decisión de un individuo para asegurarse contra el robo de un automóvil que vale \$20 000. Aquí, se analizará su decisión de instalar o no una alarma contra robo que vale \$1950 y que promete reducir la probabilidad de robo de 0.25 a 0.15. En términos de valor esperado, es evidente que la instalación tiene sentido porque la ganancia esperada de \$2000 ($0.10 \cdot 20\,000$) excede al costo de la alarma. La utilidad esperada de la instalación de la alarma

$$\begin{aligned}\text{utilidad esperada} &= 0.85 \ln (100\,000 - 1950) \\ &\quad + 0.15 \ln (100\,000 - 20\,000 - 1950) \qquad (19.17) \\ &= 11.4590\end{aligned}$$

(*continúa*)

[3]Otra posibilidad es que la aseguradora clasifique a los individuos dentro de distintas categorías de riesgos (por ejemplo, "fumadores" o "no fumadores", habitantes de "zonas urbanas" o de "zonas rurales", etc.). En la siguiente sección analizamos algunas de las cuestiones que surgen en mercados que se caracterizan por tener estas cláusulas de riesgos.

[4]Si las aseguradoras son capaces de vigilar, en parte, el gasto en medidas de prevención (tal vez observando los seguros que compran los individuos), el análisis se tornará más complejo, si bien la posibilidad de que haya una asignación ineficiente de los recursos sigue existiendo si esta vigilancia es incompleta. Encontrará una explicación en, S. Shavell. "On Moral Hazard and Insurance", *Quarterly Journal of Economics*, noviembre de 1979, pp. 541-562.

EJEMPLO 19.2 *CONTINUACIÓN*

también excede a la utilidad esperada sin la alarma (11.4571; véase la ecuación 18.56), por lo cual el individuo que no tiene seguro tomará esta precaución.

Seguros y riesgo moral. Sin embargo, cuando hay un seguro disponible, el caso podría ser otro. En concreto, supongamos que el individuo puede comprar una cobertura total por \$5200; es decir, una prima que representa \$5000 en caso de que ocurra la pérdida esperada y \$200 cargados por concepto de costos administrativos. Supongamos también que la compañía aseguradora no hace esfuerzo alguno por vigilar la instalación de alarmas contra robo. En este caso, la utilidad esperada de la póliza de seguros (11.4595; véase la ecuación 18.60) excede a la utilidad esperada teniendo la alarma, por lo cual el individuo optará por comprar el seguro, pero no la alarma.

Vigilancia de las alarmas contra robo. Si las aseguradoras son capaces de vigilar si los individuos instalan alarmas contra robo, el cálculo volverá a cambiar. Supongamos que le costara \$10 determinar si un propietario ha instalado una alarma o no. En este caso, la prima del seguro para una persona que cuenta con una alarma contra robo sería de \$3210; \$3000 de la pérdida esperada (0.15 · 20 000), \$200 de costos administrativos y \$10 de costo de vigilancia. Si un individuo adquiere esta póliza (y una alarma contra robo), su riqueza será de \$94 840 (=100 000 – 3210 – 1950) con certeza porque, si ocurriera el robo, el seguro cubrirá la pérdida en su totalidad. Ahora, la utilidad esperada estará determinada por

$$\textbf{utilidad esperada} = \ln(94\,840) = 11.4600, \qquad (19.18)$$

la cual excede a la utilidad alcanzable con la compra de una alarma contra robo y sin seguro o la que se consigue con la compra de una póliza sin vigilancia. Por consiguiente, la posibilidad de que la disponibilidad de un seguro frene todo el gasto en medidas precautorias o no dependerá, fundamentalmente, de los costos que implique vigilar el gasto.

Pregunta: Supongamos que vigilar las alarmas contra robo cuesta \$100 por póliza, que el individuo debe pagar independientemente de que instale la alarma o no. Ahora, ¿qué decisión tomará el individuo?

Selección adversa

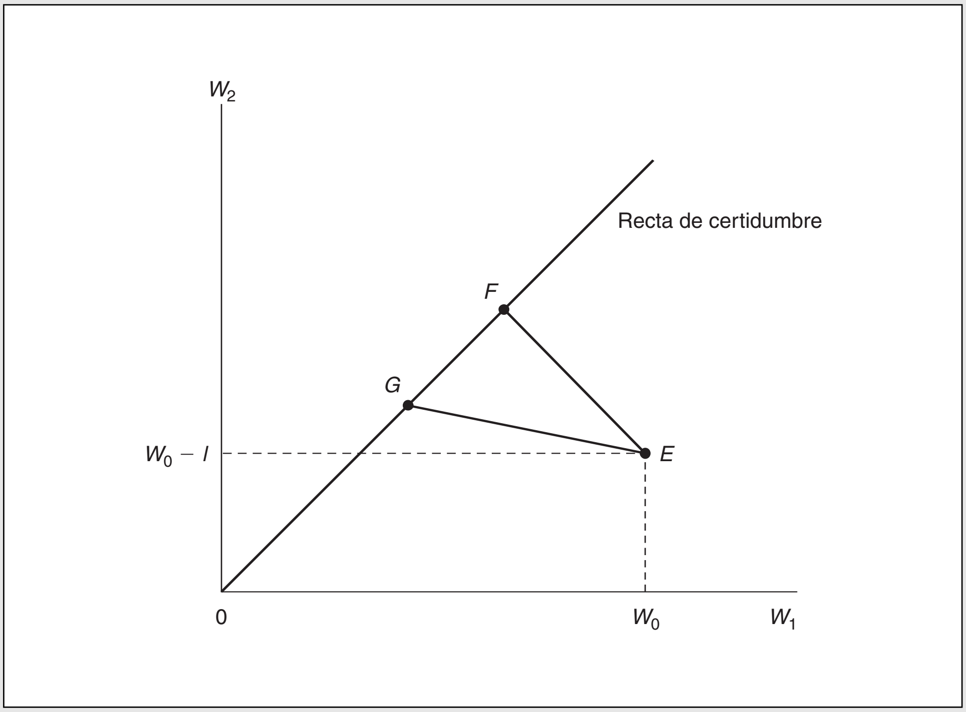
Las asimetrías de la información también podrían afectar las transacciones del mercado en el caso de que los distintos individuos tengan distintas probabilidades de sufrir hechos desafortunados. Si, como en el caso del riesgo moral, los individuos conocen las probabilidades con mayor precisión que las aseguradoras, los mercados de seguros podrían no funcionar debidamente porque las aseguradoras tal vez no son capaces de fijar primas con base en medidas precisas de la pérdida esperada. El equilibrio resultante podría no ser el ideal para muchos de los participantes en el mercado.

Una ilustración gráfica

La figura 19.1 muestra la situación de dos individuos que empiezan, cada uno, con una riqueza inicial de W_0 y que afrontan la posibilidad de una pérdida, l. El punto e representa la posición inicial de estos individuos; es decir, reciben W_0 en la situación 1 (sin pérdida) y $W_0 - l$ en la situación 2 (con pérdida). Supongamos que los individuos afrontan distintas probabilidades de sufrir una pérdida: el individuo que afronta un riesgo alto tiene una probabilidad π_A de sufrir una pérdida, mientras que el individuo que afronta un riesgo bajo tiene una probabilidad π_B (que es menor que π_A). Con un seguro justo, y con independencia de la situación (como vimos en el capítulo 18), los dos individuos preferirán moverse sobre la recta de certidumbre. Las rec-

FIGURA 19.1 **Equilibrios con distintos riesgos**

Habiendo información perfecta, los individuos con un riesgo bajo se mueven a lo largo de la recta de seguros del mercado *EF,* y eligen el punto *F.* Los individuos que corren un riesgo alto se mueven a lo largo de *EG,* y eligen *G.* Habiendo información imperfecta, los dos tipos de individuos elegirán *F,* que no es viable.



tas *EF* y *EG* han sido trazadas, respectivamente, con pendientes $-(1 - \pi_B)/\pi_B$ y $-(1 - \pi_A)/\pi_A$, y muestran las oportunidades que el mercado ofrece a cada persona para intercambiar W_1 por W_2 comprando un seguro justo.[5] Por lo tanto, el individuo que tiene un riesgo bajo maximiza su utilidad en el punto *F* mientras que el que corre un riesgo alto elige el punto *G.*

No obstante, si las aseguradoras tienen información imperfecta sobre cuáles individuos caben dentro de la categoría de riesgo bajo o la de riesgo alto, la solución de la figura 19.1 será inestable. Por supuesto que la dificultad está en que el punto *F* proporciona más riqueza en las dos situaciones que el punto *G* y, por tanto, los individuos que corren un riesgo alto lo preferirán. Éstos tendrán un incentivo para comprar el seguro destinado a los individuos que corren un riesgo bajo y, en ausencia de información sobre las categorías de riesgo, la aseguradora no tendrá fundamento alguno para negarles la oferta de cubrirlos. Sin embargo, con un grupo mixto de clientes, la aseguradora afrontará una mayor probabilidad promedio de que sufra pérdidas que se ubica por encima de π_B y, en promedio, perderá dinero con cada póliza que venda. El punto *F* no es un equilibrio viable en el caso de un grupo mixto de clientes.

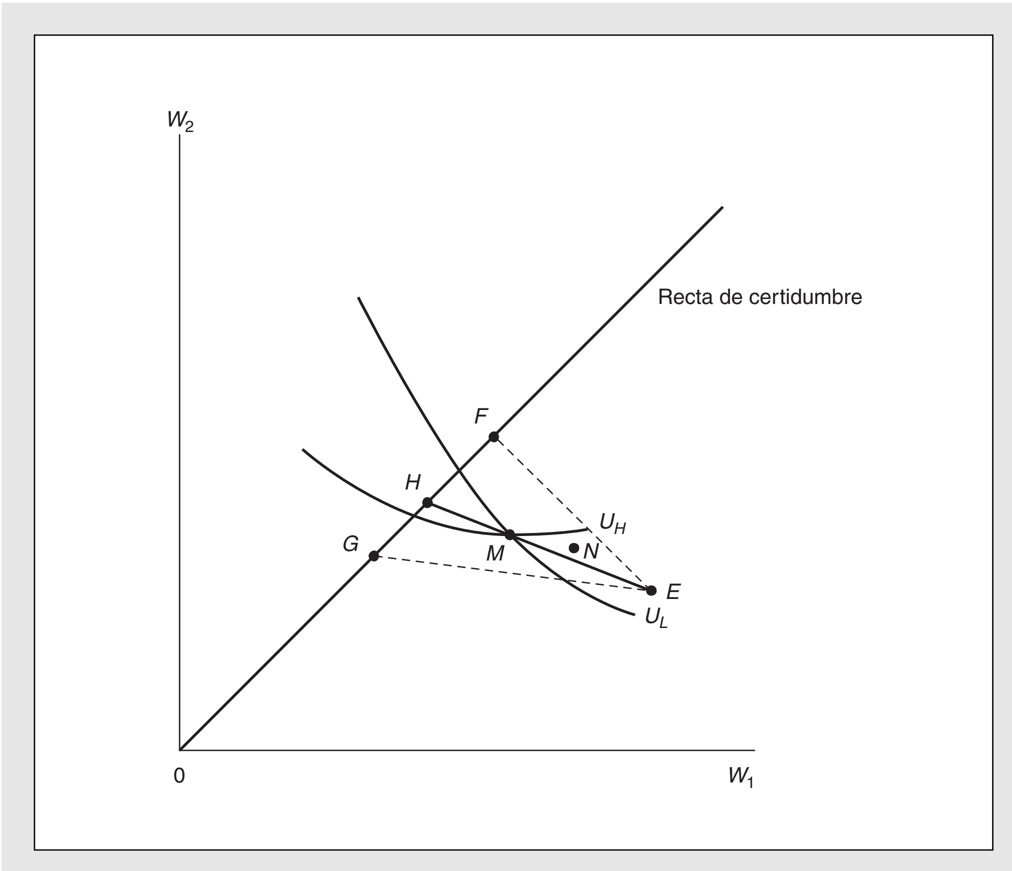
Agrupación

Una solución concebible sería que la aseguradora ofrezca una póliza cuya prima esté basada en la probabilidad promedio de sufrir una pérdida, $\bar{\pi} = (\pi_A + \pi_B)/2$. En la figura 9.2, la recta *EH*

[5]Podemos derivar estas pendientes empleando la ecuación 19.14, la cual muestra que un incremento de \$1 en el seguro (x) disminuye W_1 en π y eleva W_2 en $(1 - \pi)$. Por ejemplo, si $\pi = 0.1$, \$1 de seguro cuesta \$0.10 y disminuye W_1 en esa misma cantidad. El dólar de seguro eleva W_2 en \$0.90 porque reembolsa la pérdida de \$1, pero es enteramente necesario pagar la prima de \$0.10. Las pendientes de la figura 19.1 también se conocen como *cocientes de probabilidades.*

FIGURA 19.2 **Imposibilidad de equilibrio con una póliza de grupo**

Una póliza de seguro de grupo ofrece las oportunidades dadas por *EH*. En esta línea, un punto como *M* no puede ser un equilibrio, porque existen opciones de seguros (N) que son rentables para las aseguradoras y para los individuos con riesgo bajo, pero no para los individuos con riesgo alto.



indica esta posibilidad de agrupación. Si bien los dos tipos de individuos no optarán necesariamente por una cobertura total en el punto *H*, dado que *EH* ya no refleja con precisión las verdaderas probabilidades que cada persona sabe que afronta, ellas se podrían conformar con una póliza, como *M* que ofrece una cobertura parcial. Sin embargo *M* no puede ser un equilibrio final, porque en *M* existen más oportunidades de intercambio para los individuos que corren un riesgo bajo. Podemos demostrarlo de la manera siguiente: en *M* la curva de indiferencia de los individuos con un riesgo bajo (U_B) es más pronunciada que la de los individuos con un riesgo alto (U_A).[6] Por tanto, existen pólizas de seguro (por decir, *N*) que no son atractivas para los individuos que corren un riesgo alto, pero sí lo son para los individuos que corren un riesgo bajo, y que son rentables para las aseguradoras, porque están por debajo de *EF*.

[6]Dado que la utilidad esperada está dada por $(1-\pi)U(W_1)+\pi U(W_2)$, la *TMS* está dada por

$$\frac{-dW_2}{dW_1}=\frac{(1-\pi)U'(W_1)}{(\pi)U(W_2)}.$$

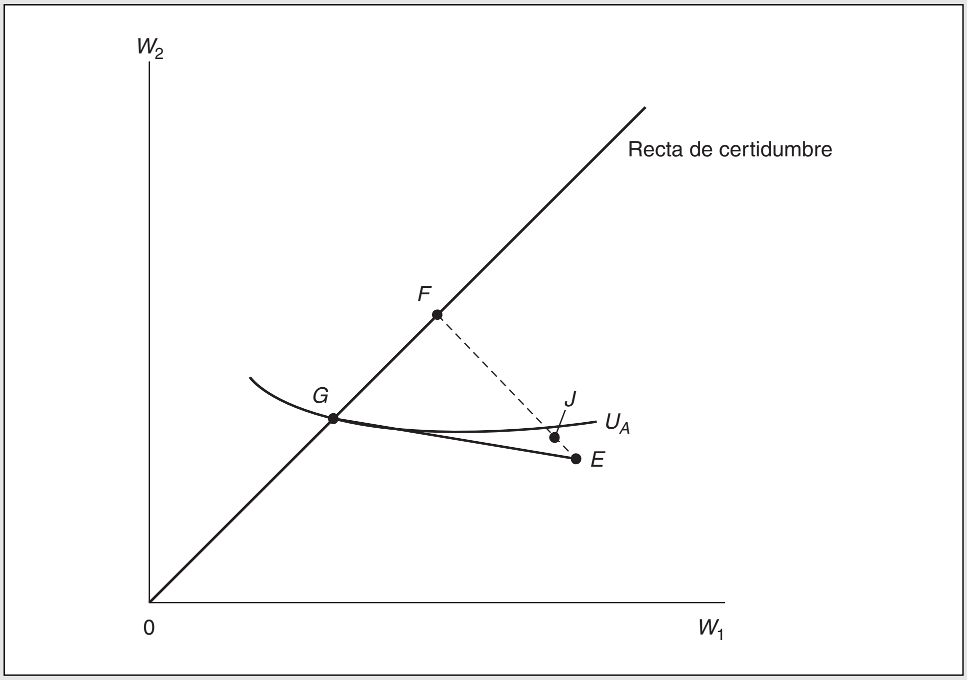
Si suponemos que los dos individuos tienen la misma función de utilidad, y con la observación de que cada uno tiene la misma riqueza en *M,* la *TMS* sólo será distinta porque las probabilidades subyacentes de sufrir una pérdida son distintas. Dado que

$$(1-\pi_B)/\pi_B>(1-\pi_A)/\pi_A,$$

la curva de indiferencia del individuo con riesgo bajo será más pronunciada. Esta demostración se deriva del análisis presentado en M. Rothschild y J. Stiglitz. "Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information", *Quarterly Journal of Economics*, noviembre de 1976, pp. 629-650.

FIGURA 19.3 **Segmentación de equilibrio**

Habiendo información imperfecta, *G* y *J* representan una posible segmentación de equilibrio. En este caso, los individuos con riesgo alto optan por una cobertura total (*G*), y los individuos con riesgo bajo reciben una cobertura parcial (*J*) la cual les resulta atractiva a ellos, pero no así a los individuos con riesgo alto.



Si suponemos que no hay barreras que impidan la venta de un seguro a precio justo, las compañías ofrecerán pólizas como *N* las cuales atraerán a individuos con riesgo bajo. Por tanto, el punto *M* dejará de ser un equilibrio, porque la probabilidad de que el grupo sufra una pérdida estará por encima de $\bar{\pi}$. Por tanto, en esta situación, el equilibrio del grupo en *M* no es viable.

Segmentación de equilibrio

Para que este mercado con información asimétrica pueda tener un equilibrio viable, debe tener alguna suerte de segmentación; es decir, los individuos con riesgo alto deben tener un incentivo para comprar un tipo de póliza de seguros y los individuos con riesgo bajo otro distinto. La figura 19.3 ilustra una solución de este tipo. En este caso, las aseguradoras ofrecen la póliza *G,* y los individuos con riesgo alto responden optando por una cobertura total. Así, si U_A representa la curva de indiferencia de los individuos con riesgo alto que pasa por *G,* toda póliza de las personas con riesgo bajo que esté por encima de U_A no será viable, porque las aseguradoras no pueden impedir que los individuos con riesgo alto la contraten. En esta situación, la mejor póliza que pueden obtener los individuos con riesgo bajo será una como la del punto *J.* Esta póliza está ligeramente por debajo de U_A, pero es económicamente viable (porque está sobre *EF*) y promete más utilidad a los individuos con riesgo bajo que la que ofrece afrontar el mundo sin un seguro. Por lo tanto, en este caso, las pólizas *G* y *J,* representan un equilibrio.

Este equilibrio es claramente inferior al equilibrio con información completa que ilustra la figura 19.1. Si las aseguradoras pudieran determinar los verdaderos riesgos asociados a vender pólizas a cada individuo específico, aquellos que corren un riesgo bajo estarían en mejor situación, y los que corren un riesgo alto no estarían en una peor. Si bien las asimetrías de la información impedirán que se alcance este "primer mejor" equilibrio, existen otras posibilidades (como la normativa gubernamental o que las aseguradoras mismas utilicen subsidios cruzados entre pólizas de riesgo alto y las de riesgo bajo) que podrían ofrecer a los dos tipos de individuos mejoras en comparación con el equilibrio que ilustra la figura 19.3.

Señalización

Un camino que conduce a estas mejoras, entraña que los individuos con riesgo bajo puedan tratar de informar a las aseguradoras cuál es su verdadera situación personal. Hemos visto que estos individuos se podrían beneficiar con claridad si compartieran su conocimiento con las aseguradoras. La principal dificultad radica en saber si las "señales" que tratan de enviar a las aseguradoras son creíbles o no, porque los individuos con riesgo alto también se beneficiarían si pudieran convencer a las aseguradoras que ellos también son individuos que tienen un riesgo bajo.

La posibilidad de que las señales pudieran ser inexactas hace que el estudio de este tema sea en especial interesante. Si las aseguradoras pudieran preguntar llanamente a cada cliente a cuál categoría de riesgo pertenece y si obtuvieran respuestas exactas, entonces la asimetría de la información descrita en la sección anterior no tendría consecuencia alguna. Por lo tanto, los economistas han dirigido su interés a la posibilidad de que las aseguradoras sean capaces de inferir probabilidades exactas observando el comportamiento de sus clientes en el mercado. El contexto adecuado podría brindar a cada individuo el incentivo para revelar cuál es su situación real y, a continuación, las aseguradoras podrían aprovechar estas *señales del mercado*. La situación que contiene la figura 19.3 es una ilustración obvia del caso. En ese equilibrio, los individuos que corren un riesgo alto compran pólizas de clase G y obtienen una cobertura total, mientras que los individuos que corren un riesgo bajo compran pólizas clase J y sólo reciben una cobertura parcial. Por tanto, el equilibrio por separado identifica la categoría de riesgo de un individuo. Es muy posible que las aseguradoras pudieran emplear esta información para ofrecer mejores pólizas a los individuos que tienen un riesgo bajo, al menos hasta que los individuos que tienen un riesgo alto se enteren de lo que está ocurriendo.

En términos más generales, las aseguradoras podrán entrever señales del mercado provenientes de diversas fuentes, siempre y cuando el comportamiento económico que estén observando refleje con exactitud las categorías de riesgo. Una condición necesaria para que ocurra lo anterior es que el costo que contraen los individuos cuando envían una señal debe ser proporcional a la probabilidad de sufrir una pérdida. Si los costos fueran los mismos, independientemente de la categoría del riesgo, los individuos tendrían los mismos incentivos para "enviar" señales y éstas perderían todo su valor informativo. Por ejemplo, las compañías aseguradoras con frecuencia cobran primas más altas por los seguros que cubren automóviles deportivos que por los que cubren autos sedán, no obstante que los dos tengan un precio similar. Esto tal vez se explicaría porque los automóviles que compran los individuos podrían señalar sus hábitos al volante; es decir, los propietarios de automóviles deportivos quizá conduzcan siempre como si estuvieran en una carrera de autos. Sin embargo, el equilibrio que segmenta a los individuos con base en la información relativa a la compra de automóviles sólo será sostenible si los que corren riesgo alto sienten aversión por conducir autos comunes y corrientes. De lo contrario, podrían cambiar el tipo de automóvil que compran para obtener un seguro más barato. En términos formales, la elección del tipo de automóvil sólo será una buena señal si el vehículo es lo bastante caro, tal vez en términos psicológicos, como para que los individuos con riesgo alto adopten el comportamiento de mercado de los que corren riesgo bajo. El ejemplo siguiente analiza algunas de estas posibilidades.

Selección adversa en los seguros

Podemos plantear nuestro análisis de la instalación de alarmas contra robo del ejemplo 19.2 como un problema de selección adversa. Si las aseguradoras saben cuáles propietarios han instalado estas alarmas, podrían fijar los precios de las pólizas en conformidad. Los propietarios sin alarma afrontarían una probabilidad de sufrir una pérdida de 0.25 y pagarían una prima de \$5000 por la cobertura del seguro (en aras de la sencillez, en este caso suponemos que no hay costos administrativos por suscribir la póliza). En este caso, el propietario contratará un seguro completo y recibirá una utilidad esperada de

$$\begin{aligned}\textbf{utilidad esperada} &= \ln(100\,000 - 5000)\\ &= \ln(95\,000) = 11.4616.\end{aligned} \tag{19.19}$$

(*continúa*)

Dado que nos queremos centrar en las distintas probabilidades de sufrir una pérdida y no en el costo de las alarmas contra robo, supongamos que otro grupo de propietarios ha instalado las alarmas en algún punto pasado. Por tanto, el costo de la alarma es un costo hundido que no afectará la decisión actual. Los propietarios que cuentan con alarma tienen una probabilidad de 0.15 de sufrir una pérdida y afrontarán una prima actuarialmente justa de \$3000. Con una cobertura total, la utilidad esperada será

$$\textbf{utilidad esperada} = \ln(97\,000) = 11.4825. \qquad (19.20)$$

Si las aseguradoras no pueden discernir si un propietario ha instalado una alarma o no, los dos tipos de propietarios contratarán pólizas para un riesgo bajo. Si suponemos que la mitad de todos los automóviles cuentan con alarma, la aseguradora registrará una tasa de pérdidas del 0.20 y con una prima de \$3000 perderá, en promedio, \$1000 por póliza. Es evidente que una prima de \$4000 por una póliza de grupo le resultaría atractiva a los propietarios que corren riesgo alto, pero los que corren un riesgo bajo no comprarían la póliza porque estarían en mejor situación sin un seguro:

$$\begin{aligned} &\ln(96\,000) < 0.85\ln(100\,000) + 0.15\ln(80\,000) \\ &11.4721 < 11.4795. \end{aligned} \qquad (19.21)$$

Por lo tanto, el equilibrio del grupo no es viable porque los individuos con un riesgo bajo se negarían a participar en él.

Equilibrios por segmentación. Una situación en la cual los individuos que corren riesgo alto optan por una cobertura total (con una prima de \$5000) y los que corren un riesgo bajo no compran seguros y podría representar, en este caso, un equilibrio por segmentación, pero esto brinda a las aseguradoras la posibilidad de ofrecer pólizas parciales que le serían atractivas a los propietarios con un riesgo bajo. Para saber cuál es la mejor de ellas, debemos encontrar una póliza justa para los compradores que tienen un riesgo bajo que no le resulte atractiva a los que corren riesgo alto. Dado que la prima de tal póliza sería $0.15x$ (donde x es el monto de la pérdida que queda cubierto), tendremos que resolver la siguiente desigualdad:

$$0.75\ln(100\,000 - 0.15x) + 0.25\ln(80\,000 + 0.85x) < \ln(95\,000), \qquad (19.22)$$

que nos da una solución aproximada de

$$x < 3000. \qquad (19.23)$$

Por tanto, la póliza para un riesgo bajo sólo cubrirá \$3000 de la pérdida que sufra un propietario que tenga un riesgo bajo para que no le resulte demasiado atractiva a los propietarios que tienen un riesgo grande. La utilidad esperada por un propietario con un riesgo bajo que comprara esta póliza, que cuesta \$450 = 0.15 · 3000) será

$$0.85\ln(99\,550) + 0.15\ln(82\,550) = 11.4803. \qquad (19.24)$$

Esta cifra es superior a la utilidad esperada por un individuo que tiene un riesgo bajo y que se niega a comprar el seguro (ecuación 19.21) y dista mucho de la utilidad que podría conseguir un individuo en un equilibrio con información completa. Por tanto, los individuos con riesgo bajo podrían invertir en enviar señales a efecto de que su situación mejore en comparación con la que tendrían con este equilibrio por segmentación. Ahora, usted tendrá que investigar estas señales.

Pregunta: Si los propietarios con riesgo bajo pudieran comprar un certificado que diera fe de que han instalado una alarma contra robo, ¿cuánto pagarían por él? ¿Cuánto tendrían que costar los certificados falsificados para que los propietarios con riesgo alto no recurrieran a utilizarlos?

La relación entre principal y agente

La información asimétrica también puede afectar de manera considerable la asignación de recursos cuando una persona contrata a otra, presuntamente mejor informada, para que tome las decisiones. Algunos ejemplos son las relaciones que se presentan cuando los pacientes contratan a los médicos para que decidan el tratamiento a seguir, los inversionistas contratan a asesores financieros para que manejen su dinero, los conductores dejan que los mecánicos decidan qué problema tiene su automóvil y los accionistas contratan a gerentes para que administren las empresas que, técnicamente, son de su propiedad. En todos estos casos, una persona que cuenta con menos información (el *principal*) contrata a otra que tiene más información (el *agente*) para que tome decisiones que afectarán de manera directa el bienestar del principal. Por lo tanto, tendremos la definición siguiente:

DEFINICIÓN

Relación entre principal y agente. Situación en la cual una persona (el principal) contrata a otra (el agente) para que tome decisiones económicas.

En la relación entre principal y agente, la asimetría de la información es lo que presenta problemas. En esta sección se abordará el tema de los conflictos que podrían surgir entre los propietarios de las empresas y sus gerentes cuando tratan de obtener el máximo beneficio. Sin embargo, esta relación se presenta de muchas otras formas y, ahora, ya existen muchos trabajos que abordan el tema. Al final de este capítulo encontrará bibliografía que le servirá de guía básica al respecto.

Conflictos en la relación entre propietario y gerente: un planteamiento gráfico

Adam Smith entendió el conflicto básico entre propietarios y gerentes. En *La riqueza de las naciones,* señaló que "dado que los directores . . . de las empresas administran el dinero de otros y no el propio, es imposible esperar que lo vigilen con la misma esmerada atención con la que los propietarios vigilan su propiedad".[7] A partir de ejemplos de instituciones británicas tan famosas como la Royal African Company, la Hudson's Bay Company y la East India Company, Smith pasaba a señalar algunas de las consecuencias que tenía el hecho de que fueran administradas por personas que no eran sus propietarias. Sus observaciones ofrecen un importante punto de partida para estudiar las empresas modernas.

La figura 19.4 ilustra el problema central que plantea la existencia de gerentes-agentes y muestra el mapa de curvas de indiferencia de las preferencias de un gerente, que elige entre el beneficio de la empresa, que es el interés central de los propietarios, y distintos lujos, como oficinas elegantes o viajes en el jet o el helicóptero corporativo, que obtiene principalmente el gerente.[8] Este mapa de curvas de indiferencia tiene la misma forma que los que presentamos en la parte 2, partiendo del supuesto de que el beneficio *y* el lujo proporcionan utilidad al gerente.

Para construir la restricción presupuestaria que afronta el gerente cuando busca maximizar su utilidad, primero supongamos que el gerente también es el dueño de su empresa. Si el gerente opta por no obtener lujos especiales de su empleo, el beneficio será $\pi_{\text{máx}}$. Cada dólar de lujo que reciba el gerente disminuirá este beneficio en un dólar. La restricción presupuestaria tendrá una pendiente de -1, y el beneficio llegará a cero cuando el total del lujo sea $\pi_{\text{máx}}$.

Dada esta restricción presupuestaria, el propietario-gerente maximiza la utilidad optando por un beneficio de π^* y un lujo de b^*. El beneficio π^*, si bien por debajo de $\pi_{\text{máx}}$, sigue representando el beneficio máximo en esa situación, porque cualquier otro propietario-gerente también desearía recibir b^* en forma de lujos. Es decir, b^* representa el verdadero costo de hacer negocios, de modo que, dados estos costos, el gerente de la empresa en realidad maximiza el beneficio.

Incentivos de los agentes

Ahora supongamos que el gerente no es el único dueño de su empresa. En cambio, supongamos que, por decir, una tercera parte del capital de la empresa es propiedad del gerente y que las otras dos terceras partes son propiedad de inversionistas externos, que no tienen papel alguno

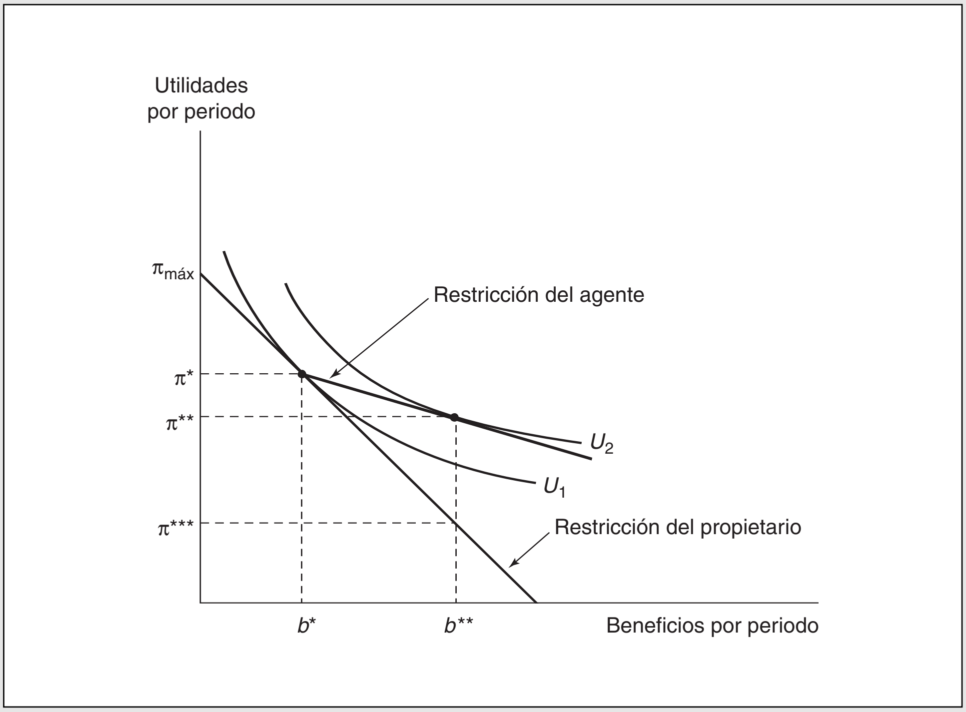
---

[7]Adam Smith. *The Wealth of Nations*, Random House, Edición Modern Library, Nueva York, 1937, p. 700.

[8]La figura 19.4 está basada en una presentada en Michael C. Jensen y William H. Meckling. "Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure", *Journal of Financial Economics*, octubre de 1976, pp. 305-360.

FIGURA 19.4 **Incentivos para un gerente que actúa como agente de los propietarios de una empresa**

Si un gerente fuera el único dueño de una empresa, escogería π^*, b^* porque esta combinación de beneficio y lujo es la que proporciona la utilidad máxima. Sin embargo, si el gerente fuera dueño de tan sólo una tercera parte de la empresa, percibiría una restricción presupuestaria más plana y escogería b^{**}, π^{**}.



en las operaciones de la empresa. En este caso, el gerente actuará como si ya no afrontara una limitación presupuestaria que requiere sacrificar un dólar de beneficio por cada dólar de lujo. Ahora, un dólar de beneficio tan sólo le cuesta al gerente \$0.33 de beneficios, porque los otros \$0.67 son pagados, de hecho, por los otros propietarios, en términos de que se reduce el rendimiento sobre su inversión. La nueva restricción presupuestaria sigue incluyendo el punto b^*, π^* (porque el gerente todavía podría tomar la misma decisión que tomaría un único propietario), para lujos por arriba de b^* la pendiente de la restricción presupuestaria es tan sólo $-⅓$; el beneficio de la parte del negocio correspondiente al gerente disminuye tan sólo \$0.33 por cada dólar recibido en forma de lujo. Dada esta nueva restricción presupuestaria, el gerente elegiría el punto b^{**}, π^{**} para maximizar su utilidad. El hecho de sólo ser dueño de parte de la empresa lleva al gerente a elegir un nivel más bajo de beneficio y un nivel más alto de lujo que los que habría elegido un único propietario.

Implicaciones para propietarios

Esta empresa no puede alcanzar el punto b^{**}, π^{**}. Si bien al gerente le parece que el costo de un dólar de lujo es tan sólo \$0.33 del beneficio, sobra decir que, en realidad, los lujos cuestan un dólar. Cuando el gerente opta por un lujo b^{**} la pérdida del beneficio (de π^* a π^{***}) es mayor para la empresa entera que para él en lo personal. Los dueños de la empresa salen afectados por tener que recurrir a la relación de agente con el gerente de la empresa. Al parecer, cuanto menor sea la parte de la empresa que es propiedad del gerente, tanto mayor serán las distorsiones que produzca esta relación. El ejemplo siguiente ilustra este problema y explica lo que los propietarios podrían hacer al respecto.

EJEMPLO 19.4

Uso del jet corporativo

United Biscuits, Inc., es dueña de una flotilla de jets que la empresa usa principalmente para efectos del negocio. Los directores de UBI, tras despedir al anterior gerente general por haber hecho uso indebido de la flotilla corporativa, ahora quieren estructurar un contrato para el nuevo gerente que le ofrezca más incentivos para controlar los costos. Todas las personas que han solicitado el empleo tienen la misma función de utilidad para el sueldo (s, medido en miles de dólares) y para el uso del jet (a, que sólo puede ser 0 o 1) de forma

$$U(s, a) = 0.1\sqrt{s} + a. \tag{19.25}$$

Todos los solicitantes también han recibido ofertas de empleo de otras empresas, que les prometen un nivel de utilidad máximo de 2.0. Dado que el uso excesivo del jet es muy caro, los directores saben que el beneficio de UBI, excluyendo el sueldo del gerente general, será de 800 (mil) si $a = 0$, pero sólo de 162 si $a = 1$. Por tanto, los directores están dispuestos a ofrecer al gerente general hasta 638, siempre y cuando tengan la seguridad de que no usará la flotilla corporativa para cuestiones personales. Un sueldo un poco por arriba de 400 apenas si bastará para conseguir que un posible candidato acepte el puesto sin usar el jet ($U > 2$). Este sería un contrato más rentable que contratar a un gerente general ejecutivo con un sueldo requerido de 100 y un uso irrestricto del jet. Si bien este contrato también ofrece $U > 2$, con el primer contrato el beneficio neto es 400, tras pagarle al gerente general, mientras que con el segundo tan sólo son 62.

Vigilancia del contrato. Por desgracia, los directores de UBI tienen dificultad para vigilar si el jet es usado para fines ajenos a la empresa. Si firman un contrato por 400 (y $a = 0$), el nuevo gerente seguirá teniendo un incentivo para usar el jet, aumentando así su utilidad de 2 a 3. Esta decisión sería desastrosa para los propietarios, porque con el uso del jet para fines personales el beneficio neto disminuiría a –238.

Un contrato con beneficio compartido. Por lo tanto, los propietarios podrían estar dispuestos a pagar una cantidad para poder vigilar el uso del jet y para asegurarse de que se cumplan los términos del contrato con el sueldo más alto. Por otra parte, podrían preparar un contrato para compartir el beneficio, el cual no requeriría vigilancia para su aplicación. Por ejemplo, prometer un sueldo equivalente al 50% del beneficio bastaría para atraer a un posible gerente general ($U = 2.0$) siempre y cuando decidiera no usar el jet. El candidato se daría cuenta que, con este contrato para compartir el beneficio, su utilidad será menor si usa el jet ($U = 1.9$) y presuntamente no observará ese comportamiento.

Pregunta: ¿El análisis de esta situación contractual cómo cambiaría si el beneficio no fuera una "señal perfecta" del uso del jet?

La relación entre propietario y gerente: un análisis matemático

Podemos estudiar este ejemplo de la relación entre el agente y el principal con mayor detalle si hacemos un planteamiento matemático. Supongamos que el beneficio bruto de la empresa depende de un acto específico (a) que el gerente contratado podría emprender (es decir, $\pi = \pi(a)$). Los dueños de la empresa quieren diseñar un contrato que pague al gerente un salario (s) basado en el beneficio obtenido (es decir, $s = s[\pi(a)]$). Por tanto, en el caso de estos propietarios, el beneficio neto está determinado por

$$\textbf{Beneficio neto} = \pi' = \pi(a) - s[\pi(a)]. \tag{19.26}$$

El beneficio bruto y también el neto, se maximizan cuando $\partial\pi/\partial a = 0$. En consecuencia, el problema de los dueños será diseñar una estructura salarial que ofrezca al gerente un incentivo para elegir un valor de a (por decir a^*) que produzca este resultado.

Al elaborar el plan de remuneración, los dueños de la empresa afrontan dos problemas. En primer término, deben conocer la función de utilidad del agente-gerente para poder entender la forma en que los incentivos afectarían a esta persona. Por ejemplo, los propietarios podrían suponer que la utilidad del gerente depende del ingreso neto, determinado por

$$I^M = s[(\pi(a)] - c(a) - c_0, \qquad (19.27)$$

donde $c(a)$ representa los costos que contrae el gerente cuando emprende la acción a ($c'(a) > 0$, $c''(a) > 0$), y c_0 representa el costo de oportunidad que afronta el gerente, como los beneficios netos que le ofrece la alternativa siguiente de una mejor oferta de empleo.

La segunda restricción que afrontan cuando diseñan el plan de remuneración es que el gerente debe estar dispuesto a aceptar el empleo. En pocas palabras, esto requiere que $I^M \geq 0$ porque el empleo debe proporcionarle un rendimiento neto más alto que la otra alternativa. Algunos autores se refieren a lo anterior con el término "restricción de la participación".

El caso con información completa

Habiendo información completa, resulta relativamente fácil diseñar el plan de remuneración óptimo. Una opción sería no pagar remuneración alguna a no ser que el gerente elija a^* y pagarle una cantidad igual a $c(a^*) + c_0$ si elige la acción óptima. Este plan de remuneración será justo bastante para conseguir que el gerente acepte el empleo. Una alternativa que podría ser más ilustrativa consistiría en adoptar un plan de remuneración en el cual $s(a) = \pi(a) - f$, donde f es una cuota fija establecida para satisfacer la restricción de la participación exclusivamente cuando el beneficio es maximizado. Es decir, $f = \pi(a^*) - c(a^*) - c_0$. Con este plan de remuneración, el ingreso del gerente es maximizado haciendo que $\partial s(a)/\partial a = \partial\pi/\partial a = 0$. Por lo tanto, el gerente escogerá $a = a^*$ y recibirá un ingreso que apenas cubre su costo:

$$I^M = s(a^*) - c(a^*) - c_0 = \pi(a^*) - f - c(a^*) - c_0 = 0. \qquad (19.28)$$

En el lenguaje de las finanzas diríamos que este plan de remuneración hace que el agente (y no el principal) sea el "titular residual" de las utilidades de esta empresa. Por tanto, el agente maximiza el beneficio porque ello le beneficia de manera directa.

Información asimétrica: acción oculta

Estas soluciones para el caso con plena información hacen poco más que ordenar al gerente que opte por $a = a^*$. Dado que conocemos del todo la relación entre la acción del gerente y el beneficio de la empresa y dado que los propietarios saben con exactitud cuáles son los costos que afronta el gerente, el diseño del plan de remuneración es cosa trivial. Los modelos de la relación entre principal y agente han introducido la información asimétrica a este problema en dos sentidos. En primer término, se supone que la acción de un gerente no es observada de manera directa y que es imposible inferirla perfectamente con base en el beneficio de la empresa. El gerente es el único que sabe perfectamente qué acción ha elegido. Este caso se conoce como uno de "acción oculta". El otro planteamiento para crear los modelos supone que no es posible observar de manera directa la función objetivo del agente-gerente, y esto se conoce como el caso de la "información oculta". A continuación se analizarán brevemente estos dos casos.

La razón principal que explica por qué la acción del gerente podría estar "oculta" es que el beneficio depende de factores aleatorios que los propietarios no pueden observar. En tal caso, los propietarios, con sólo observar el beneficio, no podrán inferir cuál acción ha decidido el gerente. Una forma de hacer un modelo de lo anterior consiste en suponer que el beneficio tiene un elemento aleatorio, de modo que el beneficio real dependerá tanto de la acción del gerente como de la variable aleatoria, u. Es decir,

$$\pi(a) = \bar{\pi}(a) + u, \qquad (19.29)$$

donde $\bar{\pi}$ representa el valor esperado del beneficio, que depende de las acciones del gerente, y u representa la variable aleatoria distribuida normalmente con una media 0 y una varianza σ^2. Dado que los propietarios sólo observan π, y no $\bar{\pi}$, sólo podrán emplear el beneficio real en su función de compensación. Sin embargo, esto plantea un problema para cumplir con la restricción de la participación. Un gerente que siente aversión por el riesgo estará preocupado porque el beneficio podría salir mal y se negará a aceptar el empleo porque le proporciona menos utilidad esperada que la otra alternativa. Por tanto, el problema del propietario será diseñar un plan de remuneración que consiga lo mejor, dada la incertidumbre que implica este problema. Existen muchos modelos de cómo debemos diseñar los planes de remuneración compatibles con los incentivos en estas circunstancias. El ejemplo 19.5 analiza un caso especialmente sencillo.

EJEMPLO 19.5

Planes de incentivos y aversión al riesgo

Supongamos que los propietarios de la empresa desean adoptar un plan para los gerentes que sienten aversión al riesgo y que entraña cierto grado de beneficio compartido como vía para ofrecerle los debidos incentivos. Este plan podría ser

$$s(a) = b + d\pi(a), \tag{19.30}$$

donde b y d son los parámetros del plan de compensación que debemos determinar. Si observamos primero en los incentivos del gerente, el ingreso de éste ahora estará determinado por $I^M = s(a) - c(a) - c_0$, pero este ingreso está sujeto a la incertidumbre dado el elemento aleatorio asociado al beneficio. Si suponemos que el gerente tiene una función de utilidad de aversión constante absoluta al riesgo podremos emplear los resultados del ejemplo 18.3 para derivar su ingreso equivalente cierto como

$$I^{CE} = b + d\bar{\pi}(a) - \frac{d^2 A\sigma^2}{2} - c(a) - c_0. \tag{19.31}$$

Si el gerente-agente escoge a para maximizar este ingreso, la condición de primer orden para un máximo será

$$\frac{\partial I^{CE}}{\partial a} = d\bar{\pi}'(a) - c'(a) = 0. \tag{19.32}$$

Por tanto, independientemente de la d que elijan los propietarios, el gerente siempre escogerá su esfuerzo de modo que

$$d = \frac{c'(a)}{\bar{\pi}'(a)} = m(a), \tag{19.33}$$

donde $m(a)$ representa la proporción de costo-beneficio marginal derivada del esfuerzo adicional. Dado que $c''(a) > 0$ y $\pi''(a) < 0$, entonces $m'(a) > 0$; es decir, la proporción de costo-beneficio marginal aumentará a medida que a aumente.

Para estar seguros de que el gerente aceptará este empleo, necesariamente $I^{CE} \geq 0$. Si suponemos que esta restricción será válida con la igualdad, el requisito será que fijemos b de modo que

$$b = -d\bar{\pi}(a) + \frac{d^2 A\sigma^2}{2} + c(a) + c_0. \tag{19.34}$$

Ahora el problema del propietario-principal será garantizar que todos estos incentivos para el gerente den por resultado la acción que elija para maximizar el beneficio. En este tipo de problema de agente-principal, por lo general se supone que el principal es neutro al riesgo, con fundamento en el supuesto de que los dueños tienen carteras de valores totalmente diversificadas. En este caso, adoptaremos esa costumbre. No obstante, en otros modelos de principal-agente, el supuesto de la neutralidad al riesgo del principal no sería correcto.

Si utilizamos las ecuaciones 19.33 y 19.34, podemos expresar el valor esperado del beneficio del propietario como

$$E(\pi') = (1 - d)\bar{\pi}(a) - b = \bar{\pi}(a) - \frac{m(a)^2 A\sigma^2}{2} - c(a) - c_0, \qquad (19.35)$$

y la condición de primer orden para un máximo es

$$\frac{\partial E(\pi')}{\partial a} = \bar{\pi}'(a) - m(a)m'(a)A\sigma^2 - c'(a) = 0 \qquad (19.36)$$

o

$$d = \frac{c'(a)}{\bar{\pi}'(a)} = m(a) = \frac{1}{1 + \dfrac{m'(a)A\sigma^2}{\bar{\pi}'(a)}}. \qquad (19.37)$$

Podemos generar tres interesantes conclusiones del resultado:

- Dadas las convenciones de los signos que hemos supuesto, la fracción óptima del beneficio compartido estará entre cero y uno;[9]
- La fracción óptima del beneficio compartido es más pequeña a medida que el agente-gerente siente menos aversión al riesgo, y
- La fracción óptima del beneficio compartido será menor a medida que sea mayor la varianza del elemento aleatorio del beneficio.

Todos estos resultados generan sentido intuitivo.

Pregunta: ¿Usted cómo explicaría la presencia del término $m'(a)$ en la ecuación 19.37?

Información oculta

Cuando el principal no conoce la estructura de los incentivos del agente, es imposible hacer un análisis preciso como en el ejemplo anterior. En cambio, debemos diseñar planes de incentivos con fundamento en algunos de los supuestos iniciales respecto a la motivación del agente y debemos irlos adaptando a medida que obtenemos información adicional sobre dichas motivaciones. Esto dificulta bastante la posibilidad de crear modelos más generales para este efecto. Una forma de plantear el problema consiste en suponer que los agentes pertenecen a distintos "tipos". Por ejemplo, los tipos de agentes podrían quedar reflejados en el ejemplo 19.5 mediante distintos valores para el parámetro de la aversión al riesgo, A. En este caso, el propietario podría fijar inicialmente la fracción del beneficio compartido con fundamento en el valor medio supuesto para A y, a continuación, observar las decisiones de los gerentes con el transcurso del tiempo. Podría ir ajustando la fracción del beneficio compartido a medida que vaya teniendo más información. Sin embargo, aquí no se abundará más en este complicado tema.

[9]Nótese que si $\sigma^2 = 0$, la fracción óptima del beneficio compartido será uno; como demostramos antes, los propietarios deberían trasladar la situación de titular residual al gerente.

RESUMEN

En este capítulo se han revisado algunas de las cuestiones que surgen al crear modelos de los mercados cuando la información es imperfecta. Hemos abordado estas cuestiones principalmente desde el punto de vista del individuo que toma las decisiones. Nos hemos referido, de manera breve, a las cuestiones que surgen al estudiar las consecuencias que la información imperfecta tiene en el comportamiento de las empresas o en el funcionamiento del mercado en su conjunto. Algunas de las principales conclusiones de este capítulo son:

- La información es valiosa porque permite que los individuos aumenten la utilidad esperada de sus decisiones. Por tanto, pueden estar dispuestos a pagar algo para obtener información adicional.
- La información tiene una serie de propiedades especiales, como distintos costos de adquisición y algunas características de un bien público, que sugieren que la ineficiencia asociada a la información imperfecta y a la información asimétrica podrían estar bastante extendidas.
- La presencia de información asimétrica podría afectar diversos resultados del mercado, muchos de los cuales quedan ilustrados en el marco de la teoría de los seguros. En este caso, las aseguradoras tal vez tengan menos información sobre los posibles riesgos que los individuos que compran los seguros.
- Si los aseguradores no pueden vigilar con precisión el comportamiento de los individuos asegurados, podría surgir el riesgo moral; es decir, el hecho de estar asegurado afectará la disposición de los individuos a efectuar gastos precautorios. Estos efectos conductuales se pueden presentar en toda situación contractual en la cual los costos de vigilancia sean altos.
- Las asimetrías de la información también pueden llevar a una selección adversa en los mercados de seguros. Los equilibrios resultantes, si existen, muchas veces pueden ser ineficientes, porque la gente que corre riesgo bajo estará en peor situación que en el caso de la información completa. En algunos casos, las señales del mercado pueden disminuir estas ineficiencias.
- La información asimétrica también puede provocar que algunos agentes económicos, el principal, contraten a otros, los agentes, para que tomen decisiones en su nombre. Ofrecer los incentivos correctos al agente es un problema muy difícil.

PROBLEMAS

19.1

La cosecha de tomates de un agricultor se está secando y tiene que decidir si la riega o no. Si riega los tomates, o si llueve, la cosecha producirá \$1000 de utilidades; pero si los tomates no reciben agua, sólo producirá \$500. La operación del sistema de riego del agricultor cuesta \$100. El agricultor quiere maximizar las utilidades esperadas de la venta de los tomates.

a. Si el agricultor considera que hay 50% de probabilidad de que llueva, ¿debe regarlos?

b. ¿Cuál es la cantidad máxima que el agricultor pagaría para obtener información de un meteorólogo itinerante capaz de predecir si lloverá o no con 100% de precisión?

c. ¿Cómo cambiaría su respuesta al inciso b si la cantidad de aciertos fuera únicamente del 75 por ciento?

19.2

En el problema 18.5, la Sra. Fogg estaba bastante dispuesta a comprar un seguro contra la probabilidad del 25% de perder \$1000 en efectivo durante su viaje alrededor del mundo. Supongamos que la gente que compra este seguro tiende a ser más descuidada con su dinero y que la probabilidad de perder \$1000 aumenta a 30%. ¿Cuál es la prima actuarialmente justa del seguro en esta situación? ¿La Sra. Fogg compraría el seguro en tal caso? (*Nota:* este problema y el problema 19.3 ilustran el riesgo moral.)

19.3

El problema 18.4 analizaba una póliza de seguros médicos con costos compartidos y demostraba que los individuos con aversión al riesgo preferirían una cobertura total. Sin embargo, supongamos que las personas que compran pólizas con costos compartidos cuidan más su salud, por lo cual la pérdida que sufren cuando están enfermos se reduce de \$10 000 a \$7000. Ahora, ¿cuál sería el precio actuarialmente justo de una póliza con costos compartidos? ¿Es posible que algunos individuos prefieran la póliza con costos compartidos a una con cobertura total? ¿Qué determinaría el que un individuo pueda tener estas preferencias? (Basta con que haga un planteamiento gráfico de este problema.)

19.4

Las personas de ojos azules tienen más probabilidades de perder sus caros relojes que las personas de ojos cafés. En concreto, existe 80% de probabilidad de que un individuo de ojos azules pierda un reloj de \$1000 dentro de un año, pero sólo 20% de probabilidad de que una persona de ojos cafés lo pierda. La población contiene partes iguales de personas de ojos azules y de ojos cafés.

a. Si una compañía aseguradora supone que las personas de ojos azules y de ojos cafés tienen la misma probabilidad de comprar un seguro contra la pérdida de su reloj, ¿cuál sería la prima del seguro actuarialmente justa?

b. Si las personas de ojos azules y las de ojos cafés tienen funciones logarítmicas de utilidad de la riqueza y riquezas de \$10 000 cada una, ¿estas personas contratarán seguros para sus relojes a la prima calculada en el inciso b?

c. Dados los resultados del inciso b, ¿las primas de los seguros estarían bien calculadas? ¿Cuál debería ser la prima? ¿Cuál sería la utilidad para cada tipo de persona?

d. Supongamos que una compañía aseguradora cobrara distintas primas a las personas de ojos azules y las de ojos cafés. ¿Cuáles serían las utilidades máximas de estos individuos en comparación con las calculadas en los incisos b y c? (Este problema es un ejemplo de selección adversa en los seguros.)

19.5

Supongamos que hay dos tipos de trabajadores, los muy calificados y los de baja calificación. Los salarios de los trabajadores dependen de su capacidad: los muy capacitados ganan \$50 000 por año y los poco capacitados ganan \$30 000. Las empresas no pueden medir las capacidades de los trabajadores, pero pueden observar si un trabajador cuenta con un certificado de que ha terminado sus estudios de secundaria o no. La utilidad de los trabajadores depende de la diferencia entre sus salarios y de los costos que contraen para terminar sus estudios.

a. Si el costo de terminar los estudios es el mismo para los dos tipos de trabajadores, ¿puede haber un equilibrio por separado en esta situación, en la cual los trabajadores muy calificados consiguen trabajos bien remunerados y los poco calificados consiguen trabajos mal remunerados?

b. ¿Cuál es la cantidad máxima que pagará un trabajador muy calificado para terminar sus estudios? ¿Por qué terminar los estudios tiene que costar a una persona poco calificada una cantidad superior a esta cantidad si el hecho de terminarlos permite a los empresarios identificar a los trabajadores muy calificados?

19.6

Supongamos que Molly Jock quiere comprar un televisor de alta definición para ver la competición olímpica de lucha greco-romana. Sus ingresos actuales ascienden a \$20 000 y sabe dónde puede comprar el televisor que quiere por \$2000. Ha oído el rumor de que puede comprar el mismo televisor en Crazy Eddie, que acaba de librarse de la quiebra, por \$1700, pero no está segura de que el rumor sea cierto. Supongamos que la utilidad de esta persona está determinada por

$$\textbf{utilidad} = \boldsymbol{ln(Y)},$$

donde Y es su ingreso después de comprar el televisor.

a. ¿Cuál será la utilidad de Molly si compra el televisor en la tienda que conoce?

b. ¿Cuál será la utilidad de Molly si es cierto que Crazy Eddie ofrece un precio inferior?

c. Supongamos que Molly cree que hay 50% de probabilidad de que Crazy Eddie ofrezca el televisor a menor precio, pero que le costará \$100 desplazarse hasta la tienda para saberlo a ciencia cierta, la tienda está muy lejos y tiene el teléfono desconectado. ¿Vale la pena que invierta el dinero en trasladarse hasta ahí?

19.7

Supongamos que una persona sabe que los precios de un determinado televisor a color tienen una distribución uniforme entre \$300 y \$400. La persona decide averiguar los precios por teléfono.

a. Calcule el precio mínimo esperado que pagará la persona si llama a n tiendas preguntando por el precio.

b. Demuestre que el precio esperado pagado disminuye con n, pero a una tasa decreciente.

c. Supongamos que las llamadas telefónicas cuestan \$2 en términos de tiempo y esfuerzo. ¿Cuántas llamadas debe hacer esta persona para maximizar sus ganancias derivadas de la búsqueda?[10]

19.8

Supongamos que la persona del problema 19.7 adopta una "estrategia de precios bajo reserva", es decir, comprará en la primera tienda que venda por debajo de este precio máximo bajo reserva. En las circunstancias del problema 19.7, ¿qué precio se debería fijar para maximizar la ganancia de la búsqueda?

19.9

Consideremos la relación de principal-agente que existe entre un paciente y su médico. Supongamos que la función de utilidad del paciente está dada por $U^c(m, x)$, donde m representa los servicios médicos, cuya cantidad es determinada por el médico, y x el consumo de otros bienes. El paciente está limitado por la restricción de su presupuesto $I_c = p_m m + x$, donde p_m es el precio relativo de los servicios médicos. La función de utilidad del médico está dada por $U^d(I_d, U^p)$; es decir, el médico genera utilidad de sus propios ingresos y de la utilidad del paciente. La restricción presupuestaria del médico es $I_d = p_m m$. Demuestre que, en esta situación, el médico por lo general escogerá un nivel de m más alto que el que escogería un paciente plenamente informado. (*Pista:* suponga que este problema involucra utilidad cardinal y que el médico es un "altruista perfecto" en el sentido de que $\partial U^d/\partial U^c = 1$.)

19.10

En algunos casos, los individuos pueden estar preocupados por la fecha en la cual se resolverá la incertidumbre que afrontan. Por ejemplo, supongamos que un individuo sabe que su consumo será de 10 unidades hoy (c_1) pero que el consumo de mañana (c_2) será 10 o 2.5, dependiendo de que una moneda lanzada al aire salga cara o cruz. Supongamos también que la función de utilidad de este individuo tiene la sencilla forma de Cobb-Douglas

$$U(c_1, c_2) = \sqrt{c_1 c_2}.$$

a. Si a un individuo sólo le importa el valor esperado de la utilidad, ¿importará si la moneda es lanzada justo antes del día 1 o justo antes del día 2? Explique su respuesta.

b. En términos más generales, supongamos que la utilidad esperada de un individuo depende del momento en que se tire la moneda al aire. En concreto, supongamos que

$$\textbf{utilidad esperada} = E_1[(E_2\{U(c_1, c_2)\})^\alpha],$$

[10]Los problemas 19.7 y 19.8 están basados en material de las ampliaciones del capítulo 19.

donde E_1 representa las expectativas a principios del día 1. E_2 las expectativas al inicio del día 2, y α un parámetro que indica las preferencias respecto el momento. Demuestre que si $\alpha = 1$, al individuo le será indiferente en qué momento se lanza la moneda al aire.

c. Demuestre que si $\alpha = 2$, el individuo preferirá que la incertidumbre se resuelva lo antes posible; es decir, que se lance la moneda al aire al inicio del día 1.

d. Demuestre que si $\alpha = 0.5$, el individuo preferirá que se resuelva la incertidumbre lo más tarde posible, lanzando la moneda al aire al inicio del día 2.

e. Explique sus resultados de forma intuitiva y su importancia para la teoría de la información. (*Nota:* este problema es una ilustración del comportamiento que "busca soluciones" y del de "aversión a la resolución". Véanse D. M. Kreps y E. L. Porteus. "Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory", *Econometrica*, enero de 1978, pp. 185-200.)

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Diamond, P. y M. Rothschild. *Uncertainty in Economics: Readings and Exercises,* edición revisada, Academic Press, San Diego, CA, 1989.

Contiene reimpresiones de muchos de los artículos mencionados en este capítulo. También incluye resúmenes breves de bibliografía relacionada y una serie de problema y ejercicios.

Ehrlich, I. y G. S. Becker. "Market Insurance, Self-Insurance and Self-Protection", *Journal of Political Economy*, julio/agosto de 1972, pp. 623-658.

Aborda la relación entre el mercado de seguros y el seguro propio (un sustituto) o la protección personal (un complementario). Emplea un planteamiento de la preferencia por situaciones, similar al de este capítulo 18.

Laffont, J. y D. Martimort. *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model,* Princeton University Press, Princeton, 2002.

Cubre por completo, de modo bastante técnico, los modelos de principal-agente. Los autores presentan una introducción histórica del problema y también incluyen cuestiones del riesgo moral y de la selección adversa.

Pauly, M. "The Economics of Moral Hazard: Comment", *American Economic Review*, junio de 1968, pp. 531-537.

Un comentario del artículo de Arrow sobre los seguros médicos (véase el capítulo 18), que emplea un simple argumento gráfico para demostrar cómo las reacciones ante la disminución de costos erogados para servicios médicos pueden hacer que la cobertura total no sea óptima en el sentido de Pareto.

Phlips, L. *The Economics of Imperfect Information,* Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

Cubre muchos de los temas de este capítulo. Contiene una buena explicación de las subastas y de las señales de los equilibrios.

Rothschild, M. y J. Stiglitz. "Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information", *Quarterly Journal of Economics*, noviembre de 1976, pp. 629-650.

Cubre muchos de los temas de este capítulo. Contiene una buena explicación de las subastas y de las señales de los equilibrios.

Stigler, G. "The Economics of Information", *Journal of Political Economy*, junio de 1961, pp. 213-225.

Análisis clásico del papel de las investigaciones para obtener información de los precios.

Varian, H. R. *Microeconomic Analysis*, 3a. ed., W. W. Norton, Nueva York, 1992.

El capítulo 25 de Varian contiene un análisis bastante amplio del modelo del principal-agente, inclusive una ilustración de cómo crear modelos de información oculta.

AMPLIACIONES

La economía de la búsqueda

El ejemplo 19.1 ilustra el valor que la información sobre precios desconocidos tiene para los individuos. Una forma de reunir esta información es mediante una búsqueda sistemática. Es evidente que llamar a unas cuantas tiendas cuando se va a comprar un artículo que cuesta mucho dinero tiene sentido, si bien a veces se podría llevar demasiado lejos. Llamar a todas las tiendas del país o adoptar complicados planes de búsqueda para comprar una crema dental no sería una solución óptima. En esta ampliación se analizarán algunos modelos de estas observaciones de simple sentido común.

Fundamentos estadísticos

Al igual que antes, se necesitan algunos antecedentes estadísticos para crear un modelo del comportamiento de búsqueda. Si x es una variable aleatoria, con una función de densidad probabilística $f(x)$ (en las ampliaciones del capítulo 18 encontrará una explicación de las variables aleatorias), entonces definiremos la "función de distribución acumulada" $F(z)$ como

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(x)dx. \tag{i}$$

Es decir, $F(z)$ muestra la probabilidad de que x sea menor o igual a z para cualquier valor de z. La función de distribución acumulada ofrece una forma alternativa de describir la distribución de una variable aleatoria. Nótese que la función de distribución acumulada y la función de densidad probabilística están muy relacionadas entre sí dado que $F' = f$.

Para nuestro análisis de la cuestión de la búsqueda, suponemos que un individuo está tratando de comprar un bien al precio más bajo posible, pero que sólo conoce la distribución de los precios (p, que sólo puede ser no negativo) que ofrecen varias tiendas. Es decir, conoce $f(p)$ y $F(p)$, pero no cuál tienda ofrece cuál precio.

A19.1 beneficio marginal decreciente de la búsqueda

Supongamos que un individuo decide obtener una muestra, llamando por teléfono o acudiendo personalmente, de n tiendas, comparar sus precios y comprar en la más barata. La probabilidad de que una tienda concreta ofrezca un precio dado (por decir, p_0) y de que éste sea inferior al ofrecido por las $n - 1$ tiendas restantes estará determinada por

$$[1 - F(p_0)]^{n-1} f(p_0). \tag{ii}$$

Es decir, esta probabilidad está dada por la probabilidad de que $p > p_0$ para $n - 1$ tiendas multiplicada por la probabilidad de que una tienda ofrezca p_0. Si tomamos el valor esperado de todos estos precios se obtendrá el precio mínimo esperado que pagará el buscador tras comprobar los precios de n tiendas:

$$p^n_{\text{mín}} = \int_0^{\infty} [1 - F(p)]^{n-1} f(p)p\,dp. \tag{iii}$$

Como $(1 - F)$ es menor que uno, este precio mínimo disminuye a medida que aumenta la muestra de tiendas visitadas. También resulta fácil demostrar que la ganancia esperada de añadir una tienda más a la muestra (es decir, $p^{n-1}_{\text{mín}} - p^n_{\text{mín}}$) también disminuye a medida que aumenta n.

A19.2 Costos de la búsqueda

Si reunir información es caro, el individuo no reunirá toda la información posible. Por el contrario, el buscador que maximiza su utilidad elegirá n de tal forma que la disminución esperada del precio de la n-ésima búsqueda sea exactamente igual al costo de la búsqueda, c. Dado que la búsqueda tiene rendimientos decrecientes, los incrementos de c reducirán el valor de n que maximiza la utilidad. Asimismo, los individuos que tienen mayores costos de búsqueda pagarán precios esperados más altos. Stigler (1960), en su famoso estudio sobre el precio de los automóviles de segunda mano, fue el primero en observar estos resultados.

Dispersión de los precios

El hecho de que existan costos de búsqueda altos implica que los mercados no necesariamente cumplen con la "ley de un único precio". En ausencia de estos costos, los individuos siempre buscarían el precio más bajo, garantizando que éste es el único precio que puede haber en equilibrio. Sin embargo, los costos de búsqueda tienden a separar los mercados, incluso en el caso de los bienes homogéneos. Por ejemplo, Gaynor y Polachek (1994) han concluido que la información incompleta sobre los precios de los médicos hace que los pacientes paguen, en promedio, 30% más de lo que pagarían con información completa sobre los precios. Encontraron que los costos adicionales de la información imperfecta eran más altos en el caso de los servicios importantes, pero adquiridos con poca frecuencia, como las visitas a los hospitales para seguimiento. De otra parte, los costos derivados de la información incompleta sobre los precios fueron mucho más bajos en las consultas de pediatría, las generales y los servicios que se emplean repetidas veces.

Diversas formas nos permiten reducir las dispersiones de precios y los costos de información. Muchos estados exigen que los precios de productos como la gasolina o las medicinas de patente sean "exhibidos al público", ofreciendo así una vía de bajo costo para comprar después de comparar precios. Los anuncios de precios en los medios de comunicación es otra vía de bajo costo para informar a los consumidores. La Comisión Federal de Comercio de Estados Unidos ha obligado a muchas profesiones, como las de abogado o de agente inmobiliario, que dejen de prohibir los anuncios de precios. La Comisión afirma que el principal efecto de estas prohibiciones de anunciar los precios es aumentar la dispersión de los precios y proporcionar rendimientos excesivamente competitivos a algunos proveedores. Por último, los consumidores mismos pueden reducir la dispersión de los precios comprando información sobre precios. Con este objeto, en años recientes, han surgido una serie de servicios para la adquisición de automóviles y el alquiler de apartamentos.

A19.3 Estrategia del precio bajo reserva

Elegir una estrategia de búsqueda de precios *a priori* podría no ser lo óptimo. Si encontráramos un precio asombrosamente bajo en, por decir, la quinta tienda visitada, no tendría mucho sentido que visitáramos las restantes $n - 5$ tiendas. Una estrategia de búsqueda en secuencia que es óptima en distintas circunstancias consiste en que el individuo elija un *precio bajo reserva* (p_R) y que acepte el primer precio que encuentre igual o menor que p_R. Debemos elegir el precio bajo reserva de tal manera que la ganancia esperada de una búsqueda más, una vez que hemos encontrado p_R sea igual al costo de la búsqueda, c. Es decir, queremos conocer el valor esperado de $p_R - p$ para valores de $p \le p_R$. Si fijamos este valor igual a c, podremos obtener la solución de un p_R óptimo.

$$c = \int_0^{p_R} (p_R - p) f(p) dp \qquad \textbf{(iv)}$$

Ahora, un incremento de c hará que esta persona opte por un precio bajo reserva más alto y que visite unas pocas tiendas más.[1] Con esta estrategia de secuencia, al igual que en la estrategia de la muestra de tamaño fijo, los incrementos de los costos de búsqueda disminuyen la cantidad de búsquedas que hacen los individuos.

Salarios bajo reserva

Este planteamiento de la teoría de la búsqueda ha sido aplicado con más frecuencia al problema de los trabajadores desempleados que están buscando empleo. En esa aplicación, la estrategia óptima consiste en elegir el salario mínimo que será aceptado, antes de aceptar un empleo. Existe mucha bibliografía teórica y empírica sobre la relación entre salarios bajo reserva y los precios de búsqueda de un empleo (véanse, por ejemplo, Kiefer y Neumann, 1989). La conclusión más importante de estos estudios probablemente sea que los salarios bajo reserva tienden a disminuir a lo largo del tiempo a medida que los plazos de desempleo se prolongan. Al parecer, también hay evidencia de que las prestaciones generosas por desempleo incrementan los salarios bajo reserva. Sin embargo, en la mayoría de los casos, los salarios bajo reserva no se miden de manera directa, sino que son inferidos a partir del comportamiento de los trabajadores. Algunos economistas (por ejemplo, Cox y Oaxaca, 1992) han intentado medir los salarios (o precios) bajo reserva de manera directa mediante experimentos controlados. Si bien la creación de estos experimentos plantea una serie de problemas conceptuales, la evidencia que han arrojado parece convalidar, en términos generales, las conclusiones que implica el comportamiento de búsqueda de los trabajadores, que se ha observado, en los mercados laborales.

A19.4 Distribución de precios

La estrategia de búsqueda óptima también dependerá de las características de la distribución de los precios. Cuanto mayor sea μ_p, tanto mayor será la intensidad de la búsqueda, *ceteris paribus.* Es más probable que los individuos busquen cuándo piensan comprar bienes caros que bienes baratos. Asimismo, cuanto mayor sea la dispersión de los precios, tanto mayor la cantidad de búsqueda que sea la óptima. Evidentemente, si $\sigma_p = 0$ como implica la "ley de un precio único" en competencia perfecta, cualquier búsqueda sería superflua. Todos estos resultados dependen del conocimiento que tenga el individuo respecto a la distribución de los precios antes de iniciar la búsqueda, aun cuando Rothschild (1974) demostró que es posible obtener resultados cualitativamente parecidos cuando los individuos no cuentan con información *a priori* sobre los precios y deben inferir la distribución con base en la información que han reunido en su búsqueda.

Bibliografía

Cox, J. C. y R. L. Oaxaca. "Direct Tests of the Reservation Wage Property", *Economic Journal*, noviembre de 1992, pp. 1423-1432.

Gaynor, M. y S. W. Polachek. "Measuring Information in the Market: An Application to Physician Services", *Southern Economic Journal*, abril de 1994, pp. 815-831.

Kiefer, N. M. y G. R. Neumann. *Search Models and Applied Labor Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Rothschild, M. "Searching for the Lowest Price When the Distribution of Prices Is Unknown", *Journal of Political Economy*, julio-agosto de 1974, pp. 689-711.

Stigler, G. J. "The Economics of Information", *Journal of Political Economy*, junio de 1961, pp. 213-225.

[1]La integración por partes demuestra que

$$c = \int_0^{p_R} (p_R - p) f(p) dp = p_R F(p_R) - \int_0^{p_R} p f(p) dp$$
$$= \int_0^{p_R} F(p) dp,$$

lo cual deja en claro que p_R y c guardan una relación positiva.

Capítulo 20

EXTERNALIDADES Y BIENES PÚBLICOS

En el capítulo 12 se abordaron, de manera breve, algunos problemas que pueden interferir con la eficiencia de la asignación en los mercados en competencia perfecta. Aquí se analizarán dos de estos problemas con más detalle: las externalidades y los bienes públicos. Este análisis tiene un doble propósito. En primer término, queremos demostrar con claridad por qué la existencia de externalidades y de bienes públicos puede distorsionar la asignación de recursos. Al hacerlo, podremos ilustrar algunas características adicionales del tipo de información que ofrecen los precios competitivos, así como de las circunstancias que pueden provocar que disminuya el potencial de esta información. La segunda razón para analizar las externalidades y los bienes públicos con más detalle es sugerir formas que permiten mitigar los problemas de asignación que ellos plantean. Veremos que, cuando menos en algunos casos, la eficiencia de los resultados de los mercados en competencia puede ser más sólida de lo que se había esperado.

Definición de las externalidades

Las externalidades ocurren porque los agentes económicos tienen efectos en terceros, los cuales no quedan reflejados en las transacciones del mercado. Los fabricantes de productos químicos que arrojan humos tóxicos sobre sus vecinos, los aviones que despiertan a la gente o los automovilistas que arrojan basura en las carreteras son, desde un punto de vista económico, agentes que desempeñan el mismo tipo de actividad; es decir, tienen un efecto directo en el bienestar de otros, el cual queda fuera de los canales directos del mercado. Podemos comparar estas actividades con los efectos directos de los mercados. Por ejemplo, cuando decido comprar una barra de pan, estoy aumentando, tal vez de manera imperceptible, el precio del pan en general y esto puede afectar al bienestar de otros compradores de pan. Pero estos efectos, como quedan reflejados en los precios de mercado, no son verdaderas externalidades y no afectan la capacidad del mercado para asignar los recursos con eficiencia.[1] Por el contrario, el incremento del precio del pan debido a mi compra adicional es una representación precisa de las preferencias sociales, y el aumento del precio ayuda a garantizar que se fabrique la combinación adecuada de productos. No podemos decir lo mismo del caso de los residuos químicos tóxicos, del ruido de los aviones o de la basura. En estos casos, los precios de mercado (de los productos químicos, de los viajes en avión o de los contenedores de basura), tal vez no reflejen los costos sociales reales con precisión, porque pueden no tener en cuenta el daño que están haciendo a terceros. La información transmitida por los precios de mercado es básicamente imprecisa y ello da lugar a una mala asignación de los recursos.

[1] A veces, los efectos que un agente económico tiene en otro, los cuales se producen por medio del sistema de mercado, se conocen como externalidades *pecuniarias*, para diferenciarlos de las externalidades *tecnológicas* que estamos analizando. Aquí, usamos el término *externalidades* para hacer referencia a este segundo tipo, porque sólo estas externalidades tienen consecuencias para la eficiencia con la cual los mercados en competencia asignan los recursos.

Por tanto, en resumen, hemos desarrollado la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Externalidad. Una *externalidad* ocurre siempre que las actividades de un agente económico afecten las actividades de otro agente de una forma que no se refleje en las transacciones del mercado.

Antes de analizar con detalle por qué el hecho de no tener en cuenta las externalidades puede dar lugar a una mala asignación de los recursos, se analizarán algunos ejemplos que podrían aclarar la naturaleza del problema.

Externalidades entre empresas

Para ilustrar la cuestión de las externalidades en su forma más sencilla, consideremos el caso de dos empresas, una que produce el bien x y otra que produce el bien y, en el cual cada una sólo emplea un único factor: el trabajo. Se dice que la producción del bien x tiene un efecto externo sobre la producción de y si la producción de y no sólo depende de los factores que elija el empresario que lo fabrica, sino también del nivel de producción del bien x. La notación de la función de producción del bien y quedaría expresada como

$$y = f(k, l; x), \tag{20.1}$$

donde x aparece a la derecha del punto y coma de la ecuación para demostrar que se trata de un efecto en la producción que no puede controlar en absoluto el empresario que fabrica y.[2] Por ejemplo, supongamos que hay dos empresas ubicadas a la orilla de un río y que la empresa y se encuentra río abajo respecto a la empresa x. Supongamos que el proceso productivo de la empresa x contamina el río. En este caso, la producción de la empresa y podría depender no sólo del nivel de factores productivos que emplea, sino también de la cantidad de elementos contaminantes que descienden por el río. A su vez, la producción de la empresa x determinará también el nivel de contaminantes. En la función de producción que muestra la ecuación 20.1, habría una productividad marginal de la producción de la empresa x negativa, $\partial y/\partial x < 0$. Los incrementos de la producción de x provocarían que se produjera menos y. En la sección siguiente se volverá a analizar este caso con más detalle, dado que es representativo de los tipos más sencillos de externalidades.

Externalidades positivas

La relación entre dos empresas puede resultar benéfica. La mayoría de los ejemplos de estas externalidades positivas son de naturaleza más bien campestre. El más famoso podría ser el propuesto por J. Meade, el cual implica a dos empresas, una que produce miel, criando abejas, y otra que produce manzanas.[3] Dado que las abejas se alimentan de las flores de los manzanos, un incremento de la producción de manzanas mejorará la productividad de la industria de la miel. Los efectos benéficos de tener abejas bien alimentadas son una externalidad positiva para el fabricante de miel. En la notación de la ecuación 20.1, $\partial y/\partial x$ sería ahora positiva. En el caso habitual de la competencia perfecta, las actividades productivas de una empresa no tienen efecto directo alguno en las de otras empresas: $\partial y/\partial x = 0$.

Externalidades en la utilidad

Las externalidades también se pueden producir si las actividades de un agente económico afectan de manera directa la utilidad de un individuo. Los ejemplos más comunes de externalidades ambientales son de este tipo. Desde una perspectiva económica, el hecho de que estos efectos sean provocados por las empresas (por decir, en forma de residuos tóxicos o de ruido de aviones) o por otros individuos (basura o, tal vez, el ruido de una radio a todo volumen) no hace mucha diferencia. En todos estos casos, incorporaremos la cantidad de estas actividades directamente a la función de utilidad del individuo, de modo muy parecido al que se utilizó para incorporar la producción de la empresa x a la función de producción de la empresa y en la ecuación 20.1. Al igual que en el caso de las empresas, estas externalidades a veces pueden ser positivas

---

[2]Tendremos que volver a definir el supuesto de "ausencia de control", en grado considerable, conforme vaya avanzando el análisis que hacemos en este capítulo.

[3]J. Meade. "External Economies and Diseconomies in a Competitive Situation", *Economic Journal 62*, marzo de 1952, pp. 54-67.

(de hecho, a usted le podría gustar la canción que está sonando en la radio de su vecino). Por tanto, de nueva cuenta, podemos considerar que una situación sin externalidades es un terreno intermedio en el cual las actividades de otros agentes no tienen un efecto directo en la utilidad de los individuos.

Un tipo especial de externalidad, que es importante para el análisis de las elecciones sociales, surge cuando la utilidad de un individuo depende directamente de la utilidad de otro. Por ejemplo, si a Santiago le preocupa el bienestar de Juan, podríamos expresar su función de utilidad (U_S) como

$$\textbf{utilidad} = U_S(x_1, \ldots, x_n; U_J), \qquad \textbf{(20.2)}$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ son los bienes que consume Santiago y U_J es la utilidad de Juan. Si Santiago es altruista y quiere que Juan esté en buena situación, como ocurriría si Juan fuera un pariente cercano, $\partial U_S/\partial U_J$ sería positiva. Por otra parte, si Santiago envidiara a Juan, $\partial U_S/\partial U_J$ podría ser negativa; es decir, las mejoras de la utilidad de Juan provocan que Santiago quede en peor situación. El terreno intermedio entre el altruismo y la envidia se produciría si a Santiago le fuera indiferente el bienestar de Juan ($\partial U_S/\partial U_J = 0$), y esto es lo que hemos supuesto usualmente a lo largo de este libro (encontrará un breve análisis en las ampliaciones del capítulo 3).

Externalidades de los bienes públicos

Los bienes de naturaleza "pública" o "colectiva" serán el punto de enfoque de nuestro análisis en la segunda mitad de este capítulo. La característica que define estos bienes es que no son exclusivos; es decir, una vez que los bienes han sido producidos, por el gobierno o por una entidad privada, proporcionan beneficios a todo un grupo o tal vez a la sociedad completa. Técnicamente, no es posible limitar estos beneficios al grupo específico de individuos que los pagan, por lo cual los beneficios están a disposición de todos. Como se mencionó en el capítulo 12, la defensa nacional representa el ejemplo clásico. Una vez que se ha establecido un sistema de defensa, todos los individuos de la sociedad son protegidos por él, lo quieran o no y lo paguen o no. Elegir el nivel correcto de producción para este tipo de bienes puede ser un proceso muy engañoso, porque las señales del mercado no serán precisas.

Externalidades e ineficiencia en la asignación

Las externalidades provocan asignaciones ineficientes de los recursos porque los precios de mercado no reflejan con precisión los costos adicionales impuestos a terceros ni los beneficios que les proporcionan a ellos. Para ilustrar estas ineficiencias hace falta un modelo de equilibrio general, porque las asignaciones ineficientes en un mercado ponen en duda la eficiencia de los resultados determinados por el mercado en todas partes. Aquí hemos optado por un modelo de equilibrio general muy sencillo y, en cierto sentido, algo extraño, el cual permite señalar estas cuestiones de forma compacta. En concreto, suponemos que, en nuestra sencilla economía, sólo hay una persona y que su utilidad depende de las cantidades que se consuman de x y de y. Los niveles de consumo de estos dos bienes están denotados por x_c y y_c de modo que,

$$\textbf{utilidad} = U(x_c, y_c). \qquad \textbf{(20.3)}$$

Esta persona tiene una dotación inicial de x y de y (denotada por x^* y y^*) y puede consumirla directamente o emplearla como bienes intermedios para la producción. Para simplificar las cosas, suponemos que el bien x es producido empleando solamente el bien y, sujeto a la función de producción

$$x_o = f(y_i), \qquad \textbf{(20.4)}$$

donde el subíndice "o" se refiere a la producción y el subíndice "i" al factor productivo. Para ilustrar la externalidad suponemos que la producción del bien y depende, no sólo de la cantidad de x que se emplee como factor en el proceso de producción, sino también del nivel mismo de producción de x. Luego entonces, esto modelaría una situación en la cual, por decir, y se encuentra río abajo de la empresa x y debe lidiar con la contaminación que genera la producción de x. La función de producción de y está determinada por

$$y_o = g(x_i, x_o), \qquad \textbf{(20.5)}$$

donde $g_1 > 0$ (una mayor cantidad del factor x permite obtener más producción de y), pero $g_2 < 0$ (la producción adicional de x reduce la producción de y debido a la externalidad en cuestión).

En esta economía, las cantidades de cada bien están limitadas por la dotación inicial disponible y por la producción adicional que tiene lugar:

$$x_c + x_i = x_o + x^* \tag{20.6}$$

$$y_c + y_i = y_o + y^*. \tag{20.7}$$

Cálculo de la asignación eficiente

Luego entonces, el problema económico de esta sociedad consiste en maximizar su utilidad sujeto a las cuatro restricciones que representan las ecuaciones, de la 20.4 a la 20.7. Para resolver este problema debemos introducir multiplicadores lagrangianos. La expresión lagrangiana de este problema de maximización es

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = U(x_c, y_c) &+ \lambda_1[f(y_i) - x_o] + \lambda_2[g(x_i, x_o) - y_o] \\ &+ \lambda_3(x_c + x_i - x_o - x^*) + \lambda_4(y_c + y_i - y_o - y^*)\end{aligned} \tag{20.8}$$

y las seis condiciones de primer orden para alcanzar un máximo son

$$\begin{aligned}
\partial\mathscr{L}/\partial x_c &= U_1 + \lambda_3 = 0 && [\text{i}]\\
\partial\mathscr{L}/\partial y_c &= U_2 + \lambda_4 = 0 && [\text{ii}]\\
\partial\mathscr{L}/\partial x_i &= \lambda_2 g_1 + \lambda_3 = 0 && [\text{iii}]\\
\partial\mathscr{L}/\partial y_i &= \lambda_1 f_y + \lambda_4 = 0 && [\text{iv}]\\
\partial\mathscr{L}/\partial x_o &= -\lambda_1 + \lambda_2 g_2 - \lambda_3 = 0 && [\text{v}]\\
\partial\mathscr{L}/\partial y_o &= -\lambda_2 - \lambda_4 = 0 && [\text{vi}]
\end{aligned} \tag{20.9}$$

Eliminar las λ de estas ecuaciones es un proceso relativamente sencillo. Si se toma la proporción de las ecuaciones [i] y [ii] se obtendrá el conocido resultado de

$$TMS = U_1/U_2 = \lambda_3/\lambda_4. \tag{20.10}$$

Pero las ecuaciones [iii] y [vi] también implican que

$$TMS = \lambda_3/\lambda_4 = \lambda_2 g_1/\lambda_2 = g_1. \tag{20.11}$$

Por lo tanto, para que la producción de y sea óptima es necesario que la *TMS* del individuo sea igual a la productividad marginal de x en la producción de y. Esta conclusión repite el resultado del capítulo 12, donde demostramos que la elección de la producción eficiente exige que dy/dx en el consumo sea igual a dy/dx en la producción.

Para lograr la eficiencia en la producción de x debemos tener en cuenta la externalidad que esta producción plantea para y. Si se combinan las ecuaciones [iv-vi] tendremos

$$\begin{aligned}TMS = \lambda_3/\lambda_4 &= (-\lambda_1 + \lambda_2 g_2)/\lambda_4 = -\lambda_1/\lambda_4 + \lambda_2 g_2/\lambda_4 \\ &= 1/f_y - g_2.\end{aligned} \tag{20.12}$$

La intuición nos dice que esta ecuación exige que la *TMS* del individuo también sea igual a dy/dx obtenida mediante la producción de x. El primer término de esta expresión, $1/f_y$, representa la inversa de la productividad marginal de y en la producción de x; y éste es el primer componente de dy/dx dada su relación con la producción de x. El segundo término, g_2, representa el efecto negativo que la producción adicional de x tiene en la de y; ése es el segundo componente de dy/dx, dada su relación con la producción de x. Este término final se produce por la necesidad de tener en cuenta la externalidad de la producción de x. Si g_2 fuera igual a cero, entonces las ecuaciones 20.11 y 20.12 representarían, en esencia, la misma condición para tener una producción eficiente, la cual se aplicaría a x y también a y. Sin embargo, cuando se produce la externalidad, es más complejo determinar el nivel eficiente de producción de x.

Ineficiencia de la asignación competitiva

Si recurrimos a los precios competitivos en este sencillo modelo se producirá una asignación ineficiente de los recursos. Con los precios de equilibrio, P_x y P_y, el individuo que maximiza su utilidad optaría por

$$TMS = P_x/P_y \tag{20.13}$$

y el productor del bien y que maximiza sus ganancias elegiría un factor productivo x de acuerdo con

$$P_x = P_y g_1. \tag{20.14}$$

Luego entonces, la condición de eficiencia 20.11 se cumplirá. Pero el productor del bien x elegiría el factor productivo y de modo que

$$P_y = P_x f_y \quad \text{o} \quad P_x/P_y = 1/f_y. \tag{20.15}$$

Es decir, el productor de x no tendría en cuenta la externalidad que su producción plantea para y por lo cual no se cumpliría la condición de eficiencia 20.12. Este incumplimiento da lugar a un exceso de producción de x respecto al nivel de producción eficiente. Podemos demostrar lo anterior al observar que el producto marginal de y en la producción de x (f_y) es menor según la asignación del mercado que presenta la ecuación 20.15 que según la asignación óptima que presenta la ecuación 20.12. Con esta asignación, se emplea una cantidad de y para producir un nivel de x y por tanto se produce más x superior al óptimo. El ejemplo 20.1 ofrece un ejemplo cuantitativo de que esta cantidad no es óptima en un contexto de equilibrio parcial.

EJEMPLO 20.1

Externalidad en la producción

Como ilustración del equilibrio parcial de las pérdidas provocadas por no tener en cuenta la externalidad en la producción, supongamos que dos productores de papel se han establecido a la orilla de un río. La empresa que se encuentra río arriba (x) tiene una función de producción de la forma

$$x = 2000 l_x^{1/2}, \tag{20.16}$$

donde l_x es el número de trabajadores contratados por día y x es la producción de papel en metros. La empresa ubicada río abajo (y) tiene una función de producción similar, pero su producción se puede ver afectada por los residuos químicos que la empresa x vierte al río:

$$\begin{aligned} y &= 2000 l_y^{1/2}(x - x_0)^{\alpha} && (\text{para } x > x_0) \\ y &= 2000 l_y^{1/2} && (\text{para } x \le x_0), \end{aligned} \tag{20.17}$$

donde x_0 representa la capacidad natural del río para absorber contaminantes. Si $\alpha = 0$, el proceso de producción de x no tiene efecto alguno en la empresa y, mientras que si $\alpha < 0$, un incremento de x por encima de x_0 provoca que disminuya la producción de y.

Si suponemos que el papel se vende a \$1 por metro y que los trabajadores ganan \$50 por día, la empresa x maximizará su beneficio haciendo que este salario sea igual al ingreso del producto marginal del trabajo:

$$50 = p \cdot \frac{\partial x}{\partial l_x} = 1000 l_x^{-1/2}. \tag{20.18}$$

Por lo tanto, la solución es $l_x = 400$. Si $\alpha = 0$ (no hay externalidad alguna), la empresa y también contratará a 400 trabajadores. Cada empresa producirá 40 000 metros de papel.

Efectos de una externalidad. Cuando la empresa x tiene una externalidad negativa ($\alpha < 0$), la decisión de contratación que maximiza el beneficio de la empresa x no se ve afectada; es decir, seguirá contratando $l_x = 400$ y producirá $x = 40\ 000$. Pero para la empresa y, el producto marginal del trabajo será menor debido a esta externalidad. Por ejemplo, si $\alpha = -0.1$ y $x_0 = 38\ 000$, para maximizar las utilidades será necesario que

$$\begin{aligned} 50 = p \cdot \frac{\partial y}{\partial l_y} &= 1000 l_y^{-1/2}(x - 38\ 000)^{-0.1} \\ &= 1000 l_y^{-1/2}(2000)^{-0.1} \\ &= 468 l_y^{-1/2}. \end{aligned} \tag{20.19}$$

Si se resuelve esta ecuación para determinar l_y veremos que la empresa y ahora sólo contrata a 87 trabajadores debido a que ha disminuido su productividad. La producción de la empresa y ahora será

$$y = 2000(87)^{1/2}(2000)^{-0.1} = 8723. \tag{20.20}$$

Debido a la externalidad ($\alpha = 0.1$), la producción de papel será menor que cuando no existe una externalidad ($\alpha = 0$).

Ineficiencia. Podemos demostrar que la maximización descentralizada del beneficio es ineficiente en esta situación si imaginamos que la empresa x y la y se fusionan y que el gerente debe decidir cómo asignará la cantidad de trabajadores de las dos empresas combinadas. Si transfiere a un trabajador de la empresa x a la empresa y, la producción de x será

$$\begin{aligned} x &= 2000(399)^{1/2} \\ &= 39\ 950 \end{aligned} \tag{20.21}$$

y la de la empresa y

$$\begin{aligned} y &= 2000(88)^{1/2}(1950)^{-0.1} \\ &= 8796. \end{aligned} \tag{20.22}$$

La producción total ha aumentado en 23 metros de papel sin variar la contratación del factor trabajo. La asignación basada en el mercado era ineficiente porque la empresa x no tenía en cuenta el efecto que sus decisiones de contratación tenían en la empresa y.

Productividad marginal. Podemos ilustrar lo anterior de otra manera al calcular la verdadera productividad marginal social que el factor trabajo tiene para la empresa x. Si esta empresa contratara a un trabajador más, su propia producción aumentaría a

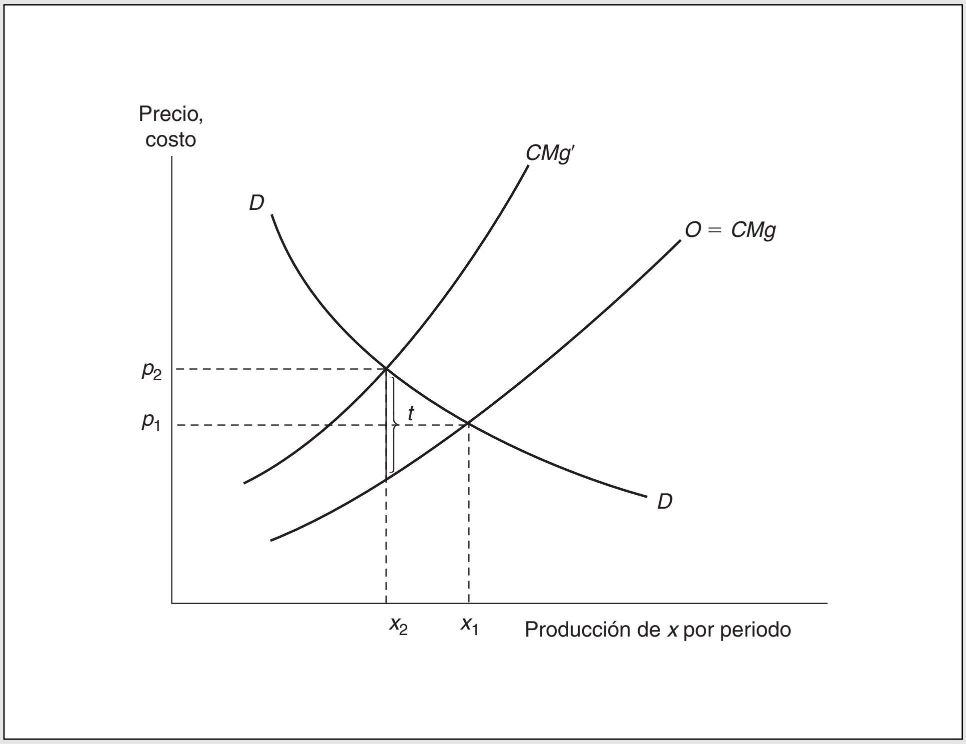
$$x = 2000(401)^{1/2} = 40\ 050. \tag{20.23}$$

Como exige la maximización del beneficio, el valor (privado) del producto marginal del trabajador número 401 es igual al salario. Pero ahora, el incremento de la producción de x también tiene un efecto en la empresa y: su producción disminuye unas 21 unidades. Por lo tanto, el ingreso marginal social del producto trabajo para la empresa y asciende, de hecho, a tan sólo \$29 (\$50 – \$21). Esto explica por qué el gerente de la empresa fusionada encontraría que es rentable transferir algunos trabajadores de la empresa x a la y.

Pregunta: Supongamos que $\alpha = +0.1$. ¿Esto qué implicaría de acuerdo con la relación entre las dos empresas? ¿Esta externalidad cómo afectaría la asignación del trabajo?

FIGURA 20.1 **Análisis gráfico de una externalidad**

La curva de demanda del bien x está dada por DD. La curva de oferta de x representa el costo marginal privado (CMg) que entraña producir x. Si la producción de x impone un costo externo a terceros, el costo marginal social (CMg') excederá al CMg en la medida de su cuantía. El equilibrio del mercado se produce en x_1 y, para este nivel de producción, el costo marginal social excede a la cantidad que los consumidores pagan por el bien x. Un impuesto por el monto de t que refleje el costo de la externalidad lograría la producción eficiente de x, dado por el nivel de producción x_2.



Soluciones al problema de la externalidad

La solución al perjuicio de la externalidad en la asignación que se funda en incentivos parte de la observación básica de que la producción de la actividad que genera la externalidad es demasiado alta en un equilibrio determinado por el mercado. El primer economista que ofreció un análisis exhaustivo de esta distorsión probablemente fue A. C. Pigou, quien, en la década de los veinte, sugirió que la solución más directa sería simplemente aplicar un impuesto a la entidad que generara la externalidad.[4] Todas las soluciones[5] que emplean incentivos para el problema de la externalidad se derivan de esta idea básica.

Un análisis gráfico

La figura 20.1 presenta la ilustración clásica de una externalidad y la solución impositiva de Pigou. La curva de oferta del bien x también representa el costo marginal (CMg) privado de la producción de ese bien. Cuando la demanda de x está dada por DD, el equilibrio del mercado

[4]A. C. Pigou. *The Economics of Welfare*, MacMillan, Londres, 1920. Pigou también reconoció la importancia de otorgar subsidios a los bienes que generan externalidades positivas.

[5]Aquí no analizamos las soluciones de la regulación pura, aun cuando el estudio de estas soluciones constituye una parte importante de la mayor parte de los cursos de economía del medio ambiente. Véanse W. J. Baumol y W. E. Oates. *The Theory of Environmental Policy,* 2a. ed., Cambridge University Press, Cambridge 1988, así como las ampliaciones de este capítulo.

se producirá en x_1. El costo externo que entraña la producción de x genera una diferencia entre el costo marginal privado (CMg) y el costo marginal social (CMg'); es decir, la distancia vertical entre las dos curvas representa el costo que la producción de x impone a terceros, en nuestros ejemplos, tan sólo a la empresa y. Nótese que el costo unitario de esta externalidad no necesariamente es constante, independientemente de la producción de x. Por ejemplo, en la figura, la magnitud de este costo externo aumenta a medida que la producción de x se expande (es decir, CMg' y CMg divergen). En el nivel de producción determinado por el mercado, x_1, el costo marginal social global excede al precio de mercado, p_1, indicando así que la fábrica ha llevado "demasiado lejos" la producción de x. La figura deja en claro que el nivel de producción óptimo es x_2 en el cual el precio de mercado pagado por el bien, p_2, ahora refleja todos los costos.

Como ocurre con cualquier impuesto, el aplicar un impuesto piguviano generaría una brecha vertical entre la curva de oferta y la de demanda del bien x. En la figura 20.1, este impuesto óptimo aparece como t. Aplicar este impuesto sirve para reducir la producción a x_2, el óptimo social. La recaudación fiscal es igual al daño externo que provoca la producción de x. Esta recaudación se puede emplear para compensar a la empresa y por este costo, si bien este punto no es crucial para el análisis. En este caso, nótese que el impuesto se debe fijar en el mismo nivel de daño existente en el óptimo (es decir, en x_2), y no en el nivel de daño del equilibrio inicial del mercado (x_1). El ejemplo siguiente plantea este punto y más adelante volveremos a nuestro sencillo modelo del equilibrio general para analizarlo de forma más completa.

EJEMPLO 20.2

Un impuesto piguviano sobre el papel

La ineficiencia del ejemplo 20.1 se debe a que el productor de papel que se encuentra río arriba (la empresa x) no toma en cuenta el efecto que su producción tiene en la empresa y. Un impuesto sobre la empresa x, determinado correctamente, provocará que ésta reduzca su contratación hasta el nivel donde desaparezca la externalidad. Dado que el río puede absorber los contaminantes generados por una producción de $x = 38\,000$, podríamos pensar en aplicar un impuesto (t) sobre la producción de la empresa que la lleve a reducir su producción hasta este nivel. Dado que la producción será de 38 000 metros si $l_x = 361$, podemos calcular t a partir de la condición de demanda de trabajo:

$$(1-t)MP_L = (1-t)1000(361)^{-0.5} = 50 \tag{20.24}$$

o

$$t = 0.05. \tag{20.25}$$

Este impuesto del 5%, de hecho reduciría a \$0.95 el precio que la empresa x recibe por su papel y le daría un incentivo para reducir su contratación a 39 trabajadores. Ahora, dado que el río puede absorber todos los contaminantes que genera x no habrá externalidad alguna en la función de producción de la empresa y. Ésta contratará a 400 trabajadores y producirá 40 000 metros de papel por día. Nótese que ahora la producción total de papel asciende a 78 000 metros, una cifra sustantivamente más alta que la de la producción en la situación sin impuesto. La solución del impuesto produce una mejora considerable en la eficiencia de la asignación de los recursos.

Pregunta: La tasa fiscal propuesta aquí (0.05) parece bastante pequeña ante las ganancias sustanciales de la producción que se obtienen en comparación con la situación del ejemplo 20.1. ¿Puede explicar por qué? ¿Una empresa fusionada optaría por $x = 38\,000$ incluso sin el impuesto?

Impuestos en el modelo de equilibrio general

En nuestro modelo de equilibrio general, el impuesto óptimo piguviano consiste en fijar $t = -p_y g_2$. Es decir, el impuesto unitario sobre el bien x debe reflejar el daño marginal que provoca x al reducir la producción de y, valorado al precio de mercado del bien y. Nótese de nueva cuenta que este impuesto debe estar basado en el valor de esta externalidad en la solución óptima; es decir, dado que g_2 normalmente estará en función del nivel de producción de x un impuesto basado en otro nivel de producción no resultaría adecuado. Con el impuesto óptimo, el precio neto que la empresa x afronta ahora para su producción será $p_x - t$ y elegirá el factor y en función de

$$p_y = (p_x - t)f_y. \tag{20.26}$$

De ahí que la asignación de recursos resultante logrará

$$TMS = p_x/p_y = (1/f_y) + t/p_y = (1/f_y) - g_2, \tag{20.27}$$

que es precisamente lo que se necesita para alcanzar el óptimo (compárelo con la condición de eficiencia 20.12). Podemos generalizar la solución del impuesto piguviano de diversas maneras que ofrecen importante información sobre cómo dirigir las políticas hacia las externalidades. Por ejemplo, en una economía con muchos productores de x, el impuesto ofrecería información sobre el efecto marginal que la producción de cualquiera de estos productores tendría en la producción de y. Por lo tanto, el plan fiscal mitiga la necesidad de que las autoridades reguladoras presten atención a detalles específicos de una empresa dada. Sin embargo, exige que las autoridades reguladoras cuenten con información suficiente para fijar los impuestos de manera correcta; es decir, deben conocer la función de producción de la empresa y.

Derechos de contaminación

Una innovación que reduciría la cantidad de información que se necesita con el impuesto piguviano es la creación de un mercado de "derechos de contaminación". Por ejemplo, supongamos que la empresa x debe comprar a la empresa y el derecho de contaminar el río que comparten. En este caso, la decisión de x de adquirir estos derechos es idéntica a su decisión de elegir su nivel de producción, porque no podrá producir si no posee los derechos. El ingreso neto que recibe x por unidad está dado por $p_x - r$, donde r es el pago que debe efectuar la empresa por cada unidad que produce. La empresa y debe decidir cuántos derechos le venderá a la empresa x. Dado que ésta recibirá r por cada derecho, tendrá que "elegir" la producción de x para maximizar sus utilidades:

$$\pi_y = p_y g(x_i, x_0) + rx_0, \tag{20.28}$$

y la condición de primer orden para alcanzar un máximo es

$$\partial\pi_y/\partial x_0 = p_y g_2 + r = 0 \quad \text{o} \quad r = -p_y g_2. \tag{20.29}$$

La ecuación 20.29 deja en claro que la solución de equilibrio para fijar los precios en el mercado de los derechos de contaminación será idéntica al equilibrio del impuesto piguviano. Desde el punto de vista de la empresa x no hay diferencia alguna entre pagar impuesto de cuantía t al gobierno o pagar una *regalía*, r, por ese mismo monto a la empresa y. Siempre y cuando $t = r$ (una condición que queda garantizada por la ecuación 20.29), el resultado será el mismo equilibrio eficiente.

El teorema de Coase

En un famoso artículo de 1960, Ronald Coase demostró que la característica clave del equilibrio de los derechos de contaminación es que estos derechos estén bien definidos y que se puedan intercambiar a un costo de transacción nulo.[6] La dotación inicial de los derechos es irrelevante porque el intercambio posterior siempre dará lugar al mismo equilibrio eficiente. En nuestro ejemplo hemos asignado los derechos inicialmente a la empresa y, permitiendo que ésta los venda a la empresa x por un costo unitario r. Si, por el contrario, hubiéramos asignado los derechos inicialmente a la empresa x, ésta seguiría teniendo que imputar algún costo por emplear ella misma los derechos en vez de vendérselos a la empresa y. Este cálculo, aunado a la decisión de la empresa y respecto a cuántos derechos comprará, nos dará, de nueva cuenta, un resultado eficiente. Para ilustrar el resultado de Coase, supongamos que la empresa x recibe x^T

[6]R. Coase. "The Problem of Social Cost", *Journal of Law and Economics* 3, octubre de 1960, pp. 1-44.

derechos para producir y contaminar. Puede optar por emplear una parte de estos derechos para llevar a cabo su propia producción (x_0), o puede vender algunos a la empresa y (cantidad dada por $x^T - x_0$). Las ganancias brutas de x están determinadas por

$$\pi_x = p_x x_0 + r(x^T - x_0) = (p_x - r) x_0 + rx^T = (p_x - r) f(y_i) + rx^T \quad \textbf{(20.30)}$$

y para y por

$$\pi y = p_y g(x_i, x_0) - r(x^T - x_0) \quad \textbf{(20.31)}$$

Es evidente que, en esta situación, la maximización del beneficio llevará exactamente a la misma solución que en el caso en el cual los derechos eran asignados a la empresa y. Dado que la cantidad total de derechos (x^T) es constante, las condiciones de primer orden para alcanzar un máximo serán exactamente las mismas en los dos casos. Esta independencia de la asignación inicial de los derechos se suele conocer como el *teorema de Coase*.

Si bien puede parecer que los resultados del teorema de Coase son contrarios a lo que dice la intuición (¿cómo es posible que el nivel de contaminación no dependa de quién es el titular inicial de los derechos?), éstos, en realidad, son tan sólo una afirmación de que, en ausencia de impedimentos para efectuar intercambios, las partes realizarán todas las transacciones que sean benéficas para las dos. Sin embargo, cuando los costos de transacción sean altos o cuando la información sea asimétrica, la dotación inicial de los derechos sí tendrá importancia, porque el tipo de intercambio que implica el teorema de Coase no podría darse. Por tanto, las limitaciones del teorema de Coase son las que ofrecen posibilidades más interesantes para profundizar el análisis. Éste ha tenido especial alcance en los campos del derecho y de la economía,[7] en los cuales el teorema ha sido aplicado a temas como las leyes de responsabilidad civil, las leyes de contratos y la normatividad de la seguridad de los productos (véanse los problemas 20.4 y 20.5).

Atributos de los bienes públicos

Ahora dirigiremos nuestra atención a una serie de problemas afines sobre la relación entre los mercados en competencia y la asignación de recursos: los planteados por la existencia de bienes públicos. Empezaremos por presentar una definición precisa de este concepto y, a continuación, se analizará el porqué estos bienes plantean problemas de asignación. Después, se analizará de manera breve las formas que podrían servir para mitigar estos problemas.

Las definiciones más frecuentes de bienes públicos destacan dos atributos de este tipo de bienes: que no son excluyentes ni rivales en el consumo. A continuación se analizan con más detalle estos dos atributos.

No son excluyentes

La primera propiedad que distingue a los bienes públicos se refiere a que los individuos queden excluidos o no de los beneficios que se derivan de consumir el bien. De hecho, en la mayor parte de los bienes privados esta exclusión es posible; es decir, si no pago una hamburguesa, es fácil que me excluyan de su consumo. Sin embargo, en algunos casos, esta exclusión es muy costosa o imposible. El ejemplo clásico es el de la defensa nacional. Cuando se ha instituido un sistema de defensa, todos los que están dentro del país se beneficiarán del sistema, independientemente de que paguen por él o no. Podemos aplicar argumentos similares, en un ámbito más local, a bienes como los programas de control de mosquitos o de vacunación contra una enfermedad. En estos casos, una vez que el programa ha sido instituido, es imposible excluir a un miembro cualquiera de la comunidad de los beneficios del programa, independientemente de que pague por él o no. Por lo tanto, se pueden dividir los bienes en dos categorías, en función de la siguiente definición:

Bienes excluyentes. Un bien es *excluyente* si resulta relativamente fácil excluir a los individuos de sus beneficios una vez que ha sido producido. Un bien *no es excluyente* si resulta muy caro o imposible excluir a los individuos de los beneficios de éste.

[7]El texto clásico es el de R. A. Posner. *Economic Analysis of Law,* 4a. ed. (Boston: Little Brown, 1992). Encontrará un planteamiento más matemático en T. J. Miceli. *Economics of the Law*, Oxford University Press, Nueva York, 1997.

No son rivales

La segunda propiedad que caracteriza a los bienes públicos es que no son rivales, o sea que es posible consumir unidades adicionales de uno de estos bienes a un costo marginal social nulo. Por supuesto que, en el caso de la mayor parte de los bienes, el consumo de una unidad adicional implica cierto costo marginal de producción. Por ejemplo, si alguien consume una hamburguesa más, requiere que diversos recursos sean destinados a su producción. Sin embargo, en el caso de algunos bienes, esto no es así. Por ejemplo, consideremos el caso de un automóvil más que cruza un puente en horas de poco tránsito. Dado que el puente ya está ahí, el hecho de que un vehículo más lo cruce no requiere emplear recursos adicionales y no reduce el consumo en otras partes. Asimismo, el hecho de que un espectador más sintonice un canal de televisión no implica costo adicional alguno, aun cuando esta acción produciría un consumo adicional. Por tanto, hemos elaborado la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Bienes que no son rivales. Un bien *no es rival* si el consumo de unidades adicionales del mismo no entraña algún costo marginal social de producción.

Tipología de los bienes públicos

Los conceptos de los bienes qua no son excluyentes y que no son rivales están relacionados en cierto sentido. Muchos bienes que no son excluyentes tampoco son rivales. La defensa nacional y el control de los mosquitos son dos ejemplos de bienes que no permiten la posibilidad de exclusión y cuyo consumo adicional se produce a un costo marginal nulo. Podríamos sugerir muchos otros ejemplos. Sin embargo, los conceptos no son idénticos; es decir, algunos bienes pueden tener una propiedad, pero no la otra. Por ejemplo, es imposible, o al menos muy caro, excluir a algunos buques de pesca de los bancos marinos de peces y, sin embargo, es evidente que la llegada de otro barco impone costos sociales porque todos los involucrados pescarán un volumen menor. Por otra parte, emplear un puente a una hora que no sea de mucho tránsito no sería rival, pero es posible excluir a los posibles usuarios estableciendo casetas de peaje. La tabla 20.1 contiene una clasificación cruzada de los bienes en función de su posibilidad de exclusión y de su rivalidad. Presenta varios ejemplos de bienes que pertenecen a las dos categorías. Muchos de estos bienes, menos los del extremo superior izquierdo de la tabla (bienes privados excluyentes y rivales) suelen ser producidos por los gobiernos. Es el caso especial de los bienes que no son excluyentes porque, como veremos, resulta difícil desarrollar formas que obliguen a pagar por estos bienes, a no ser por medio de impuestos. Los bienes que no son rivales suelen ser producidos de forma privada, al final de cuentas, son puentes privados, piscinas y autopistas que requieren un pago de los consumidores para poder usarlos, siempre y cuando sea posible excluir de su consumo a los que no pagan.[8] No obstante, se empleará una definición estricta que exige que se cumplan las dos condiciones:

TABLA 20.1 **Ejemplos que muestran la tipología de los bienes públicos y los privados**

		Excluyentes	
		Sí	**No**
Rivales	**Sí**	Hamburguesas, automóviles, casas	Puentes, piscinas, televisión (mixta) transmitida por satélite
	No	Zonas pesqueras, pastizales públicos, aire limpio	Defensa nacional, control de mosquitos, justicia

[8]Los bienes que no son rivales y que permiten imponer un mecanismo de exclusión a veces se conocen como *bienes de club,* porque el suministro de estos bienes se organiza de la misma forma que los clubes privados. Estos clubes pueden cobrar una cuota de "afiliación", la cual permite que los miembros los utilicen sin límite alguno. Las economías a escala del proceso de producción del bien determinan el tamaño óptimo del club. Encontrará un análisis de este tema en R. Cornes y T. Sandler. *The Theory of Externalities, Public Goods, and Club Goods*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

DEFINICIÓN

Bien público. Un bien es *público* (puro) si, una vez producido, no es posible excluir a nadie de su disfrute y si el consumo del bien no es rival; es decir, el costo marginal de un consumidor adicional es nulo.

Bienes públicos y asignación de recursos

Para ilustrar el problema de asignación que genera el bien público, volvemos a emplear un modelo de equilibrio general muy sencillo. En este modelo sólo hay dos individuos; una economía de una sola persona no tendría problemas de bienes públicos, porque ésta incorporaría todos los beneficios de los bienes a sus decisiones de consumo. Se llamará a estos dos individuos A y B. Además, en esta economía, sólo hay dos bienes. El bien y es un bien privado normal, y cada persona parte con una asignación de este bien que está dada, respectivamente, por y^{A*} y y^{B*}. Cada una puede optar por consumir de manera directa parte de su bien y o por dedicar una parte a la producción de un solo bien público, x. Las cantidades que aporta cada individuo están dadas por y_s^A y y_s^B, y el bien público es producido según la función de producción

$$x = f(y_s^A + y_s^B). \qquad \textbf{(20.32)}$$

La utilidad resultante para cada persona de esta sociedad está determinada por

$$U^A[(x,(y^{A*} - y_s^A)], \qquad \textbf{(20.33)}$$

y

$$U^B[(x,(y^{B*} - y_s^B)]. \qquad \textbf{(20.34)}$$

Nótese que, en este caso, el nivel de producción del bien público, x, aparece de forma idéntica en la función de utilidad de cada individuo. Ésta es la forma de capturar matemáticamente las características de estos tipos de bienes en cuanto a que no son excluyentes ni rivales. El hecho de que no son excluyentes queda reflejado en que la cantidad de x que consume cada individuo es independiente de la cantidad con la que contribuye a su producción. El hecho de que no son rivales queda reflejado en que x es igual para cada persona y es idéntico a la cantidad total de su producción. La cantidad de beneficios de x que consume A no disminuya la cantidad que puede consumir B. Estas dos características del bien x constituyen obstáculos para una producción eficiente según la mayor parte de los sistemas de decisión descentralizada, inclusive en los mercados en competencia perfecta.

En este problema, la condición necesaria para la asignación eficiente de los recursos consiste en elegir el nivel del bien público (y_s^A y y_s^B) que maximiza, por decir, la utilidad de A dado un nivel de utilidad de B. La expresión lagrangiana para este problema es

$$\mathscr{L} = U^A(x, y^{A*} - y_s^A) + \lambda[U^B(x, y^{B*} - y_s^B) - K], \qquad \textbf{(20.35)}$$

donde K es un nivel constante de la utilidad de B. Las condiciones de primer orden para obtener un máximo son

$$\partial\mathscr{L}/\partial y_s^A = U_1^A f' - U_2^A + \lambda U_1^B f' = 0 \qquad \textbf{(20.36)}$$

y

$$\partial\mathscr{L}/\partial y_s^B = U_1^A f' - \lambda U_2^B + \lambda U_1^B f' = 0. \qquad \textbf{(20.37)}$$

Una comparación de estas dos ecuaciones ofrece el resultado inmediato de que

$$\lambda U_2^B = U_2^A. \qquad \textbf{(20.38)}$$

Como era de esperar en este caso, el punto óptimo exige que la utilidad marginal de la cantidad de y que consumen A y B sea igual, excepto por la constante de proporcionalidad, λ. Ahora podemos combinar esta ecuación con la ecuación 20.36 o con la 20.37 para derivar la condición del nivel óptimo de producción del bien público x. Por ejemplo, si se emplea la ecuación 20.36 tendremos

$$U_1^A/U_2^A + \lambda U_1^B/\lambda U_2^B = 1/f' \qquad \textbf{(20.39)}$$

o, de manera más sencilla,

$$TMS^A + TMS^B = 1/f'. \qquad \textbf{(20.40)}$$

La idea intuitiva que subyace a esta condición, formulada por primera vez por P. A. Samuelson,[9] es una simple adaptación de las condiciones descritas en el capítulo 12 para el caso de los bienes públicos. En el caso de estos bienes, la *TMS* del consumo debe reflejar la cantidad de y a la que están dispuestos a renunciar *todos* los consumidores del bien para poder obtener una unidad adicional de x, porque todos obtendrán beneficios de la producción adicional de x. Por tanto, la suma de la *TMS* de cada individuo es la que debemos igualar a la dy/dx en la producción (en este caso dada por $1/f'$).

Falla de un mercado en competencia

La producción del bien x y del y en los mercados en competencia no podrán alcanzar esta meta de asignación. Con precios perfectamente competitivos p_x y p_y, cada individuo igualará su *TMS* con la proporción de los precios p_x/p_y. El productor del bien x también fijaría $1/f'$ de modo que fuera igual a p_x/p_y, como se requeriría para maximizar el beneficio. Este comportamiento no alcanzaría la condición del nivel óptimo que expresa la ecuación 20.40. La proporción de los precios p_x/p_y sería "demasiado baja" porque proporcionaría muy pocos incentivos para producir el bien x. En el mercado privado, cada consumidor no tiene en cuenta la forma en que su gasto en bienes públicos beneficia a otros consumidores, por lo cual esa persona no dedicará recursos suficientes a la referida producción.

En esta situación, podemos adjudicar esta falla de la asignación a la forma en que los mercados privados suman las demandas de los individuos. En el caso de una cantidad determinada, la curva de demanda del mercado muestra la valoración marginal del bien. Si una unidad adicional fuera producida, ésta podría ser consumida por alguien que la valoraría a ese precio de mercado. En el caso de los bienes públicos, el valor de producir una unidad adicional es, de hecho, la suma de la valoración que cada consumidor adjudica a ese producto adicional, porque todos los consumidores se beneficiarán de él. Por lo tanto, en este caso, se deben sumar de manera vertical las curvas de demanda de los individuos, como muestra la figura 20.2, en vez de horizontalmente, como ocurre en los mercados en competencia. Así, el precio resultante de esta curva de demanda de un bien público reflejará, para un nivel de producción cualquiera, qué tanto valorarán todos los consumidores esa unidad adicional del producto. Sin embargo, la curva de demanda habitual del mercado no reflejará correctamente esta valoración marginal completa.

Ineficiencia de un equilibrio de Nash

Un planteamiento alternativo para la producción de bienes públicos en mercados en competencia recurriría a las contribuciones voluntarias de los individuos. Por desgracia, este planteamiento también dará lugar a resultados de ineficiencia. Consideremos la situación de la persona A, que está pensando en contribuir o_A de su dotación inicial y para la producción del bien público. Por lo tanto, el problema de maximización de la utilidad de A será

$$\textbf{Elegir } o_A \textbf{ de modo que maximice } U^A[f(o_A + o_B), y^{A*} - o_A]. \qquad \textbf{(20.41)}$$

La condición de primer orden para obtener un máximo es

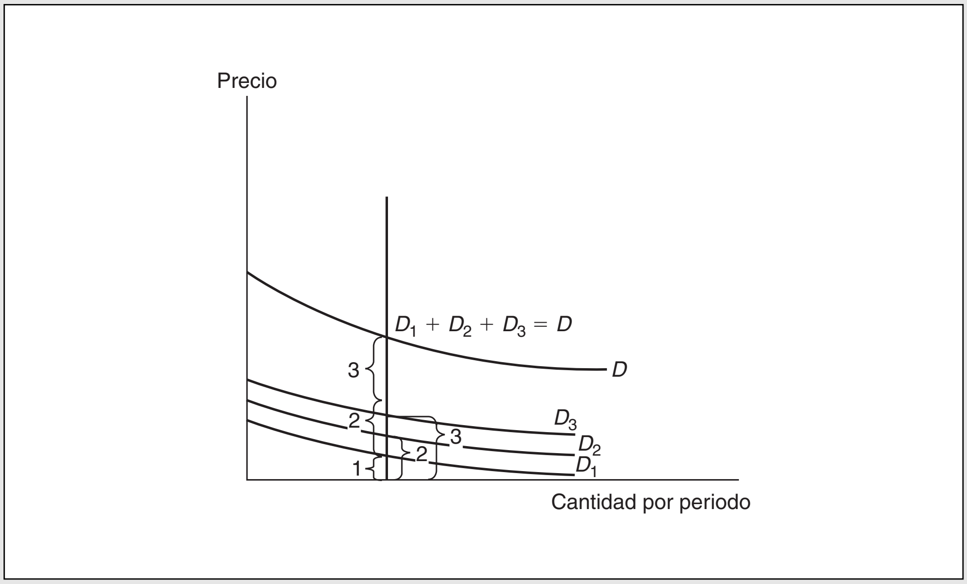
$$U_1^A f' - U_2^A = 0 \quad \text{o} \quad U_1^A/U_2^A = TMS^A = 1/f'. \qquad \textbf{(20.42)}$$

Dado que la misma lógica se aplicaría a la persona B, en esta ocasión tampoco se cumplirá la condición de eficiencia 20.40. De nueva cuenta, el problema es que cada persona sólo tiene en

[9]P. A. Samuelson. "The Pure Theory of Public Expenditure", *Review of Economics and Statistics*, noviembre de 1954, pp. 387-389.

FIGURA 20.2 **Derivación de la demanda de un bien público**

En el caso de un bien público, el precio que los individuos están dispuestos a pagar por una unidad más (su "valoración marginal") es igual a la suma de lo que pagaría cada individuo. Por lo tanto, en el caso de los bienes públicos, se debe derivar la curva de demanda sumando de manera vertical, y no de manera horizontal como en el caso de los bienes privados.



cuenta su propio beneficio al invertir en el bien público, sin considerar los beneficios aportados a los demás. Habiendo muchos consumidores, este beneficio directo puede ser, de hecho, muy pequeño, por ejemplo, los impuestos de un individuo cuánto contribuyen a la defensa nacional de Estados Unidos. En este caso, una persona puede optar por $o_A = 0$ y convertirse en un "parásito" puro, que espera beneficiarse de los gastos de los demás. Si todas las personas adoptan esta estrategia, no habría recursos destinados a los bienes públicos. El ejemplo 20.3 ilustra el problema del parásito en una situación que nos resulta muy conocida.

Adquisición de un bien público: el dilema de los compañeros de habitación

Para poder ilustrar de manera numérica la naturaleza del problema de los bienes públicos, supongamos que dos compañeros, que comparten una habitación y tienen preferencias idénticas, derivan utilidad de la cantidad de cuadros que cuelgan de los muros de su habitación (x) y la cantidad de barras de cereal (y) que comen. La forma específica de la función de utilidad está determinada por

$$U_i(x, y_i) = x^{1/3}y_i^{2/3} \quad (\text{para } i = 1, 2). \tag{20.43}$$

Nótese que la utilidad de cada persona depende de la cantidad total de cuadros colgados y de la cantidad de barras de cereal que cada uno consume de manera individual. Por tanto, en este problema, el disfrute de los cuadros es un bien público.

Si suponemos que cada uno de ellos cuenta con \$300 para gastar y que $p_x = \$100$, $p_y = \$0.20$, podremos explorar las consecuencias de distintas asignaciones del gasto. Con base en ejemplos

(*continúa*)

EJEMPLO 20.3 *CONTINUACIÓN*

anteriores de la Cobb-Douglas, sabemos que si cada persona viviera sola, ella gastaría un tercio de su ingreso en cuadros ($x = 1$) y dos tercios en barras de cereal ($y = 1000$).

Suministro de bienes públicos y estrategia. Sin embargo, cuando los compañeros viven juntos en una habitación, cada uno debe pensar en lo que hará el otro. Por ejemplo, cada uno podría suponer que el otro comprará los cuadros. En tal caso $x = 0$ y los dos terminarán teniendo un nivel de utilidad nulo. Por otra parte, la persona 1 podría suponer que la persona 2 no comprará cuadro alguno. Si así fuera, la persona 1 optaría por comprar uno y recibiría una utilidad de

$$U_1(x, y_1) = 1^{1/3}(1000)^{2/3} = 100, \tag{20.44}$$

mientras que la utilidad de la persona 2 sería

$$U_2(X, Y_2) = 1^{1/3}(1500)^{2/3} = 131. \tag{20.45}$$

Es evidente que la persona 2 ha ganado gracias a su posición de parásito. Las compras de la persona 1 proporcionan una externalidad a la persona 2. Por supuesto que los cuadros que comprará la persona 2, si decidiera tener conciencia social, también proporcionarían una externalidad a la persona 1.

Ineficiencia de la asignación. Podemos demostrar que la solución obtenida con las ecuaciones 20.44 y 20.45, así como con muchas otras posibles, es ineficiente si se calcula la tasa de sustitución marginal de cada persona:

$$TMS_i = \frac{\partial U_i/\partial x}{\partial U_i/\partial y_i} = \frac{y_i}{2x}. \tag{20.46}$$

Por lo tanto, con las asignaciones descritas,

$$\begin{aligned} TMS_1 &= \frac{1000}{2} = 500 \\ TMS_2 &= \frac{1500}{2} = 750. \end{aligned} \tag{20.47}$$

Estos compañeros de habitación estarían dispuestos a sacrificar un total de 1250 barras de cereal a cambio de un cuadro más: un sacrificio que, de hecho, sólo les costaría 500 barras si colaboraran. En este caso, la toma de decisiones descentralizada es ineficiente y las personas no compran suficientes cuadros.

Una asignación eficiente. Para poder calcular el nivel eficiente de la adquisición de cuadros, se debe fijar la suma de la *TMS* de cada persona en igualdad con la proporción de precios de los bienes, porque esta suma refleja correctamente al intercambio que harían los compañeros de habitación:

$$TMS_1 + TMS_2 = \frac{y_1}{2x} + \frac{y_2}{2x} = \frac{y_1 + y_2}{2x} = \frac{p_x}{p_y} = \frac{100}{0.20}. \tag{20.48}$$

Por tanto,

$$y_1 + y_2 = 1000x, \tag{20.49}$$

que podemos sustituir en la restricción presupuestaria combinada

$$0.20(y_1 + y_2) + 100x = 600 \tag{20.50}$$

para obtener

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y_1 + y_2 &= 2000. \end{aligned} \tag{20.51}$$

Asignación del costo de los cuadros. Si suponemos que los compañeros de habitación se dividen el costo de los dos cuadros y emplean el resto de sus fondos para comprar barras de cereal, al final de cuentas cada uno recibirá una utilidad de

$$U_i = 2^{1/3}1000^{2/3} = 126. \qquad (20.52)$$

Si bien la persona 1 podría no ser capaz de coaccionar a la persona 2 para que comparta así el costo, un reparto del gasto del 75-25 obtendrán una utilidad de

$$\begin{aligned} U_1 &= 2^{1/3}750^{2/3} = 104 \\ U_2 &= 2^{1/3}1{,}250^{2/3} = 146, \end{aligned} \qquad (20.53)$$

que es superior, en el sentido de Pareto, a la solución obtenida cuando la persona 1 actúa sola por su cuenta. Muchos otros planes financieros también producirían asignaciones superiores, en el sentido de Pareto, a las antes expuestas. Cuál de ellas sea la elegida, en su caso, dependerá de lo bien que cada uno de los compañeros se desempeñe en el juego estratégico del financiamiento.

Pregunta: Demuestre que, en este ejemplo, se obtendría una solución eficiente si dos personas que viven separadas decidieran vivir juntas y reunir sus cuadros. ¿Esperaría usted que este resultado sea válido en términos generales?

Precios de Lindahl para los bienes públicos

El economista sueco E. Lindahl[10] fue el primero en sugerir, en la década de los veinte, una solución conceptual importante para el problema de los bienes públicos. La idea básica de Lindahl era que los individuos podrían aceptar de manera voluntaria que se les aplicaran impuestos para obtener bienes públicos beneficiosos si supieran que otros también pagan esos impuestos. En concreto, Lindahl supuso que el gobierno presentaría a cada individuo la proporción del costo de un bien público que se esperaría que él pagara y, a continuación, respondería (honestamente) con el nivel de producción del bien público que el individuo prefiriera. En la notación de nuestro sencillo modelo de equilibrio general, el gobierno fijaría, por decir, un porcentaje concreto (α^A) para el individuo A y, a continuación, le preguntaría el nivel de producción de bienes públicos que querría, sabiendo que tendría que pagar esta parte del costo total. Para responder con sinceridad a esta pregunta, esta persona elegiría el nivel total de producción de bienes públicos, x, que maximiza

$$\text{utilidad} = U^A[x, y^{A*} - \alpha^A f^{-1}(x)]. \qquad (20.54)$$

La condición de primer orden para esta elección de x que maximiza la utilidad está determinada por

$$U_1^A - \alpha^A U_2^B(1/f') = 0 \quad \text{o} \quad TMS^A = \alpha^A/f'. \qquad (20.55)$$

El individuo B, ante una elección análoga, optaría por el nivel de bienes públicos que cumpla con

$$TMS^B = \alpha^B/f'. \qquad (20.56)$$

Así, el equilibrio se produciría donde $\alpha^A + \alpha^B = 1$; es decir, el nivel de gasto en bienes públicos que desean los dos individuos genera exactamente la recaudación fiscal necesaria para pagar el bien público. Dado que, en este caso,

$$TMS^A + TMS^B = (\alpha^A + \alpha^B)/f' = 1/f' \qquad (20.57)$$

este equilibrio sería eficiente (véase la ecuación 20.40). Por lo tanto, cuando menos desde el punto de vista conceptual, el planteamiento de Lindahl resuelve el problema de los bienes públicos. Presentar a cada individuo el "precio" de equilibrio de la fracción del impuesto le llevaría a optar por el nivel eficiente de producción de los bienes públicos.

[10]Encontrará extractos de los artículos de Lindahl en, R. A. Musgrave y A. T. Peacock, eds. *Classics in the Theory of Public Finance*, MacMillan, Londres, 1958.

EJEMPLO 20.4

Una solución de Lindahl al problema de los compañeros de habitación

Los precios de Lindahl ofrecen una solución conceptual al problema de los compañeros que adquieren cuadros que vimos en el ejemplo 20.3. Si "el gobierno" o, tal vez, las convenciones sociales, sugieren que cada uno de ellos pagará la mitad del precio de los cuadros, cada uno afrontaría un precio efectivo de los cuadros de $50. Dado que las funciones de utilidad de los compañeros de habitación implican que cada individuo gastará en cuadros una tercera parte de su ingreso total de $300, cada uno estará dispuesto a gastar $100 en cuadros y, si son sinceros, cada uno afirmará que le gustaría tener dos cuadros. Por lo tanto, la solución sería $x = 2$, y $y_1 = y_2 = 1000$. De hecho, ésta es la solución eficiente que calculamos en el ejemplo 20.3. Por supuesto que el problema de esta solución es que ninguno de los dos compañeros tiene incentivos para decir la verdad sobre su demanda de bienes públicos, dado el precio de Lindahl. Por el contrario, cada uno sabrá que estaría en mejor situación si siguiera uno de los escenarios del parásito que planteamos en el ejemplo 20.3. Al igual que en el caso del dilema del prisionero que vimos en el capítulo 15, la solución de Lindahl, si bien es óptima en el sentido de Pareto, no constituye un equilibrio estable.

Problema: Si bien el reparto al 50% de este ejemplo tal vez se deba a la costumbre social, lo óptimo de este reparto es, de hecho, una característica especial de este problema. ¿Qué aspecto de este problema lleva a este resultado de Lindahl? ¿Los precios de Lindahl en qué condiciones darían un resultado que no fuera repartir el gasto al 50 por ciento?

Deficiencias de la solución de Lindahl

Por desgracia, la solución de Lindahl sólo es una solución conceptual. En nuestro análisis del equilibrio de Nash para la producción de bienes públicos y en nuestro ejemplo de los compañeros de habitación hemos visto que, en el caso de los bienes públicos, el incentivo para ser un parásito es muy grande. Este hecho dificulta la posibilidad de establecer cómo podríamos evaluar la información necesaria para calcular las fracciones repartidas en el equilibrio de Lindahl. Dado que los individuos saben que las fracciones de los impuestos que les corresponden estarán fundadas en las demandas de bienes públicos que hayan expresado, tienen un claro incentivo para subestimar sus verdaderas preferencias, porque al hacerlo así esperan que "el otro" sea quien pague. Por tanto, no podemos esperar que el solo hecho de preguntar a las personas cuáles serían sus demandas de bienes públicos nos revele sus verdaderas demandas. También parece muy difícil que podamos crear mecanismos de votación que revelen las preferencias reales, por motivos que se analizarán en el próximo capítulo. Por lo tanto, en general, la solución de Lindahl sigue siendo un objetivo muy atractivo, pero muy difícil de alcanzar.

Bienes públicos locales

Algunos economistas creen que revelar la demanda de bienes públicos podría ser un asunto más tratable en un ámbito local.[11] Dado que los individuos pueden vivir en muchas comunidades, podrían indicar sus preferencias por los bienes públicos, es decir, su disposición a pagar la contribución fiscal de Lindahl, eligiendo en cuál de ellas vivirán. Si una carga fiscal dada no maximiza la utilidad, en principio las personas pueden "votar con los pies" y trasladarse a una comunidad que sí les ofrece la utilidad óptima. Por tanto, con información perfecta, sin costo alguno de desplazamiento y con una cantidad suficiente de comunidades, podríamos aplicar la solución de Lindahl en el ámbito local. Podríamos aplicar argumentos análogos a otros tipos de organiza-

[11]La referencia clásica es C. M. Tiebout. "A Pure Theory of Local Expenditures", *Journal of Political Economy*, octubre de 1956, pp. 416-420.

ciones, como los clubes privados, que ofrecen bienes públicos a sus miembros, y con un espectro lo bastante amplio de oferta de clubes podría resultar un equilibrio eficiente. Sobra decir que los supuestos que fundamentan la presunta eficiencia de estas elecciones por parte de los individuos son bastante estrictos. Relajar estos supuestos incluso ligeramente puede producir resultados de ineficiencia debido a que la forma de revelar la demanda de los bienes públicos es muy frágil.

RESUMEN

En este capítulo se analizaron las fallas del mercado que se derivan de los efectos de una externalidad que surgen de él o que se derraman del consumo o la producción de ciertos tipos de bienes. En algunos casos, tal vez se podrían diseñar mecanismos para lidiar con estas externalidades en el contexto del mercado, pero estas soluciones implican importantes limitaciones. Algunas de las cuestiones específicas analizadas son:

- Las externalidades pueden provocar una mala asignación de los recursos debido a la diferencia entre el costo marginal social y el privado. Las soluciones tradicionales a esta diferencia incluyen las fusiones de las partes afectadas y la adopción de impuestos o subsidios (piguvianos) adecuados.
- Si los costos de transacción son pequeños, la negociación privada entre las partes afectadas por una externalidad podría igualar los costos privados y los sociales. La demostración de que, en estas circunstancias, los recursos serán asignados eficientemente a veces se conoce como el *teorema de Coase*.
- Los bienes públicos no ofrecen beneficios excluyentes a los individuos; es decir, es imposible impedir que alguien los consuma. Por lo regular, estos bienes tampoco son rivales, porque servir a un usuario más tiene un costo marginal nulo.
- Los mercados privados tienden a no asignar recursos suficientes a los bienes públicos, porque no es posible que un comprador único se apropie de todos los beneficios que ofrecen estos bienes.
- Un plan para repartir los impuestos de forma óptima en el sentido de Lindahl, puede dar por resultado una asignación eficiente de los recursos para la producción de bienes públicos. Sin embargo, para calcular este reparto de los impuestos se necesita contar con mucha información que los individuos tienen incentivos para ocultar.

PROBLEMAS

20.1

En una industria en competencia perfecta, una empresa ha patentado un nuevo proceso para fabricar artículos. El nuevo proceso reduce la curva del costo promedio de la empresa, lo cual significa que esta empresa, aun siendo tomadora de precio, será la única que podrá obtener verdadera utilidad económica a largo plazo.

a. Si el precio de mercado es de \$20 por artículo y si la curva del costo marginal de la empresa está dado por $CM = 0.4q$, donde q es la cantidad diaria de artículos que produce la empresa, ¿cuántos artículos producirá?

b. Supongamos que el gobierno hace un estudio que descubre que el nuevo proceso de la empresa está contaminando el aire y estima que el costo marginal social de los artículos que produce esta empresa es $CSMg = 0.5q$. Si el precio de mercado sigue siendo \$20, ¿cuál es el nivel de producción socialmente óptimo de esta empresa? ¿Cuál debe ser la tarifa del impuesto que aplique el gobierno para llegar a este nivel de producción óptimo?

c. Dibuje una gráfica de sus resultados.

20.2

En la isla de Pago Pago hay dos lagos y 20 pescadores. Éstos pueden pescar en alguno de los dos lagos y mantener un volumen promedio de pesca dentro del lago que haya elegido. En el lago *x* el volumen total de pescados está determinado por

$$F^x = 10l_x - \frac{1}{2}l_x^2,$$

donde t_x es la cantidad de personas que pescan en el lago. En el caso del lago *y* la relación es

$$F^y = 5l_y.$$

a. Con esta organización de la sociedad, ¿cuál será la cantidad total de pescados?

b. El jefe de Pago Pago, que una vez leyó un libro de texto de economía, considera que es posible aumentar la cantidad total de pescados si restringe la cantidad de personas que pueden pescar en el lago *x*. ¿Qué cantidad de pescadores deben tener permiso para pescar en el lago *x* a efecto de maximizar el total de pescados? En esta situación, ¿cuántos pescados se obtienen?

c. Al jefe no le gusta nada la coacción y decide exigir un permiso para pescar en el lago *x*. Para que el procedimiento de los permisos produzca la asignación óptima del trabajo, ¿cuánto debe costar un permiso (en términos de peces)?

d. Explique por qué este ejemplo aporta luz sobre la relación entre los derechos de propiedad y las externalidades.

20.3

Supongamos que la industria petrolífera de Utopía está en competencia perfecta y que todas las empresas extraen petróleo de un único yacimiento, prácticamente inagotable. Supongamos que cada competidor considera que puede vender todo el petróleo que extrae a un precio mundial estable de \$10 por barril y que el costo anual de explotación del yacimiento es de \$1000.

La producción total anual (*Q*) del campo petrolífero está en función de la cantidad de pozos (*n*) que operen en el yacimiento. En concreto,

$$Q = 500n - n^2,$$

y la cantidad de petróleo extraída de cada pozo (*q*) está dada por

$$q = \frac{Q}{n} = 500 - n.$$

a. Describa la producción de equilibrio y la cantidad de pozos de equilibrio en este caso de competencia perfecta. En esta industria, ¿existe alguna diferencia entre el costo marginal social y el privado?

b. Ahora, supongamos que el gobierno nacionaliza el yacimiento de petróleo. ¿Cuántos pozos debería operar? ¿Cuál será la producción total? ¿Cuál será la producción de cada pozo?

c. Como alternativa para la nacionalización, el gobierno de Utopía, con objeto de evitar una perforación excesiva, está pensando en imponer una tarifa anual por permiso para explotar un pozo. ¿Cuánto debería costar el permiso para llevar a la industria a perforar el número óptimo de pozos?

20.4

La seguridad de los productos es tema de muchas controversias jurídicas. Cabe decir que, en los dos extremos, las posiciones son la de *caveat emptor* (responsabilidad de los consumidores) y la de *caveat vendor* (responsabilidad de los vendedores). Con la primera, los productores no tendrían responsabilidad alguna en tanto de la seguridad de los productos, y los compradores absorberían todas las pérdidas. Con la segunda, la responsabilidad estaría depositada a la inversa y, por ley, las empresas tendrían que asumir toda la responsabilidad de las pérdidas provocadas por los productos inseguros. Empleando un sencillo análisis de oferta y demanda, explique cómo esta adjudicación de la responsabilidad podría afectar la asignación de recursos. Si la ley adjudicara la responsabilidad estrictamente a las empresas, ¿éstas fabricarán productos más seguros? ¿Las posibles asimetrías de la información cómo afectan sus resultados?

20.5

Tres tipos de contratos sirven para especificar la forma en que los jornaleros de un terreno agrícola pueden pagar el alquiler de éste al terrateniente. Pueden pagar el alquiler 1) con dinero, o una cantidad fija de los productos agrícolas, 2) con una parte proporcional fija de la cosecha o 3) con "jornadas a cuenta", aceptando trabajar en otros terrenos propiedad del terrateniente. ¿Estas especificaciones de los tres contratos alternativos cómo afectarán las decisiones de producción de los jornaleros? ¿Qué tipo de costos de transacción se podrían presentar al aplicar cada tipo de contrato? ¿Qué factores económicos podrían afectar al tipo de contrato especificado en distintas ubicaciones o en distintos periodos históricos?

20.6

Supongamos que un monopolio genera una externalidad perniciosa. Elabore un diagrama empleando el concepto del excedente del consumidor para analizar si un impuesto óptimo sobre el fabricante contaminador constituirá, necesariamente, una mejora del bienestar.

20.7

Supongamos que sólo hay dos individuos en la sociedad. La curva de demanda del control de mosquitos correspondiente a la persona *A* está dada por

$$q_a = 100 - p.$$

En el caso de la persona *B*, la curva de demanda del control de mosquitos está dada por

$$q_b = 200 - p.$$

a. Supongamos que el control de los mosquitos es un bien público puro; es decir, una vez producido, todo el mundo se beneficia de él. ¿Cuál sería el nivel óptimo de esta actividad si se pudiera producir a un costo marginal constante de $120 por unidad?

b. Si el control de los mosquitos se deja en manos del mercado privado, ¿cuánto se producirá? ¿Su respuesta depende de lo que una persona supone que hará la otra?

c. Si el gobierno produjera la cantidad óptima de control de mosquitos, ¿cuánto costaría? ¿Cómo debería repartir el monto total de los impuestos sobre esta cantidad de modo que los individuos la compartan en proporción con los beneficios que reciben del control de mosquitos?

20.8

Supongamos que hay *n* individuos en una economía que tiene tres bienes. Dos de ellos son bienes públicos puros, no excluyentes, mientras que el tercero es un bien privado normal.

a. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que los recursos sean asignados con eficiencia entre uno de los bienes públicos y el bien privado?

b. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que los recursos sean asignados con eficiencia entre los dos bienes públicos?

20.9

Supongamos que la frontera de posibilidades de producción de una economía que produce un bien público (y) y un bien privado (x) está dada por

$$x^2 + 100y^2 = 5000.$$

Esta economía se compone de 100 individuos idénticos, y cada uno tiene una función de utilidad de la forma

$$\textbf{utilidad} = \sqrt{x_i y},$$

donde x_i es la parte que corresponde a cada individuo de la producción del bien privado ($= x/100$). Nótese que el bien público no es excluyente y que todo el mundo obtiene un beneficio igual de su nivel de producción.

a. Si el mercado de x y de y estuviera en competencia perfecta, ¿qué niveles de estos bienes se producirían? ¿Cuál sería la utilidad del individuo típico en esta situación?

b. ¿Cuáles son los niveles de producción óptimos de x y de y? ¿Cuál sería el nivel de utilidad del individuo típico? ¿Qué impuesto se debe imponer al consumo del bien x para lograr este resultado? (*Pista:* las cifras de este problema no son redondas, pero bastará con cierto ajuste.)

20.10

El análisis de los bienes públicos que hemos visto en el capítulo 20 sólo ha empleado un modelo con dos individuos. Podemos generalizar los resultados con facilidad al caso de n personas, lo que hacemos en este problema.

a. Habiendo n personas en una economía, ¿cuál es la condición para una producción eficiente de un bien público? Explique cómo las características del bien público se ven reflejadas en estas condiciones?

b. ¿Cuál es el equilibrio de Nash cuando se suministra este bien público a n personas? Explique por qué este equilibrio es ineficiente. Explique también por qué un suministro escaso de este bien público es más grave que en el caso de dos personas que hemos analizado en el capítulo.

c. ¿Cómo podemos generalizar la solución de Lindahl al caso de n personas? ¿La existencia de un equilibrio de Lindahl está asegurada en este modelo más complejo?

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Alchian, A. y H. Demsetz. "Production, Information Costs, and Economic Organization", *American Economic Review 62*, diciembre de 1972, pp. 777-795.
Emplea argumentos de las externalidades para desarrollar una teoría de las organizaciones económicas.

Barzel, Y. *Economic Analysis of Property Rights*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
Presenta un análisis gráfico de varias cuestiones económicas que son explicadas empleando el paradigma de los derechos de propiedad.

Cheung, S. N. S. "The Fable of the Bees: An Economic Investigation", *Journal of Law and Economics 16*, abril de 1973, pp. 11-33.
Estudio empírico de la forma en que los mercados del estado de Washington manejan la famosa externalidad de las abejas y los árboles.

Coase, R. H. "The Market for Goods and the Market for Ideas", *American Economic Review 64*, mayo de 1974, pp. 384-391.
Artículo que especula sobre las nociones de las externalidades y la regulación en los "mercados de ideas".

———. "The Problem of Social Cost", *Journal of Law and Economics 3*, octubre de 1960, pp. 1-44.
Artículo clásico sobre las externalidades. Contiene muchos casos histórico-jurídicos fascinantes.

Cornes, R. y T. Sandler. *The Theory of Externalities, Public Goods, and Club Goods*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
Magnífico análisis teórico de muchos de los asuntos tratados en este capítulo. Buena explicación de las relaciones entre los rendimientos de escala, la exclusión y los bienes de club.

Cropper, M. L. y W. E. Oates. “Environmental Economics: A Survey”, *Journal of Economic Literature*, junio de 1992, pp. 675-740.

Artículo de reseña muy completo, con secciones especialmente útiles sobre las aplicaciones de la teoría hedonista de los precios.

Demsetz, H. “Toward a Theory of Property Rights”, *American Economic Review, Papers and Proceedings 57*, mayo de 1967, pp. 347-359.

Breve planteamiento de una teoría plausible de la forma en que las sociedades llegan a definir los derechos de propiedad.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Nueva York, 1995.

El capítulo 11 cubre, en gran parte, el mismo terreno que este capítulo, pero de manera un tanto más abstracta.

Posner, R. A. *Economic Analysis of Law*, 5a. ed., Boston: Little Brown, 1998.

En muchos sentidos, la “biblia” del movimiento de la economía y el derecho mercantil. Los argumentos de Posner no siempre son correctos en términos económicos, pero no dejan de ser muy interesantes y provocadores.

Samuelson, P. A. “The Pure Theory of Public Expenditures”, *Review of Economics and Statistics 36*, noviembre de 1954, pp. 387-389.

Enunciado clásico de las condiciones de eficiencia para la producción de bienes públicos.

AMPLIACIONES

Abatir la contaminación

Nuestro análisis de las externalidades se ha centrado en cómo emplear los impuestos piguvianos para que los mercados de bienes funcionen con más eficiencia, pero podemos aplicar resultados análogos al estudio de la tecnología para abatir la contaminación. En estas ampliaciones se revisa brevemente este planteamiento alternativo. Suponemos que sólo hay dos empresas, A y B, y que sus niveles de producción (respectivamente q_A y q_B) son constantes a lo largo de toda la explicación. Un principio científico ineludible afirma que la producción de bienes materiales, a diferencia de los servicios, debe obedecer a la conservación de la materia. Por lo tanto, la producción de q_A y q_B sin duda tendrá por subproducto algunas emisiones, e_A y e_B. Podemos abatir las cantidades materiales de estas emisiones o, cuando menos, sus elementos nocivos, empleando factores de producción z_A y z_B que cuestan p por unidad. Los niveles de emisiones resultantes están determinados por

$$f^A(q_A, z_A) = e_A \quad \text{y} \quad f^B(q_A, z_B) = e_B, \tag{i}$$

donde, para la función de abatir la contaminación de cada empresa, $f_1 > 0$ y $f_2 < 0$.

A20.1 Abatimiento óptimo

Si la autoridad reguladora ha decidido que e^* representa el nivel máximo de emisiones que permitirá a las empresas, éstas podrán alcanzar dicho nivel al costo mínimo resolviendo la expresión lagrangiana

$$\mathscr{L} = pz_A + pz_B + \lambda(f^A + f^B - e^*). \tag{ii}$$

Las condiciones de primer orden para alcanzar un mínimo son

$$p + \lambda f_2^A = 0 \quad \text{y} \quad p + \lambda f_2^B = 0. \tag{iii}$$

Por tanto, se obtendrá

$$\lambda = -p/f_2^A = -p/f_2^B. \tag{iv}$$

Esta ecuación deja en claro el punto, bastante evidente, de que el abatimiento que minimiza los costos se logra cuando el costo marginal (universalmente llamado MAC en la bibliografía sobre medio ambiente) de éste es el mismo para cada empresa. Un parámetro uniforme que exigiera el mismo nivel de emisiones a cada empresa con seguridad no obtendría este resultado eficiente; sin embargo, se podría alcanzar un considerable ahorro de costos al igualar los costos marginales del abatimiento con respecto a esta regulación uniforme.

A20.2 Impuestos sobre emisiones

La solución óptima descrita en la ecuación iv se logra al aplicar un impuesto sobre las emisiones (t) igual a λ a cada empresa (se supone que este impuesto sería fijado en un nivel que refleje el daño marginal que provoca una unidad de emisiones contaminantes). Con este gravamen, cada empresa intenta minimizar $pz_i + tf^i(q_i, z_i)$, que, de hecho, produce la solución eficiente

$$t = -p/f_2^A = -p/f_2^B. \tag{v}$$

Nótese que, al igual que en nuestro análisis del capítulo 20, uno de los beneficios de la solución dada por el impuesto es que la autoridad reguladora no necesita conocer los detalles de las funciones de abatimiento de la contaminación de las empresas. Por el contrario, las propias empresas son las que emplearán su propia información privada para determinar sus estrategias para abatir la contaminación. Si estas funciones difieren de manera significativa de una empresa a otra, entonces cabe esperar que los niveles de abatimiento de la contaminación también difieran.

Impuestos sobre las emisiones en el Reino Unido

Hanley, Shogren y White (1997) revisan diversos planes de gravámenes sobre las emisiones que han sido aplicados en el Reino Unido. Demuestran que los costos marginales del abatimiento de la contaminación varían de manera significativa (a veces se multiplican hasta por 30) de una empresa a otra. Por lo tanto, por cuanto se refiere a una regulación uniforme, el ahorro de costos debido a los planes impositivos puede ser bastante grande. Por ejemplo, los autores revisan una serie de estudios de los estuarios del río Tees que informan haber registrado un ahorro de costos anual del orden de 10 millones de libras esterlinas (en dólares de 1976). Ellos también explican algunas de las complicaciones que surgen cuando se fijan impuestos eficientes sobre la contaminación si los flujos de emisiones no tienen una mezcla uniforme de elementos contaminantes o si los elementos contaminantes se van acumulando a lo largo del tiempo hasta alcanzar niveles peligrosos.

A20.3 Permisos negociables

Como se ha ilustrado en el capítulo 20, muchos de los resultados alcanzables mediante los impuestos piguvianos también se pueden alcanzar mediante un sistema de permisos negociables. En este caso, la autoridad reguladora igualaría la cantidad de permisos (o^*) a las emisiones e^* y, de alguna manera, asignaría estos permisos a las empresas ($o_A + o_B = o^*$). A continuación, cada empresa podrá comprar o vender la cantidad de permisos que desee, pero se debe asegurar que sus emisiones sean iguales a la cantidad de permisos que retiene. Si el precio de mercado de los permisos está dado por p_i, el problema de cada empresa volverá a ser minimizar

$$pz_i + p_o(e_i - o_i), \qquad \textbf{(vi)}$$

que presenta una solución idéntica a la que derivamos en las ecuaciones iv y v con $p_s = t = \lambda$. Por tanto, cabe esperar que la solución de los permisos negociables produzca la misma suerte de ahorro de costos que los planes impositivos.

Intercambio de bióxido de azufre

La ley estadounidense *Clean Air Act* de 1990 estableció el primer programa de permisos de contaminación negociables a gran escala. Estos permisos se centran en las emisiones de bióxido de azufre con el objeto de reducir la lluvia ácida provocada por la quema de carbón en centrales energéticas. Schmalensee *et al.* (1998) revisan las primeras experiencias registradas con el programa. Concluyen que, de hecho, se pueden establecer grandes mercados, que funcionen de manera correcta, para intercambiar los permisos de contaminación. En el año más reciente analizado, más de 5 millones de permisos de contaminación (de una tonelada) cambiaron de manos, a un precio promedio de $150 cada uno. Los autores también demuestran que las empresas emplearon una amplia variedad de estrategias para cumplir con la ley. Esto sugiere que la flexibilidad inherente al sistema de permisos llevó a un considerable ahorro de costos. Un aspecto interesante de esta revisión del intercambio de permisos de contaminación de ZO_2 son las especulaciones de los autores en torno a la razón que explica por qué los precios de los permisos sólo ascendieron, aproximadamente, a la mitad de lo que se esperaba. Atribuyen gran parte de la explicación a que las empresas generadoras cayeron, inicialmente, en una "inversión excesiva" en tecnología para reducir las emisiones debido a que se equivocaron al creer que, estando en marcha el sistema, los precios de los permisos serían del orden de entre $300 y $400. Con los altos costos fijos de las inversiones, el costo marginal de eliminar una tonelada de ZO_2 tal vez haya sido tan sólo de $65 por tonelada, ejerciendo así una significativa presión a la baja en los precios de los permisos.

A20.4 Innovación

Al parecer, los impuestos y los permisos negociables son matemáticamente equivalentes en los modelos que hemos descrito, pero la equivalencia podría desaparecer cuando se toma en cuenta la dinámica de las innovaciones tecnológicas para abatir la contaminación. Por supuesto que los dos procedimientos ofrecen incentivos para adoptar nuevas tecnologías; es decir, si un nuevo proceso logra reducir la contaminación en una cantidad determinada, a un MAC menor, éste será adoptado en los dos casos. Sin embargo, en un detallado análisis de la dinámica de los dos planteamientos, Milliman y Prince (1989) argumentan que el planteamiento de los impuestos es mejor. Su lógica dice que los impuestos fomentan una difusión más rápida de la nueva tecnología para abatir la contaminación, porque las utilidades crecientes que se obtendrán de su adopción son más altas que con los permisos. Esta rápida difusión también podría llevar a las autoridades ambientales a adoptar metas más estrictas para las emisiones, porque estas metas ahora podrán cumplir con mayor facilidad las pruebas de costo-beneficio.

Bibliografía

Hanley, N., J. F. Shogren y B. White. *Environmental Economics in Theory and Practice*, Oxford University Press, Nueva York, 1997.

Millman, S. R. y R. Prince. "Firm Incentive to Promote Technological Change in Pollution Control", *Journal of Environmental Economics and Management*, noviembre de 1989, pp. 247-265.

Schmalensee, R., P. L. Joskow, A. D. Ellerman, J. P. Montero y E. M. Bailey. "An Interim Evaluation of the Sulfur Dioxide Trading Program", *The Journal of Economic Perspectives*, verano de 1998, pp. 53-68.

Capítulo 21

ECONOMÍA POLÍTICA

Los procesos políticos con frecuencia son la base para tomar decisiones sobre la asignación de los recursos; por ejemplo, los interesados votan en el caso del financiamiento destinado a las escuelas de su localidad; los diputados y los senadores votan los presupuestos para los bienes públicos, como la defensa, y las transferencias de fondos públicos para bienestar o pagos por desempleo; y las autoridades gubernamentales reguladoras establecen normas para una gran variedad de bienes, como las transacciones en los mercados bursátiles o los niveles permitidos de contaminación del aire. Por tradición, los economistas han evitado todo análisis específico de estos procesos, argumentando que no entran en el campo del análisis económico normal. Sin embargo, en años recientes, los economistas con frecuencia han ido poniendo esta visión en duda, a medida que han empezado a crear modelos para analizar las decisiones políticas del mismo tipo que emplean para estudiar los mercados. En este capítulo se verá brevemente este campo de investigación que está creciendo a pasos agigantados. A efecto de montar el escenario para este material, primero se presenta una breve reseña de la economía "normal" del bienestar y se concluirá con la famosa conclusión negativa de Arrow respecto a la esperanza de encontrar funciones generales del bienestar social que resulten aceptables. A continuación, el capítulo adopta un tono decididamente más positivo al ilustrar diversos modelos de cómo funciona, de hecho, el proceso político.

Criterios del bienestar social

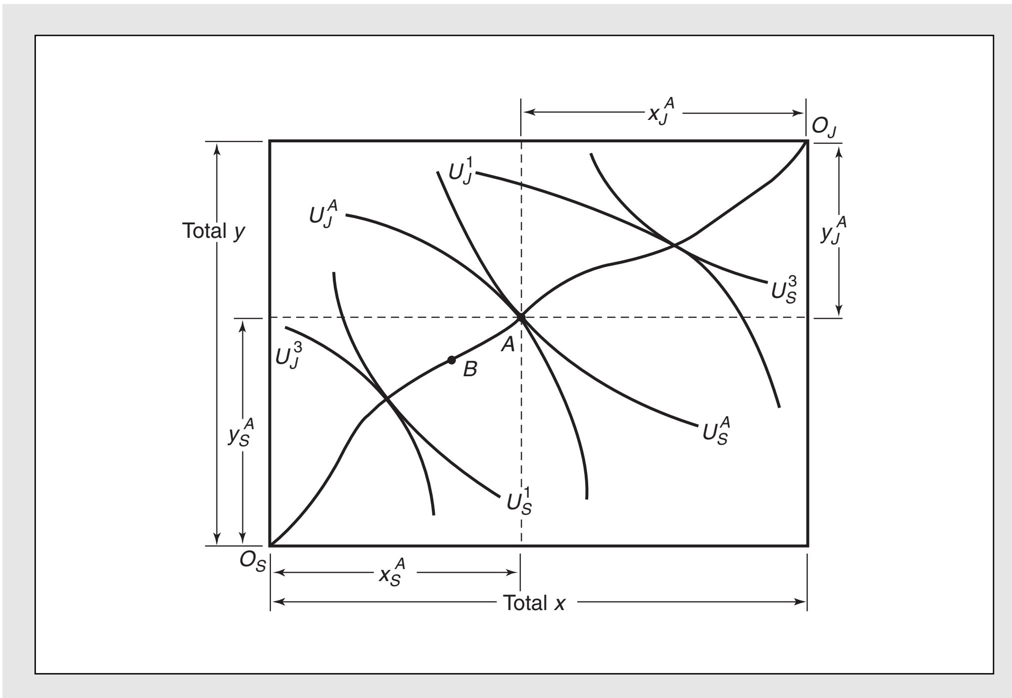
Iniciamos nuestro estudio del proceso político analizando algunos de los problemas asociados al diseño de criterios del bienestar que permitan elegir de entre varias asignaciones de los recursos que serían viables. Este tema es la rama más normativa de la microeconomía, porque necesariamente entraña tomar decisiones difíciles respecto a los niveles de utilidad de distintos individuos. Al elegir entre dos asignaciones, *A* y *B*, aparece el problema de que algunos individuos preferirán *A*, mientras que otros preferirán *B*. Para poder estimar cuál asignación es preferible debemos hacer comparaciones de las personas. Como es de suponer, no existe un criterio aceptado universalmente para hacer estas elecciones.

Criterios del bienestar social en un modelo de intercambio

El modelo de la eficiencia del intercambio que se desarrolló en el capítulo 12 será muy útil para demostrar los problemas que entraña establecer criterios del bienestar social. Consideremos el diagrama de la caja de Edgeworth de la figura 21.1. Sólo los puntos que se encuentran sobre la curva de contrato son considerados posibles candidatos para un óptimo social. Los puntos fuera de la curva del contrato son ineficientes en el sentido de Pareto porque los dos individuos pueden estar en mejor situación. Al mejorar éstos, el bienestar social, presuntamente, mejoraría. A lo largo de la curva de contrato, las utilidades de los dos individuos (Santiago y Juan) van variando y estas utilidades compiten directamente entre sí. La utilidad de Santiago sólo podrá

FIGURA 21.1 **Diagrama de la caja de Edgeworth para el intercambio**

La curva O_S, O_J es el punto donde se encuentran las asignaciones de *x* y *y* de Santiago y Juan. Las asignaciones en este punto están dominadas por los individuos que se encuentran en él, porque los dos podrán estar en mejor situación si se mueven a la curva de contrato.



aumentar si disminuye la utilidad de Juan. Dado este conjunto de asignaciones eficientes, ahora pasaremos a analizar los posibles criterios para elegir de entre ellas.

Si estamos dispuestos a suponer que es posible comparar la utilidad de distintos individuos, entonces podremos emplear las combinaciones posibles de las utilidades a lo largo de la curva de contrato de la figura 21.1 para construir[1] la frontera de posibilidades de utilidad que muestra la figura 21.2. La curva O_S, O_J registra los niveles de utilidad que Santiago y Juan pueden obtener a partir de las cantidades fijas de los bienes que están disponibles. Toda combinación de utilidad, como el punto *C*, que esté dentro de la curva O_S, O_J es ineficiente en el sentido de Pareto. Si se emplea esta frontera de posibilidades de utilidad, podremos replantear el "problema" de la economía del bienestar como uno que trata de desarrollar criterios para poder escoger un punto sobre esta frontera.

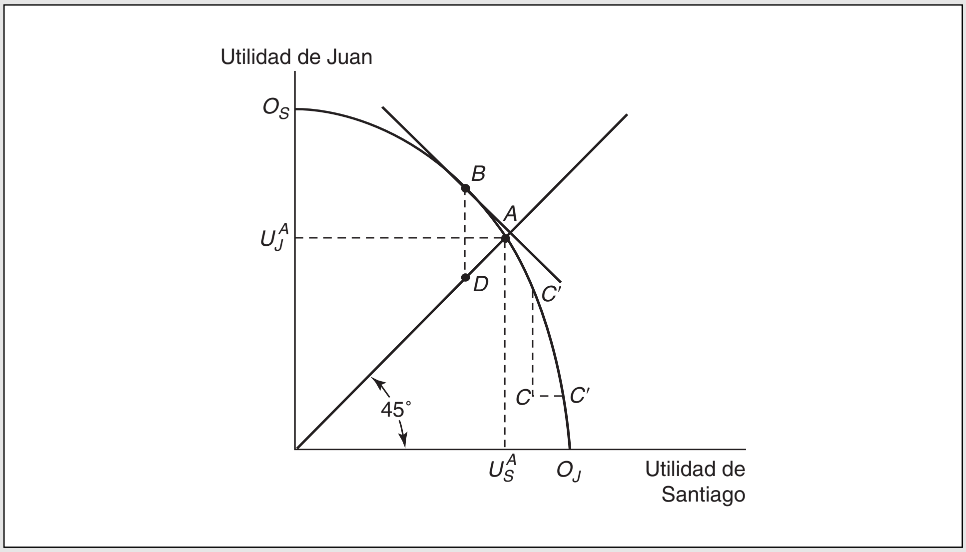
Criterios de igualdad

Es fácil mostrar algunos criterios sencillos para elegir un punto sobre O_S, O_J. Un principio posible exigiría la igualdad total: Santiago y Juan deberían disfrutar del mismo nivel de bienestar. Este criterio de bienestar exigiría que eligiéramos un punto *A* sobre la frontera de posibilidades de utilidad. Dado que el punto *A* corresponde a un único punto sobre la curva de contrato, esta elección ha determinado una asignación de bienes socialmente óptima. En la figura 21.1 vemos que esta asignación exige que Santiago obtenga x_S^A y y_S^A, mientras que Juan obtiene x_J^A y y_J^A. Nótese que los bienes *x* y *y* no necesariamente están distribuidos de forma igualitaria. Lo que exige este criterio es la igualdad de las utilidades y no la de los bienes.

[1]Esta construcción es idéntica a la que empleamos en el capítulo 12 para derivar la frontera de posibilidades de producción.

FIGURA 21.2 **Frontera de posibilidades de utilidad**

Si suponemos que es posible medir la utilidad, podremos derivar una frontera de posibilidades de utilidad a partir de la figura 21.1. Esta curva (O_S, O_J) muestra las combinaciones de utilidad que puede alcanzar la sociedad. Dos criterios para elegir de entre puntos sobre O_S, O_J podrían ser: elegir "utilidades" iguales para Santiago y Juan (punto *A*); o elegir utilidades de forma que su suma sea lo más grande posible (punto *B*). Según el criterio de Rawls, la asignación eficiente *B* sería considerada inferior a asignaciones equitativas entre *D* y *A*.



Criterio del utilitarismo

Un criterio similar, pero no necesariamente idéntico, consistiría en elegir el punto de la frontera de posibilidades de utilidad en el cual la suma de las utilidades de Santiago y de Juan sea lo más grande posible. Esto implicaría elegir el punto óptimo (*B*) para maximizar ($U_J + U_S$) sujeto a la restricción que implica la frontera de posibilidades de utilidad. Al igual que antes, el punto *B* implicaría una determinada asignación *x* y de *y* entre Santiago y Juan, y podríamos derivar esta asignación a partir de la figura 21.1. Más adelante, en este mismo capítulo, se empleará este criterio, porque es frecuente encontrarlo en el análisis político.

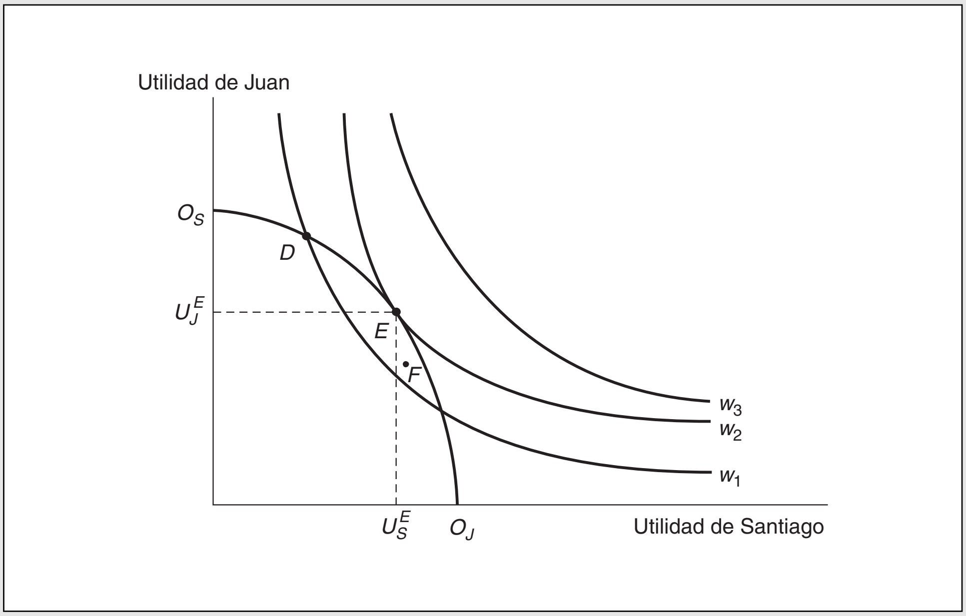
El criterio de Rawls

El filósofo John Rawls[2] fue el primero en plantear el último criterio que se analizará. Rawls empieza por considerar que una sociedad se encuentra en una "posición inicial" y que, en ella, nadie sabe cuál será su posición final, ni su utilidad final. A continuación, se pregunta cuál tipo de criterio de bienestar adoptarían las personas que se encuentran en esa posición. Planteado de esta manera, el problema de seleccionar un criterio de bienestar es uno de comportamiento en una situación de incertidumbre, porque nadie sabe con exactitud cómo el criterio elegido afectará su bienestar personal. Partiendo de su premisa inicial, Rawls concluye que los individuos serían muy adversos al riesgo cuando eligen un criterio. En concreto, afirma que los miembros de la sociedad optarían por alejarse de la igualdad perfecta sólo bajo la condición de que la persona que está en la peor situación con una distribución desigual quedara en mejor situación que en igualdad. En términos de la figura 21.2, las distribuciones desiguales como *B* sólo se permitirían cuando las distribuciones igualitarias alcanzables, que se encuentran sobre la línea de 45°, quedaran por debajo del punto *D*. Según Rawls, las distribuciones igualitarias que se ubican

[2]J. Rawls. *A Theory of Justice*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1971.

FIGURA 21.3 **Una función de bienestar social utilizada para determinar el óptimo social**

Si se postula la existencia de una función de bienestar social que tiene curvas de indiferencia w_1, w_2 y w_3, podremos concebir el problema de la elección social. Es evidente que la eficiencia (estar sobre O_S, O_J) es necesaria para un bienestar óptimo, pero no es suficiente, como podemos ver al comparar los puntos *D* y *F*.



entre *D* y *A* son superiores a *B* porque el individuo en peor situación (Santiago) está mejor en ese punto que con la asignación *B*. Por tanto, el criterio de Rawls sugiere que muchas asignaciones eficientes podrían no ser deseables socialmente y que las sociedades podrían elegir la igualdad incluso a un costo de eficiencia considerable. Esta conclusión no es compartida de forma generalizada por los economistas, muchos de los cuales argumentan que los criterios propuestos son innecesariamente adversos al riesgo. Es posible que los individuos en la posición inicial prefieran, en cambio, jugársela a que serán ganadores con la distribución final desigual, y estos motivos podrían dominar si existen pocas probabilidades de ser el individuo en peor situación. No obstante, el concepto de Rawls de emplear la metodología de la "posición inicial" para concebir la forma en que los individuos podrían tomar sus decisiones sociales es muy interesante y ha sido aplicado con amplitud en otras investigaciones.

Funciones del bienestar social

Podemos llegar a un planteamiento más general del bienestar social (que, como casos especiales, incluye los tres criterios que hemos explicado antes) si se analiza el concepto de función de bienestar social:[3] esta función podría depender únicamente de los niveles de utilidad de Santiago y de Juan:

$$\textbf{bienestar social} = W(U_S,\ U_J). \qquad \textbf{(21.1)}$$

Por lo tanto, el problema de elección social consiste en asignar x y y entre Santiago y Juan de forma que se maximice W. La figura 21.3 presenta este procedimiento. Las curvas denominadas w_1, w_2 y w_3 representan curvas de indiferencia social, en el sentido que a la sociedad le es indi-

[3]A. Bergson fue el primero en desarrollar este concepto en "A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics", *Quarterly Journal of Economics 52*, febrero de 1938, pp. 310-334.

ferente la combinación de utilidad que sea elegida sobre una curva determinada.[4] El punto E es el óptimo de bienestar social según el criterio de Bergson. Éste es el nivel más alto de w que se puede alcanzar, dada la frontera de posibilidades de utilidad. Al igual que antes, es necesario ir del punto E al diagrama de la caja de Edgeworth para determinar cuál es la asignación de bienes socialmente óptima.

Conflictos entre eficiencia y equidad

La figura 21.3 muestra una forma conceptual de elegir una distribución de utilidades que maximiza el bienestar social. De nueva cuenta, la figura ilustra una importante diferencia que se debe señalar entre el objetivo de la igualdad y el de la eficiencia. Todos los puntos sobre O_S, O_J son eficientes según el sentido de Pareto. Sin embargo, algunos de estos puntos eficientes representan algunas distribuciones que son mucho más deseables socialmente que otras. Como en el caso del criterio de Rawls, de hecho hay muchos puntos ineficientes, como el punto F, que son preferidos socialmente a los puntos eficientes, como el punto D. A veces, la elección de asignaciones de recursos en apariencia ineficientes puede beneficiar a la sociedad si la asignación en realidad óptima, el punto E, no es alcanzable.

EJEMPLO 21.1

Reparto equitativo

Un padre llega a su casa con una pizza de ocho porciones. ¿Cómo debe repartirla entre sus dos hambrientos adolescentes? Supongamos que el adolescente 1 tiene una función de utilidad de la pizza de la forma

$$U_1 = 2\sqrt{x_1}, \tag{21.2}$$

y que el adolescente 2, el mayor, tiene una función de utilidad de forma

$$U_2 = \sqrt{x_2}. \tag{21.3}$$

La opción que generaría menor resistencia sería repartir la pizza en partes iguales: cuatro porciones para cada uno. En este caso $U_1 = 4$, $U_2 = 2$. Por otra parte, un padre benevolente se daría cuenta de que el adolescente 2 necesita más cantidad y optaría por una asignación que ofreciera la misma utilidad. En este caso $x_1 = 1.6$, $x_2 = 6.4$, $U_1 = U_2 = 2.53$. Una tercera alternativa sencilla es la del padre utilitarista que pretende maximizar la suma de las utilidades de los adolescentes eligiendo $x_1 = 6.4$, $x_2 = 1.6$, $U_1 = 5.06$, $U_2 = 1.26$ y $U_1 + U_2 = 6.32$.

Un padre probabilístico. Un padre que esté familiarizado con la teoría de probabilidades podría pasar el problema completo a los adolescentes para que ellos decidieran. Sin embargo, dado que los deseos de los adolescentes compiten directamente entre sí, es poco probable que lleguen a una decisión unánime con información completa. No obstante, si el padre ofrece las tres posibles asignaciones antes mencionadas y dice que tirará una moneda al aire para decidir quién se queda con qué parte en el caso de cada una de ellas, la maximización de la utilidad esperada produciría unanimidad. La utilidad esperada de tirar una moneda al aire que otorga al adolescente 1 ya sea 1.6 porciones o 6.4 porciones es

$$E(U_1) = 0.5(2.53) + 0.5(5.06) = 3.80. \tag{21.4}$$

Por otra parte, para el adolescente 2 es,

$$E(U_2) = 0.5(2.53) + 0.5(1.26) = 1.90.$$

Por tanto, en este caso, cada adolescente optaría por la primera asignación igualitaria, porque cada uno obtiene una mayor utilidad esperada con esta opción que con tirar una moneda al aire.

[4]La función del bienestar social sujeta al criterio de "igualdad" tendría curvas de indiferencia con forma de L, mientras que la función de bienestar social sujeta al utilitarismo, que buscara maximizar la suma de las utilidades, tendría curvas de indiferencia en forma de líneas rectas paralelas con una pendiente de –1.

Un padre rawlsiano. Si el padre pudiera cubrir a cada uno de sus hijos con un "manto de ignorancia", de forma que ninguno de ellos supiera quién es hasta que se sirviera la pizza, la votación sería distinta. Si cada adolescente se centra en el peor escenario posible, cada uno optará por la asignación que otorga la misma utilidad porque ella garantiza que la utilidad no será inferior a 2.53. Pero esto supondría demasiada aversión al riesgo. Si cada adolescente cree que tiene una posibilidad del 50% de ser considerado el adolescente "1" o el "2", las utilidades esperadas serán

$$\begin{aligned} &\text{i) } x_1 = x_2 = 4 && E(U) = 0.5(4) + 0.5(2) = 3 \\ &\text{ii) } x_1 = 1.6,\ x_2 = 6.4 && E(U) = 0.5(2.53) + 0.5(2.53) = 2.53 \\ &\text{iii) } x_1 = 6.4,\ x_2 = 1.6 && E(U) = 0.5(5.06) + 0.5(1.26) = 3.16. \end{aligned} \tag{21.5}$$

Si los adolescentes votan exclusivamente en función de la utilidad esperada, ahora cada uno optará por la solución utilitarista, es decir, la iii).

Pregunta: ¿El nivel de aversión al riego de los adolescentes, podría cambiar su votación en la situación rawlsiana o ésta ya ha sido tomada en cuenta en el cálculo?

Teorema de la imposibilidad de Arrow

Por consiguiente, la función de bienestar social de Bergson proporciona un instrumento útil para demostrar aspectos particulares del problema de la elección social. Sin embargo, se debe admitir que este instrumento sólo es conceptual y, por tanto, que brinda poca ayuda para desarrollar una política pública práctica. Hasta ahora hemos planteado la cuestión de cómo se establece esta función o cuáles podrían ser las propiedades de la misma. Aquí se analizará el planteamiento adoptado por K. J. Arrow y otros ante estas cuestiones.[5]

El problema básico

Arrow considera que el problema general del bienestar social consiste en elegir de entre los varios "estados de la sociedad" que serían factibles. Supone que cada individuo de la sociedad puede clasificar estos estados en función de qué tan deseables sean. Por tanto, la pregunta que plantea Arrow es la siguiente: "¿Existe una clasificación de estos estados a escala social, que registrase de manera correcta estas preferencias de los individuos?". De manera simbólica, supongamos que hay tres estados de la sociedad (A, B y C) y dos individuos (Santiago y Juan). Supongamos que Santiago prefiere A y no B (lo que se denotará como $A\ P_S\ B$, donde P_S representa la frase "Santiago prefiere A a B" y B a C. Así, podemos expresar estas preferencias como $A\ P_S\ B$ y $B\ P_S\ C$. Si Santiago es "racional", entonces se dará el caso que $A\ P_S\ C$: las preferencias deberían ser transitivas. Supongamos también que, entre los tres estados, Juan prefiere $C\ P_J\ A$, $A\ P_J\ B$ y $C\ P_J\ B$. El teorema de la imposibilidad de Arrow consiste en demostrar que no puede existir una clasificación social razonable de estos tres estados, clasificación que llamaremos P.

Los axiomas de Arrow

La clave de este teorema consiste en definir qué quiere decir una "clasificación social razonable". Arrow supone que toda clasificación social (P) debe obedecer los siguientes seis axiomas, en apariencia irrefutables (aquí P se entenderá como "socialmente preferible a"):

1. Debe clasificar todos los estados sociales: $A\ P\ B$, $B\ P\ A$ o A y B son igualmente deseables ($A\ I\ B$) para dos estados A y B cualesquier.

2. La clasificación debe ser transitiva: Si $A\ P\ B$ y $B\ P\ C$ (o $B\ I\ C$), entonces $A\ P\ C$.

[5]Véase K. J. Arrow. *Social Choice and Individual Values,* 2a. ed., Yale University Press, New Haven, CT, 1963.

3. La clasificación debe guardar una relación positiva con las preferencias de los individuos: si tanto Santiago como Juan prefieren en forma unánime A a B, entonces $A\ P\ B$.
4. Si nuevos estados sociales se tornan factibles, este hecho no debería afectar la clasificación social de los estados originales: si, entre A y B, $A\ P\ B$, entonces esto seguirá siendo válido si un nuevo estado (D) se torna factible.[6]
5. La relación de preferencias sociales no puede ser impuesta, por ejemplo, por la costumbre. No se debe dar el caso de que $A\ P\ B$ independientemente de los gustos de los individuos de la sociedad.
6. La relación no debe ser dictatorial. Las preferencias de una persona no deben determinar las preferencias de la sociedad.

La demostración de Arrow

Arrow fue capaz de demostrar que estas seis condiciones, que parecen razonablemente éticas a primera vista, no son compatibles entre sí; es decir, no existe una relación social general alguna que cumpla las seis condiciones. Si se emplean las preferencias de Santiago y Juan por A, B y C, podremos ver el tipo de incongruencias que surgen en la elección social. Dado que $B\ P_S\ C$ y $C\ P_J\ B$, entonces la sociedad será indiferente entre B y C ($B\ I\ C$). De lo contrario, las preferencias de la sociedad serían acordes con las de un solo individuo, y contrarias a las del otro, y ello infringiría el axioma 6 que requiere la ausencia de dictadura.

Puesto que tanto Santiago como Juan prefieren A que B, las condiciones 3 y 5 exigen que $A\ P\ B$. Por lo tanto, por transitividad, tendremos el axioma 2, $A\ P\ C$. Pero, de nueva cuenta, esto viola el supuesto de ausencia de una dictadura, porque $A\ P_S\ C$ pero $C\ P_J\ A$. Por lo tanto, en este sencillo caso, surge una incongruencia en el intento por construir una relación de las preferencias sociales. Admitimos que este ejemplo es un poco rebuscado, pero ilustra con claridad los problemas que surgen cuando intentamos agregar patrones divergentes de las preferencias individuales en un patrón social razonable. La importancia del trabajo de Arrow es que trata de demostrar que toda regla de decisión social elegida debe violar, cuando menos, uno de los postulados establecidos en estos seis axiomas.

Importancia del teorema de Arrow

Gran parte de las investigaciones de la teoría de la elección social se ha centrado en el resultado fundamental de Arrow y en demostrar si sigue siendo válido cuando se sujeta a posibles revisiones del conjunto de postulados básicos. En términos generales, el resultado de la imposibilidad parece bastante sólido ante pequeños cambios de estos postulados. Los sistemas con menos axiomas básicos y los que relajan algunos de los axiomas de Arrow, siguen mostrando una serie de inconsistencias. Al parecer, esperar que los métodos de elección social sean al mismo tiempo racionales, contundentes e igualitarios es esperar demasiado. Por el contrario, los compromisos son inevitables. Por supuesto que saber dónde se deben hacer estos compromisos es una interrogante normativa muy difícil de responder.

A pesar de la naturaleza negativa de la conclusión de Arrow, se debe recordar que todas las sociedades hacen elecciones sociales. El Congreso de Estados Unidos consigue aprobar un presupuesto, con frecuencia en el último minuto; los profesores de las facultades elaboran los planes de estudio; y los esquimales de Alaska deciden cómo podrían mejorar sus métodos comunales de pesca para el año próximo. Por lo tanto, en lugar de analizar la interrogante normativa de

[6]A veces, la condición 4 se conoce como el *axioma de la independencia de las alternativas irrelevantes*. Este axioma ha dado lugar a más controversias (y a otras parecidas a las que ocurren en torno a la lista Von Neumann-Morgenstern) que cualquier otro. Para ver el tipo de funciones que descarta este axioma, consideremos el caso de individuos que votan por candidatos en unas elecciones. Supongamos que cada individuo clasifica a estos candidatos por orden de qué tan deseables son. Una elección combina, de alguna manera, estas listas de los individuos en una lista de toda la sociedad. Según el axioma 4, la lista social debe tener la propiedad de que, si el candidato X es preferido al candidato Y, esta preferencia seguirá siendo válida incluso si otros candidatos entran o salen de la carrera. El procedimiento más común para unas elecciones, en cuyo caso cada persona vota tan sólo por el candidato que prefiere más, podría no cumplir el axioma debido a la presencia de "otros que echan a perder" la contienda. Por ejemplo, cabe suponer que la presencia de Ralph Nader en las elecciones presidenciales estadounidenses de 2000 hizo que Al Gore perdiera. Con la "alternativa irrelevante" de que Nader hubiera estado fuera de la carrera, Gore tal vez habría ganado. Por tanto, el sistema de elecciones presidenciales en Estados Unidos no cumple el axioma 4 de Arrow. Muchos autores han analizado las consecuencias de relajar este axioma.

cómo se podrían hacer esas elecciones de forma socialmente óptima, los economistas han ido adoptando un planteamiento positivo, preguntándose cómo se toman, de hecho, las decisiones. Éste es el planteamiento que se adoptará a continuación.

Votación directa y asignación de recursos

Muchas instituciones recurren a las votaciones como proceso para tomar decisiones sociales. En algunos casos, los individuos votan directamente cuando se trata de algunas cuestiones políticas. En Estados Unidos, tal es el caso en algunos ayuntamientos de Nueva Inglaterra y en muchos referendos que incluyen a un estado completo (por ejemplo, la Proposición 13 de California en 1977), pero también en muchas de las políticas nacionales adoptadas en Suiza. La votación directa también es típica del proceso de decisión social en muchos grupos más pequeños y en agrupaciones como las cooperativas agrícolas, los profesores universitarios o el Club Rotario local. Sin embargo, en otros casos, las sociedades han considerado más conveniente emplear una forma de gobierno representativo, en cuyo caso los individuos votan directamente para elegir a sus representantes políticos, los cuales se encargan después de tomar las decisiones relativas a cuestiones políticas. En el caso de nuestro análisis de la teoría de la elección pública, empezaremos por analizar la votación directa. Se trata de un tema importante, no sólo porque es un procedimiento que se aplica a muchos casos, sino también porque los representantes electos con frecuencia participan en votaciones directas, por ejemplo, en el Congreso, y la teoría que ilustraremos también se aplica en estos casos. Más adelante, en este mismo capítulo, se verán algunos problemas especiales que surgen cuando analizamos un gobierno representativo.

La regla de la mayoría

Dado que tantas elecciones se rigen por la regla de la mayoría, muchas veces consideramos que se trata de un procedimiento natural y, tal vez, óptimo para tomar decisiones sociales. Sin embargo, basta un somero análisis para ver que una regla que exige que una política obtenga el 50% de los votos para ser aprobada no tiene nada que sea particularmente sagrado. Por ejemplo, la Constitución de Estados Unidos establece que dos terceras partes de los estados deben adoptar una enmienda antes de que ésta adquiera rango de ley. Asimismo, el 60% del Senado de Estados Unidos debe votar para que se limite el debate de las cuestiones controvertidas. De hecho, algunas instituciones, por ejemplo, las reuniones de Quaker, pueden exigir la unanimidad para tomar una decisión social. El análisis del concepto del equilibrio de Lindahl que se hizo en el capítulo anterior sugiere que puede existir una distribución de las contribuciones fiscales que obtendría un respaldo unánime al votar por el suministro de bienes públicos. Sin embargo, la presencia del problema del parásito, suele dificultar la posibilidad de llegar a estos acuerdos unánimes. El análisis detallado de las fuerzas que llevan a las sociedades a alejarse de la unanimidad y a elegir otro tipo de porcentaje para decidir nos apartaría mucho del tema que nos interesa aquí. En cambio, a lo largo de nuestro análisis de las votaciones supondremos que las decisiones son tomadas con la regla de la mayoría. Los lectores tal vez quieran reflexionar solos qué tipo de situaciones exigirían que el porcentaje para tomar una decisión no fuera el 50 por ciento.

La paradoja de la votación

En la década de 1780, el teórico social francés M. de Condorcet observó una importante peculiaridad de los sistemas de votación por la regla de la mayoría: que tal vez no lleguen a un equilibrio, sino que pueden circular de una a otra de las opciones alternativas. El sencillo caso de la tabla 21.1 ilustra la paradoja de Condorcet. Supongamos que hay tres votantes (Santiago, Juan y Francisco) que eligen entre tres opciones políticas. A continuación, para nuestro análisis supondremos que las tres opciones políticas representan tres niveles de gasto en un bien público determinado [(A) bajo, (B) mediano o (C) alto], pero la paradoja de Condorcet se presentaría incluso si las opciones que estamos considerando no siguen este tipo de orden. La tabla 21.1 muestra las preferencias de Santiago, Juan y Francisco por estas tres opciones políticas. Estas preferencias dan lugar a la paradoja de Condorcet.

Consideremos una votación entre las opciones A y B. En este caso, la opción A ganaría, porque la prefieren Santiago y Francisco y sólo Juan se opone a ella. En una votación entre las opciones A y C, la opción C ganaría, de nueva cuenta con dos votos contra uno. Sin embargo,

TABLA 21.1 **Preferencias que dan origen a la paradoja de la votación**

Elecciones: A: gasto bajo
B: gasto mediano
C: gasto alto

Preferencias	Santiago	Juan	Francisco
	A	B	C
	B	C	A
	C	A	B

en una votación entre C y B, la B ganaría y volveríamos a estar en nuestro punto de partida. Las elecciones sociales circularían de manera indefinida entre estas tres alternativas. En votaciones posteriores, una alternativa podría derrotar a una elección inicial cualquiera y jamás se alcanzaría un equilibrio. En esta situación, la opción que elijan al final de cuentas dependerá de cuestiones en apariencia tan triviales como la hora en que se cierren las urnas o la secuencia de los puntos de la orden del día, en vez de que se deriven, de alguna forma racional, de las preferencias de los votantes.

Preferencias con un solo máximo y el teorema del votante mediano

La paradoja de las votaciones de Condorcet surge debido a que las preferencias de los votantes son irreconciliables en cierta medida. Por tanto, podríamos preguntar si las restricciones sobre el tipo de las preferencias permitidas podrían dar lugar a situaciones en las cuales existen más probabilidades de que las votaciones tengan resultados de equilibrio. En 1948,[7] D. Black descubrió un resultado fundamental respecto a esta probabilidad. Demostró que los resultados de equilibrio de las votaciones siempre se producen en aquellos casos en los cuales el asunto sometido a votación tiene una sola dimensión (por ejemplo, cuánto gastar en un bien público) y las preferencias de los votantes tienen "un único máximo". Para comprender lo que significa el concepto de un único máximo, consideremos de nuevo la paradoja de Condorcet. En la figura 21.4 hemos ilustrado las preferencias que dan lugar a la paradoja asignando niveles hipotéticos de utilidad a las opciones A, B y C congruentes con las preferencias que muestra la tabla 21.1. En el caso de Santiago y Juan, las preferencias tienen un único máximo; es decir, a medida que aumentan los niveles de gasto en los bienes públicos, sólo hay una elección que maximiza la utilidad local (A para Santiago, B para Juan). Las preferencias de Francisco, por el contrario, tienen dos máximos locales (A y C). Esta preferencia es la que produce un patrón cíclico en las votaciones. Por otra parte, si Francisco tuviera la preferencia que representa la línea de puntos de la figura 21.4, donde ahora C es el único máximo local, no se produciría la paradoja. En tal caso, la opción B sería la elegida porque derrotaría a las opciones A y C por 2 votos contra 1. En este caso, B es la elección preferida del votante "mediano" (Juan), porque sus preferencias se encuentran "entre" las de Santiago y la modificada de Francisco.

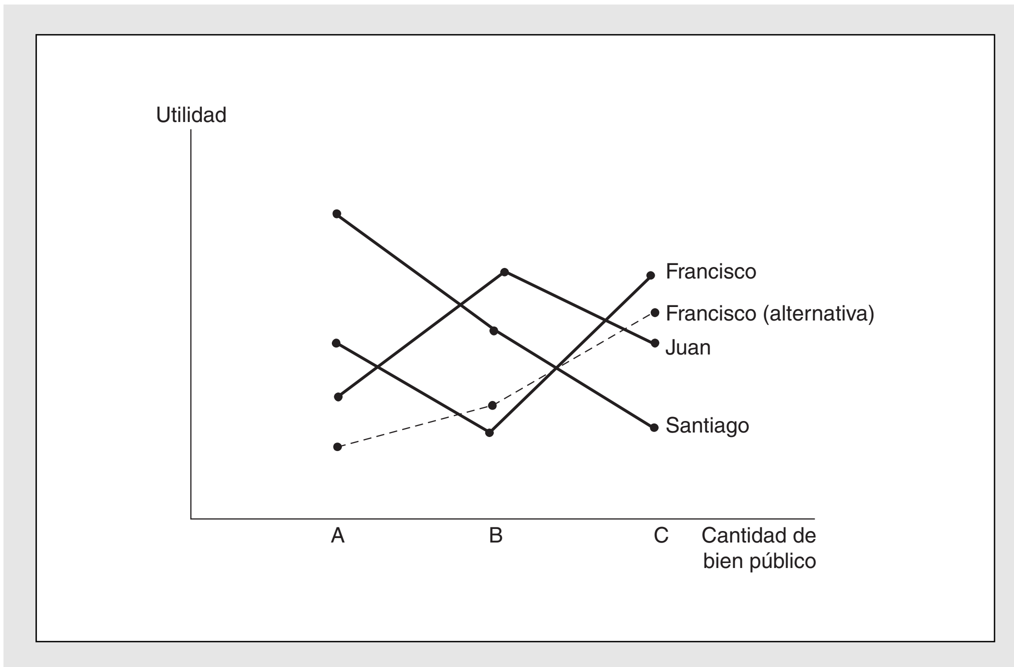
El resultado de Black es bastante general y se aplica a una cantidad de votantes cualquiera. Si las elecciones son unidimensionales[8] y si las preferencias tienen un único máximo, entonces la regla de la mayoría dará lugar a la selección del proyecto preferido por el votante mediano. Por tanto, las preferencias de este votante determinarán las elecciones públicas. Este resultado es un punto de partida clave en muchos modelos sobre el proceso político. En estos modelos, las preferencias del votante mediano dictan cuáles políticas son elegidas, sea porque ese votante determina cuál obtiene la mayoría de los votos en una elección directa, sea porque él dictará cuáles son las opciones en unas elecciones competitivas, en las cuales los candidatos deben adoptar políticas que le resulten atractivas a este votante.

[7]D. Black. "On the Rationale of Group Decision Making", *Journal of Political Economy*, febrero de 1948, pp. 23-34.

[8]Podremos generalizar un poco el resultado, de modo que considere el caso de políticas multidimensionales, si es posible tipificar a los individuos en función del respaldo que brindan a esas políticas a lo largo de una única dimensión.

FIGURA 21.4 **Preferencias con un único máximo y el teorema del votante mediano**

Esta gráfica representa las preferencias de la tabla 21.1. Las preferencias de Santiago y Juan tienen un único máximo, pero la de Francisco tiene dos máximos locales, y es la que produce la paradoja de la votación. Si la preferencia de Francisco sólo hubiera tenido un máximo (la línea de puntos), la opción B habría sido la elección preferida del votante mediano (Juan).



Un modelo político sencillo

Para ilustrar cómo se aplica el teorema del votante mediano a los modelos políticos, supongamos que una comunidad se caracteriza por tener un alto número (n) de votantes y que cada uno tiene un ingreso dado por y_i. La utilidad de cada votante depende de su consumo de un bien privado (c_i) y de un bien público (g) de acuerdo con la función sumatoria

$$\textbf{utilidad de la persona } i = U_i = c_i + f(g), \qquad \textbf{(21.6)}$$

donde $f_g > 0$, $f_{gc} < 0$.

Cada votante debe pagar impuestos sobre la renta para financiar g. Los impuestos son proporcionales al ingreso y son de una tasa impositiva t. Por tanto, la restricción presupuestaria de cada persona está dada por

$$c_i = (1 - t)\, y_i. \qquad \textbf{(21.7)}$$

El gobierno también está sujeto a su restricción presupuestaria

$$g = \sum_{1}^{n} t y_i = t n y^A, \qquad \textbf{(21.8)}$$

donde y^A es el ingreso promedio de todos los votantes.

Dadas estas restricciones, podemos expresar la utilidad de la persona i exclusivamente como una función del g que elija:

$$U_i(g) = (y^A - g/n)\, y_i/y^A + f(g). \qquad \textbf{(21.9)}$$

El maximizar la utilidad de la persona i muestra que el nivel de gasto que prefiere dedicar al bien público cumple con

$$dU_i/dg = -y_i/ny^A + f_g(g) = 0 \quad \text{o} \quad g = f_g^{-1}(y_i/ny^A). \tag{21.10}$$

Esto demuestra que el gasto deseado para g está inversamente relacionado con el ingreso. Dado que en este modelo los beneficios de g son independientes del ingreso, pero que los impuestos aumentan al mismo tiempo que el ingreso, los votantes con ingresos altos esperarán obtener ganancias netas del gasto público más bajas, o incluso pérdidas, que los votantes con ingresos bajos.

El equilibrio del votante mediano

En este caso, si g es determinado por la regla de la mayoría, su nivel elegido será el preferido por el "votante mediano". Aquí, las preferencias de los votantes se alinean exactamente con los ingresos, de modo que g será fijado en el nivel preferido por el votante con el ingreso mediano (y^m). Cualquier otro nivel de g no obtendría el 50% de los votos. Por tanto, el g de equilibrio está dado por

$$g^* = f_g^{-1}(y^m/ny^A) = f_g^{-1}[(1/n)(y^m/y^A)]. \tag{21.11}$$

Por lo general, la distribución del ingreso está sesgada hacia la derecha prácticamente en todas las jurisdicciones políticas del mundo. Con esta distribución del ingreso $y^m < y^A$, y además, esta diferencia entre las dos medidas se va haciendo más grande a medida que la distribución del ingreso se va sesgando más. Por tanto, la ecuación 21.11 sugiere que, en una democracia directa,[9] *ceteris paribus*, cuanto más desigual sea la distribución del ingreso tanto mayores serán las tasas impositivas y tanto mayor será el gasto en bienes públicos. Asimismo, cabría esperar que las leyes que extienden el voto a segmentos progresivamente más pobres de la población también aumentarían este gasto.

Resultado óptimo del votante mediano

El teorema del votante mediano permite una serie de previsiones positivas interesantes sobre los resultados de una votación, pero es mucho más difícil detectar con precisión la importancia normativa de estos resultados. En este ejemplo, es evidente que el resultado no reproduce el equilibrio voluntario de Lindahl descrito en el capítulo 20; es decir, los votantes con ingresos altos no aceptarían de manera voluntaria los impuestos aplicados.[10] El resultado tampoco corresponde necesariamente con cualquier otro de los criterios sobre el bienestar que definimos al principio de este capítulo. Por ejemplo, según el criterio del bienestar social igualitario, g sería elegido de forma que maximizara la suma de las utilidades:

$$BS = \sum_{1}^{n} U_i = \sum\left[(y^A - g/n)y_i/y^A + f(g)\right] = ny^A - g + nf(g). \tag{21.12}$$

Por lo tanto, la elección óptima de g se calcula al aplicar derivadas:

$$dBS/dg = -1 + nf_g = 0$$

o

$$g^* = f_g^{-1}(1/n) = f_g^{-1}[(1/n)(y^A/y^A)], \tag{21.13}$$

lo cual muestra que una elección utilitarista optaría por el nivel de g preferido por el votante que tiene el ingreso *promedio*. Esta producción de g sería inferior a la preferida por el votante mediano porque $y^m < y^A$. En el ejemplo 21.2 se lleva el análisis un poco más lejos y se muestra cómo podría aplicarse a la política de transferencias públicas.

---

[9]Como veremos, en el caso de una democracia representativa también debemos preguntarnos si los representantes políticos siguen la voluntad del votante mediano.

[10]Si bien podrían aceptarlos si las ventajas de g también fueran proporcionales al ingreso.

EJEMPLO 21.2

Votación para la redistribución de los impuestos

Supongamos que los votantes están considerando la posibilidad de adoptar una transferencia de una suma única que se le pagaría a cada persona y sería financiada por medio de un sistema impositivo proporcional. Si se denota la transferencia personal con b, la utilidad de cada individuo estará dada por

$$U_i = c_i + b \tag{21.14}$$

y la restricción presupuestaria del gobierno será

$$nb = tny^A \quad \text{o} \quad b = ty^A. \tag{21.15}$$

En el caso del votante que tiene un ingreso superior al promedio, se maximizaría su utilidad eligiendo $b = 0$, porque este votante pagaría una cantidad mucho mayor de impuestos que la que recibiría por la transferencia. Todo votante con un ingreso por debajo del promedio ganaría con esta transferencia, independientemente de cuál fuera la tasa impositiva. Por tanto, estos votantes, inclusive el decisivo votante mediano, optarán por $t = 1$ y $b = y^A$. Es decir, votarían por igualar totalmente los ingresos por medio del sistema impositivo. Por supuesto que este plan de impuestos no es realista, fundamentalmente porque, sin lugar a dudas, una tasa impositiva del 100% creará incentivos negativos para el trabajo los cuales reducirían el ingreso promedio.

Para captar los efectos de estos incentivos, supongamos[11] que el ingreso de cada persona tiene dos elementos, uno que responde a las tasas impositivas $[y_i(t)]$ y otro que no responde a ellas (n_i). Supongamos también que el valor promedio de n_i es 0, pero que su distribución está sesgada hacia la derecha, de forma que $n_m < 0$. Ahora, la utilidad estará dada por

$$U_i = (1 - t)\,[y_i(t) + n_i] + b. \tag{21.16}$$

Si suponemos que cada persona optimiza primero aquellas variables, como la oferta de trabajo, que afectan a $y_i(t)$, la condición de primer orden[12] para obtener un máximo en sus decisiones políticas respecto a t y b entonces pasa a ser, empleando la restricción del presupuesto del gobierno de la ecuación 21.15).

$$dU_i/dt = -n_i + t\, dy^A/dt = 0. \tag{21.17}$$

Por consiguiente, para el votante i la tasa impositiva óptima para la redistribución está determinada por

$$t_i = n_i/dy^A/dt. \tag{21.18}$$

Si suponemos que la competencia política en una votación sujeta a la regla de la mayoría optará por la política que prefiera el votante mediano, la tasa impositiva de equilibrio será

$$t^* = n_m/dy^A/dt. \tag{21.19}$$

Dado que n_m y dy^A/dt esta tasa impositiva será positiva. El impuesto óptimo irá incrementando a medida que n_m se vaya alejando de su valor promedio, es decir, cuanto mayor sea la distribución del ingreso desigual. Por otra parte, cuanto más grandes sean los efectos distorsionantes derivados del impuesto, tanto más bajo será el impuesto óptimo. Por lo tanto, este modelo plantea algunas hipótesis comprobables, bastante sólidas, sobre la redistribución en el mundo real.

Pregunta: ¿En el caso de este modelo, un impuesto progresivo probablemente disminuiría t^* o la aumentaría?

[11]Lo que sigue representa una versión muy simplificada de un modelo desarrollado por primera vez por T. Romer en "Individual Welfare, Majority Voting, and the Properties of a Linear Income Tax", *Journal of Public Economics*, diciembre de 1978, pp. 163-168.

[12]Podemos derivar la ecuación 21.17 a partir de la 21.16 aplicando derivadas y teniendo en cuenta que $dy_i/dt = 0$ debido al supuesto de la optimización individual.

Gobierno representativo

En los gobiernos representativos, la gente vota por los candidatos y no por las políticas. A continuación, los candidatos electos votan directamente en los órganos legislativos por las políticas que prefieren. Diversas influencias dan forma a las preferencias políticas de los políticos, entre otras sus percepciones respecto a lo que quieren sus electores, su opinión sobre los "bienes públicos", la fuerza de los grupos "de interés" y, en última instancia, su deseo de conseguir su reelección. En esta sección se analiza de manera breve cómo eligen las políticas y cómo estas elecciones afectan la asignación de los recursos.

Votación probabilística

Para estudiar al gobierno representativo, supondremos que sólo hay dos candidatos para un puesto político. Antes de la elección cada candidato anuncia su "plataforma"; es decir, una lista exhaustiva de las políticas que aplicará si gana la elección. Se denotarán las plataformas de los candidatos con θ_1 y θ_2. Para simplificar aún más las cosas, supondremos que los candidatos, una vez elegidos, en realidad tratan de aplicar la plataforma que han anunciado. Por supuesto que, en el mundo real, los candidatos muchas veces no cumplen sus promesas electorales, pero analizar el tema de la credibilidad nos alejaría mucho de nuestro campo.

Cada uno de los n votantes de la sociedad analiza la plataforma de los candidatos y decide por quién votará. Si π_i representa la probabilidad de que el votante i vote por el candidato 1, supondremos que

$$\pi_i = f_i[U_i(\theta_1) - U_i(\theta_2)], \qquad (21.20)$$

donde $f' > 0$ y $U_i(\theta_j)$ representa la utilidad que espera recibir el votante de la plataforma anunciada por el candidato j. Dado que sólo dos candidatos[13] participan en la elección, la probabilidad de que el votante i vote por el candidato 2 está dada por $1 - \pi_i$.

El equilibrio de Nash en el juego de los candidatos

El candidato 1 elige θ_1 de forma que maximice la probabilidad de ser electo:

$$\textbf{voto esperado} = VE_1 = \sum_{i=1}^{n} \pi_i = \sum_{i=1}^{n} f_i[U_i(\theta_1) - U_i(\theta_2)]. \qquad (21.21)$$

Por otra parte, el candidato 2 elige θ_2 de forma que maximice su voto esperado:

$$\textbf{voto esperado} = VE_2 = \sum_{i=1}^{n} (1 - \pi_i) = n - VE_1. \qquad (21.22)$$

Por tanto, desde la perspectiva de la teoría de juegos, nuestro modelo de votación es un *juego de suma cero* con estrategias continuas, las plataformas, θ_1 y θ_2. El teorema fundamental de estos juegos garantiza que este juego tendrá un conjunto de estrategias de equilibrio de Nash en cuyo caso

$$VE_1(\theta_1, \theta_2^*) \le VE_1(\theta_1^*, \theta_2^*) \le VE_1(\theta_1^*, \theta_2). \qquad (21.23)$$

Es decir, el candidato 1 sale mejor librado contra θ_2^* si elige θ_1^*, y el candidato 2 sale mejor librado contra θ_1^* si elige θ_2^*. Por tanto, las consideraciones relativas a los aspectos estratégicos de las elecciones sugieren que los candidatos alcanzarán plataformas de equilibrio y que es posible estudiar las propiedades de las elecciones si analizamos cómo las situaciones cambiantes afectan dichas plataformas.

---

[13]En este caso también supondremos que todos los individuos votan de hecho. El estudio de la "abstención" del votante es, evidentemente, bastante importante en el análisis de las elecciones reales.

EJEMPLO 21.3

Plataformas de valor neto

En general suele ser difícil cuantificar las diversas dimensiones de las plataformas de los candidatos, pero en las plataformas de "valor neto" con las que el candidato promete un beneficio único en términos monetarios (es decir, el valor de los servicios del gobierno menos los impuestos pagados) a cada votante ofrecen una buena ilustración. Por ejemplo, el candidato 1 promete un beneficio neto en dinero de θ_{1i} a cada votante. El candidato está limitado por la restricción presupuestaria del gobierno:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_{1i} = 0. \tag{21.24}$$

El objetivo de los candidatos consiste en elegir el conjunto de θ_{1i} que maximiza VE_1 frente a θ_2^*. Si escribimos el lagrangiano de este problema tendremos

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= VE_1 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_{1i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i[U(\theta_{1i}) - U(\theta_2^*)] + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_{1i}\right). \end{aligned} \tag{21.25}$$

La condición de primer orden de los beneficios netos prometidos al votante i está dada por

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_{1i}} = f_i' U_i' + \lambda = 0. \tag{21.26}$$

Si la función f_i es la misma para todos los votantes, entonces la ecuación 21.26 implica que el candidato 1 debería elegir θ_{1i} de forma que U_i' sea igual para todos los votantes. Resulta interesante señalar que ésta sería la misma política que adoptaría un rey filosófico y omnisapiente que quisiera maximizar la función de bienestar social (BS) "utilitarista":

$$BS = \sum_{i=1}^{n} U_i(\theta_{1i}). \tag{21.27}$$

Por tanto, en este sencillo modelo existe una relación entre los resultados estratégicos de votar por los representantes políticos y las asignaciones óptimas de recursos que sugerirían funciones específicas de bienestar social. La competencia entre los candidatos en el terreno público podría complementar, en cierta medida, la mano invisible de Santiago en los mercados privados.[14]

Pregunta: ¿El candidato 2 también elige una plataforma utilitarista óptima? ¿Cómo cambiaría este resultado si f_i cambiara en función de cada votante?

Dinero y política

Dado que el papel del dinero ha ido adquiriendo un papel cada vez más importante en las elecciones, los economistas han intentado generalizar el modelo anterior de modo que tenga en cuenta las aportaciones a las campañas políticas y otro tipo de pagos políticos. Este tipo de pagos pueden afectar la asignación de recursos por vía de los canales políticos siguiendo dos caminos. En primer término, el dinero que se gasta en publicidad en los medios o en los esfuerzos por conseguir votos pueden afectar las decisiones de los votantes, es decir, este gasto puede afectar la función f_i que planteamos en la sección anterior. En segundo, la promesa de hacer aportaciones a las campañas puede llevar a los candidatos a modificar sus plataformas de modo que le resul-

[14]Encontrará un análisis de otras propiedades normativas de los modelos de votación probabilística en P. Coughlan y S. Nitzan. "Electoral Outcomes with Probabilistic Voting and Nash Social Welfare Maxima", *Journal of Public Economics*, febrero de 1981, pp. 113-121.

ten atractivas a los grupos de interés que hacen aportaciones. Por consiguiente, al final de cuentas, las plataformas que elijan los candidatos podrían no representar opciones para el equilibrio de Nash puro que implicamos antes. En cambio, las plataformas reales pueden representar complejos intercambios entre la necesidad de los candidatos de obtener financiamiento para su campaña y la necesidad de atraer a una mayoría de votantes. Un problema muy difícil del análisis del equilibrio general es crear modelos de estos intercambios e inferir cómo las diversas "reformas" propuestas podrían afectar los resultados observados.

Comportamiento que busca rentas

Los políticos electos desempeñan el papel de agentes cuando seleccionan las políticas que prefieren los principales de la sociedad: los votantes. En este contexto, un agente perfecto optaría por aquellas políticas que el votante mediano, plenamente informado, elegiría si estuviera en posición de hacerlo. Sin embargo, cabe preguntar si este supuesto conductual no pide demasiado de los políticos. Al parecer, no hay una razón de peso que explique por qué los políticos habrían de convertirse en agentes altruistas después de haber sido elegidos para ocupar un cargo. Otra alternativa sería suponer que los políticos podrían participar en *actividades para buscar rentas* con el propósito de mejorar su propio bienestar. Estas actividades pueden ir desde cosas banales como robarse parte de los ingresos fiscales, hasta actividades ingeniosas como disfrazar las rentas políticas como si fueran costos necesarios para la actividad legislativa. En términos del modelo político que desarrollamos antes, en este mismo capítulo, la posibilidad de que se presenten estas actividades "corruptas" crearía un diferencial impositivo implícito entre el valor de los bienes públicos que reciben los votantes y los impuestos que pagan. Es decir, la obtención de una renta política r exigiría que volvamos a expresar la restricción presupuestaria del gobierno (ecuación 21.8) como

$$g = tny^A - r. \tag{21.28}$$

Cabe suponer que los votantes tendrán en cuenta estas actividades que buscan obtener rentas cuando eligen entre distintas políticas públicas y ello probablemente reduciría los valores óptimos de g y t en consecuencia.

Rentas políticas y competencia electoral

Queda abierta la interrogante para saber si las rentas políticas pueden perdurar o no en una competencia electoral abierta. Si el candidato A anuncia una política $(g, t)^A$ que obedece a la restricción presupuestaria de la ecuación 21.28, el candidato B siempre podrá optar por una política $(g, t)^B$ aceptando una renta más baja, que sea más atractiva para el votante mediano. De forma muy similar a la competencia de precios de tipo Bertrand de los modelos de la teoría de juegos que vimos en el capítulo 15, la cual limitaba a los competidores a fijar precios en función del costo marginal, la competencia activa entre los candidatos políticos puede hacer que las rentas políticas se reduzcan a cero. Las rentas positivas sólo pueden perdurar cuando hay barreras para la entrada (por ejemplo, importantes ventajas en la campaña para la persona que ocupa un cargo) o con información imperfecta sobre las actividades de los políticos. Visto de esta manera, la reforma electoral y la política de competencia tienen mucho en común.

Fuentes de rentas políticas

El éxito para generar una renta política no necesariamente debe surgir tan sólo dentro del sector público de la economía. Los ciudadanos privados podrían buscar rentas para sí mismos solicitando la ayuda de los políticos que están en posición de otorgarles favores. Por ejemplo, supongamos que una empresa en una industria competitiva puede animar a los políticos, por medio de alguna suerte de pagos monetarios, a que le otorguen una franquicia exclusiva. El resultado sería una monopolización de la industria así como una transferencia a los políticos de parte del beneficio que sería del monopolio. El pago político mismo no representaría un costo de bienestar para la sociedad, sino que esto sólo transferiría más de lo que el monopolio ya había transferido proveniente de los consumidores. Sin embargo, la pérdida de peso muerto originada por la creación del monopolio, respecto a la situación competitiva que habría prevalecido si no hubiera habido favoritismo político, sumada a los recursos reales que se hayan destinado a conseguir la franquicia, constituirían el verdadero costo de la búsqueda de rentas en términos de bienestar.

De ahí, hemos desarrollado una definición general:

DEFINICIÓN

Actividades de búsqueda de rentas. Los agentes económicos emprenden actividades para buscar rentas cuando emplean el proceso político para generar rentas económicas que normalmente no se presentarían en las transacciones de mercado. Los políticos y los agentes privados comparten estas rentas. Los costos de estas actividades para el bienestar son las pérdidas de utilidad que sufren los individuos, quienes deben aceptar resultados que no son los óptimos, pero no son la magnitud de las rentas mismas ni de cómo se reparten.

La definición sugiere que las actividades para buscar rentas pueden ser bastante comunes y que los costos asociados a estas actividades pueden ser muy altos. El ejemplo 21.4 ilustra que es posible emplear los conceptos económicos normales para analizar estas actividades.

EJEMPLO 21.4

Disipación de las rentas

Cuando una serie de agentes compiten en la misma actividad para buscar rentas, es posible que toda la renta disponible se disipe entre los costos de quienes la buscan. Por ejemplo, supongamos que un monopolio puede obtener un beneficio π_m por periodo y que es posible obtener una franquicia para el monopolio sobornando a un funcionario corrupto con S por periodo ($S < \pi_m$). Los empresarios neutrales al riesgo ofrecerán sobornos siempre y cuando la ganancia esperada exceda a los costos del soborno. Si cada buscador de rentas tiene la misma posibilidad de obtener la franquicia, el número de sobornantes (n) aumentará hasta el punto donde

$$S = \pi_m / n. \tag{21.29}$$

Por tanto, la renta total disponible se disipará en razón de los sobornos pagados por todos los candidatos a la franquicia. Si los buscadores de rentas sintieran aversión por el riesgo o si los funcionarios no recibieran los sobornos máximos posibles, entonces podría quedar parte de la renta para quien obtenga la franquicia.

Pregunta: En este ejemplo, ¿la renta se disiparía en su totalidad si el tope de n fuera una cifra inferior a la que se necesita para cumplir la ecuación 21.29?

RESUMEN

En este capítulo hemos revisado algunos conceptos de la teoría económica de la elección pública. Se ha demostrado que los mecanismos de la elección pública son intrínsecamente más difíciles de evaluar que los del mercado. Incluso en situaciones relativamente sencillas es posible que se presenten resultados inferiores en el sentido de Pareto. En el caso de situaciones complejas, como las votaciones en el Congreso, es muy difícil crear modelos explícitos del comportamiento y su evaluación debe emplear medios menos formales. Al analizar estas cuestiones se ha demostrado que:

- La elección de asignaciones equitativas de los recursos es un proceso ambiguo porque podemos emplear distintos criterios de bienestar. En algunos casos, para conseguir la equidad, definida correctamente, tal vez sea necesario sacrificar algo de eficiencia.

- El teorema de la imposibilidad de Arrow demuestra que, dados unos supuestos bastante generales, no hay un mecanismo de elección social totalmente satisfactorio. Por tanto, el problema de la teoría de la elección social consiste en evaluar el desempeño de mecanismos relativamente imperfectos.
- La votación directa y la regla de la mayoría no siempre producen un equilibrio. Sin embargo, si las preferencias tienen un único máximo, la votación, sujeta a la regla de la mayoría, para cuestiones públicas de una sola dimensión dará por resultado que se elijan las políticas que prefiere el votante mediano. Sin embargo, estas políticas no son necesariamente eficientes.
- Podemos analizar la votación para representantes políticos empleando instrumentos de la teoría de juegos. En algunos casos, las estrategias que eligen los candidatos darán lugar a equilibrios de Nash que tienen consecuencias normativas deseables.
- Los políticos pueden dedicarse a buscar rentas de forma oportunista, pero la competencia electoral restringirá esta búsqueda.

PROBLEMAS

21.1

Dos marineros que han naufragado en una isla deben asignar 200 kilos de alimentos entre sí. La función de utilidad del primero está dada por

$$\textbf{utilidad} = \sqrt{a_1},$$

donde a_1 es la cantidad de alimentos que consume el primer marinero. En el caso del segundo marinero, la utilidad, en función de los alimentos que consume, está dada por

$$\textbf{utilidad} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_2}.$$

a. Si los marineros asignan los alimentos en partes iguales entre sí, ¿cuánta utilidad recibirá cada uno?

b. ¿Los marineros cómo deben asignar los alimentos de modo que garantice que los dos obtengan la misma utilidad?

c. ¿Cómo deben asignar los alimentos para maximizar la suma de sus utilidades?

d. Supongamos que el segundo marinero necesita, cuando menos, un nivel de utilidad de 5 para sobrevivir. ¿Cómo deben asignar los alimentos para maximizar la suma de utilidades, sujeto a la restricción de que el segundo marinero obtenga el nivel mínimo de utilidad requerido?

e. Supongamos que los dos aceptan que hay una función de bienestar social de la forma

$$BS = U_1^{1/2} U_2^{1/2}.$$

¿Los marineros cómo deben asignar los alimentos entre sí de forma que maximice el bienestar social?

21.2

En la década de los treinta varios autores sugirieron un "criterio para los sobornos" que permitiera juzgar si las situaciones sociales eran deseables o no. Este criterio de bienestar afirma que un desplazamiento del estado social *A* al estado *B* constituye una mejora del bienestar social si los que ganan con este cambio son capaces de compensar a los que pierden en cantidad suficiente para que los que pierden acepten el cambio. La compensación no tiene que ocurrir de hecho, sino que sólo se necesita considerar que podría ser pagada. Si la compensación tiene lugar de hecho, este criterio se reduce a la definición de Pareto (la situación de algunos individuos mejora sin que la de nadie empeore). Por tanto, este criterio sólo es novedoso en cuanto a que los ganadores no pagan la compensación a los que pierden. En esta situación, ¿el criterio del soborno parece "no tener valor alguno" o favorece en cierta medida a los que inicialmente son ricos? ¿Puede ofrecer algunos ejemplos sencillos?

21.3

Supongamos que una economía se caracteriza por una función lineal de posibilidades de producción de sus dos bienes (x y y) de la siguiente manera

$$x + 2y = 180.$$

En esta economía hay dos individuos y cada uno tiene idéntica función de utilidad para x y y de forma

$$U(x, y) = \sqrt{xy}.$$

a. Supongamos que la producción de y está fija en 10. ¿Cuál sería la frontera de posibilidades de utilidad de esta economía?

b. Supongamos que la producción de y está fija en 30. ¿Cuál sería la frontera de posibilidades de utilidad?

c. ¿Cómo deberíamos elegir la producción de y para que garantice la "mejor" frontera de posibilidades de utilidad?

d. ¿En qué condiciones, distintas a las de este problema, su respuesta al inciso c dependería del punto de la frontera de posibilidades de utilidades que se esté considerando?

21.4

Supongamos que hay siete individuos en una sociedad en la cual ellos votan por los sistemas sociales que prefieren y que el sistema elegido siempre es el sistema que se lleva la mayor cantidad de votos. Defina un ejemplo de clasificaciones individuales de tres estados A, B y C de modo que el estado A es el elegido cuando están disponibles los tres estados, pero el estado B es el elegido cuando no está disponible la alternativa "irrelevante" C. Esto es lo mismo que demostrar que esta sociedad no cumple el axioma 4 de la lista de Arrow. ¿Su ejemplo es razonable? ¿Qué indica sobre la naturaleza del axioma de Arrow?

21.5

Supongamos que hay dos individuos en una economía. Las utilidades de estos individuos en cinco estados sociales posibles aparecen en la siguiente tabla:

Estado	Utilidad 1	Utilidad 2
A	50	50
B	70	40
C	45	54
D	53	50.5
E	30	84

Los individuos no saben qué número (1 o 2) les asignarán cuando la economía empiece a funcionar y, por tanto, no saben cuál será la utilidad real que recibirán en función de los distintos estados sociales. ¿Qué estado social será preferido si un individuo adopta las siguientes estrategias cuando vota para lidiar con esta incertidumbre?

a. Elija el estado que garantiza la utilidad más alta para la persona en peor situación.

b. Suponga que hay 50% de probabilidades de ser alguno de los dos individuos y elija el estado con la mayor utilidad esperada.

c. Suponga que, pase lo que pase, las probabilidades siempre son desfavorables, de modo que hay 60% de probabilidades de recibir la utilidad más baja y 40% de obtener la más alta en cualquiera de los estados. Dadas estas probabilidades, elija el estado con la mayor utilidad esperada.

d. Suponga que hay 50% de probabilidades de que al individuo le asignen uno de los dos números y que a los dos les disgusta la desigualdad. Cada uno elegirá el estado en el cual

$$\textbf{utilidad esperada} - |U_1 - U_2|$$

es lo más grande posible (donde la notación $|\ \ldots\ |$ denota el valor absoluto).

e. ¿Qué concluye de este problema sobre las elecciones sociales cubiertas por un "velo de ignorancia" en cuanto a la identidad concreta de un individuo en la sociedad?

21.6

Supongamos que hay tres individuos en la sociedad que intentan clasificar tres estados sociales (*A, B* y *C*). Por cada método de elección social indicado, desarrolle un ejemplo para demostrar que se violará, cuando menos, uno de los axiomas de Arrow.

a. Regla de la mayoría sin intercambio de votos.

b. Regla de la mayoría con intercambio de votos.

c. Votación por puntos en la cual cada votante puede dar 1, 2 o 3 puntos a cada alternativa, seleccionándose la alternativa con el mayor número de puntos.

21.7

Supongamos que los individuos tienen una probabilidad u de estar desempleados el año próximo. Si están desempleados recibirán una prestación por desempleo de b, mientras que si tienen empleo recibirán $w(1 - t)$, donde t es el impuesto empleado para financiar la prestación por desempleo. La prestación por desempleo está limitada por la restricción del presupuesto del gobierno $ub = tw(1 - u)$.

a. Supongamos que la función de utilidad del individuo está dada por

$$U = (y_i)^\delta/\delta,$$

donde $1 - \delta$ es el grado de aversión relativa constante al riesgo. ¿Cuáles serían las elecciones de b y t que maximizan la utilidad?

b. ¿Estas elecciones de b y t cómo responderían a variaciones de la probabilidad de estar desempleado, u?

c. ¿Cómo reaccionarían b y t a variaciones del parámetro de aversión al riesgo δ?

21.8

La demanda de osos de peluche está dada por

$$Q = 200 - 100p,$$

y los peluches se producen a un costo marginal constante de \$0.50.

a. ¿Qué cantidad de sobornos estará dispuesto a pagar la empresa Sweettooth para que el gobierno le entregue la concesión del monopolio para producir osos de peluche?

b. ¿Los sobornos representan un costo de bienestar derivado de las actividades para buscar rentas?

c. ¿Esta actividad para buscar rentas qué costo impone al bienestar?

21.9

¿El problema del parásito cómo surge en la decisión de quienes pueden votar? ¿Las decisiones de participación de los votantes cómo podrían afectar los resultados del votante mediano? ¿Cómo podrían afectar los modelos de votación probabilística?

21.10

Supongamos que los votantes basan sus decisiones en la relación de las utilidades recibidas de dos candidatos; es decir, la ecuación 21.6 sería

$$\pi_i = f_i[(U_i(\theta_1)/U_i(\theta_2)].$$

Demuestre que, en este caso, los resultados de un juego que implique las plataformas de valor neto maximizaría la función de bienestar social de Nash

$$BS = \prod_{i=1}^{n} U_i.$$

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Arrow, K. J. *Social Choice and Individual Values,* 2a. ed., Yale University Press, New Haven, CT, 1963.
Enunciado clásico del teorema de la imposibilidad. Amplia explicación de su significado general.

Black, D. "On the Rationale of Group Decision Making", *Journal of Political Economy*, febrero de 1948, pp. 23-34. Reproducido en K. J. Arrow y T. Scitovsky, eds., *Readings in Welfare Economics*, Richard D. Irwin, Homewood, IL, 1969.
Uno de los primeros planteamientos del teorema del "votante mediano".

Buchanan, J. M. y G. Tullock. *The Calculus of Consent*. Ann Arbor, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1962.
Un análisis clásico de las propiedades de distintos planes de votación.

Drazen, A. *Political Economy in Macroeconomics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.
Considera una serie de modelos de toma de decisiones para las políticas macroeconómicas.

Inman, R. P. "Markets, Governments and the 'New' Political Economy". En A. J. Auerbach y M. Feldstein, eds., *Handbook of Public Economics*, vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 647-777.
Amplia reseña de la literatura reciente sobre los temas abordados en este capítulo. Interesante aplicación de la teoría de juegos para ilustrar algunos conceptos. Buena explicación del papel teórico de las previsiones para limitar los impuestos.

Mueller, D. *Public Choice II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
Amplía el análisis de la votación probabilística que hemos visto en este capítulo y considera de manera explícita las aportaciones políticas y una serie de cuestiones más.

Olson, M. *The Logic of Collective Action*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1965.
Analiza los efectos que los incentivos individuales tienen en la disposición para emprender una acción colectiva. Contiene muchos ejemplos fascinantes.

Persson, T. y G. Tabellini. *Political Economics: Explaining Economic Policy*, MIT Press, Cambridge, MA, 2000.
Resumen muy completo de modelos recientes de las elecciones políticas. Cubre los modelos de votación y otros asuntos de los marcos institucionales.

Rawls, J. *A Theory of Justice*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1971.
Texto filosófico básico. Emplea de manera amplia conceptos económicos, sobre todo nociones de la eficiencia de Pareto y de la curva del contrato.

Sen, A. K. *Collective Choice and Social Welfare*, Holden-Day, San Francisco, 1970.
Análisis formal, muy completo, de cuestiones relativas a las elecciones colectivas. Tiene muchas secciones de texto entre los análisis matemáticos.

AMPLIACIONES

Sistemas de votación

En el capítulo 21 hemos visto que hay muy poca relación entre los resultados de una votación para los bienes públicos, sujeta a la regla de la mayoría, y la resolución del problema de revelar la demanda planteado en el capítulo 20. Los sistemas de votación más comunes no transmiten información suficiente sobre las preferencias de los votantes como para permitir la aplicación de un resultado eficiente, como el que considera el equilibrio de Lindahl. En estas ampliaciones hablamos de los sistemas de votación complejos que se acercan más al ideal de Lindahl. Sin embargo, el interés por estos sistemas es principalmente teórico. Su aplicación práctica requeriría muchos recursos.

A21.1 Subastas de Vickrey

Muchos sistemas de votación parten de las ideas que W. Vickrey planteara, por primera vez, en su famoso artículo sobre las subastas selladas con segundo precio[1] (1961). La principal idea de Vickrey era que las subastas selladas en las que gana la persona que hace la mejor oferta, pero pagando la cantidad de la segunda oferta más alta, ofrecían incentivos a los participantes en la oferta para revelar valor verdadero que daban al bien vendido. Consideremos al oferente i, que recibirá una utilidad u_i de un bien. Con una subasta sellada típica en la que se paga la oferta más alta, esta persona podría ofrecer $b_i < u_i$ con la esperanza de ganar la subasta y obtener un excedente de $u_i - b_i$. Por tanto, la persona i tiene un incentivo para no revelar su verdadera valoración. Sin embargo, con una subasta sellada de segundo precio, la mayor oferta de los demás,[2] $b_{(-i)}$, es exógena a la persona i. Si $u_i < b_{(-i)}$, la persona i puede ofertar $b_i = u_i$ y perderá la subasta, en cuyo caso está maximizando su utilidad. Si $u_i > b_{(-i)}$ esta persona puede ofertar $b_i = u_i$ no obstante, ganar la subasta, obteniendo una ganancia neta de $u_i - b_{(-i)}$. En los dos casos, el incentivo de la persona i es hacer una oferta verdadera: la subasta sellada de segundo precio de Vickrey "revela la verdad".

[1]Encontrará más detalles sobre las matemáticas de estas subastas en el problema 15.10.

[2]La notación $(-i)$ significa todos los miembros de un grupo menos el miembro i.

A21.2 El mecanismo de Groves

En un importante artículo de 1973, T. Groves propuso una forma de adoptar la idea de Vickrey al problema de descubrir la demanda de un bien público. Según el sistema de Groves, se pediría a cada votante que revelara su valoración neta (beneficios menos impuestos, por lo cual pueden ser valoraciones negativas) de una combinación de bien público y plan de financiación. Sin embargo, también se ofrecería a cada votante una transferencia cuidadosamente calculada para garantizar que tuviera un incentivo para revelar sus verdaderas valoraciones netas. Para ilustrar este pago, supongamos que sólo hay un bien público sujeto a la votación y que el valor neto de este bien, reportado por el votante i, está dado por v_i. Se ha prometido a cada votante una transferencia directa de monto $t_i = \sum_{-i} v_i$ (que podría ser negativa) si se emprende el proyecto y de 0 en caso contrario. Es decir, se ofrece a cada votante una transferencia que será igual a la suma de las valoraciones anunciadas por todos los demás votantes, pero la transferencia sólo será pagada si se emprende el proyecto.

El problema del votante i consiste en elegir la valoración neta que va a declarar de tal forma que sólo se emprenda el proyecto si, y sólo si $u_i + \sum_{-i} v_i > 0$. Pero cada votante también sabe que el gobierno sólo emprenderá el proyecto si, y sólo si, $\sum_i v_i > 0$. Por tanto, elegir $v_i = u_i$ es, cuando menos, una opción para declarar una valoración que, según resulta, maximiza la utilidad. Dado que esta estrategia es la dominante en el caso de cada votante, el mecanismo de Groves revelará la verdad para todos los votantes.

A21.3 El mecanismo de Clarke

El procedimiento de Groves establece las bases para muchos otros sistemas de votación. Podemos generalizar este procedimiento al sumar a la transferencia original de Groves algún otro tipo de impuesto o transferencia, independiente del proceso de revelación de la valoración del votante *i*. Podemos analizar así un sistema propuesto anteriormente por E. Clarke (1971). Con este sistema, la transferencia de Groves va acompañada de un impuesto basado también en las valoraciones de los demás votantes. Este impuesto se fija de forma que sea igual a $Max(\sum_{-i} v_i, 0)$. Es decir, el impuesto es igual a la suma de las valoraciones de los demás votantes si esa suma es positiva, y 0 en caso contrario. Este sistema combinado de impuesto y transferencia en dos partes tiene propiedades interesantes. En primer término, este proceso también revelará la verdad, porque la suma del impuesto no altera la naturaleza de revelación de la verdad de la transferencia de Groves. En segundo, el sistema de Clarke asigna un papel interesante a los votantes "pivote". Un votante pivote es aquel que ofrece una valoración que modifica la decisión sobre un proyecto. En el caso de los votantes que no son pivote, la combinación de la transferencia y el impuesto del sistema de Clarke es cero. Por ejemplo, supongamos que las valoraciones combinadas del grupo $(-i)$ son muy positivas, por lo cual el proyecto será emprendido independientemente de lo que reporte el votante *i* (recuerde, sin embargo, que lo que reporte este votante será verdad debido a la transferencia de Groves). En este caso, la transferencia de Groves y el impuesto inspirado en Clarke se cancelarían, dando un resultado neto de la transferencia y el impuesto igual a cero. Si la valoración combinada del grupo $(-i)$ es tan negativa que no puede ser alterada por el votante *i*, el proyecto no será emprendido y tanto la transferencia de Groves como el impuesto de Clarke serán cero. Cuando el votante *i* es pivote, siempre paga un impuesto, y éste es muy similar al impuesto piguviano en tanto que compensa la externalidad que el votante *i* causa al grupo $(-i)$ al revertir la valoración colectiva. Por ejemplo, supongamos que $\sum_{-i} v_i$ es negativo, pero que $\sum_{i} v_i$ es positivo. En este caso se creará el proyecto y el votante *i* recibirá una transferencia negativa de Groves de $\sum_{-i} v_i$ y un impuesto de Clarke, nulo. Es decir, en este caso el votante paga un impuesto igual a las valoraciones negativas combinadas que los votantes del grupo $(-i)$ experimentan debido a que el proyecto es emprendido de hecho. El pago del votante *i* compensa la externalidad negativa que provoca su voto pivote. Un impuesto análogo es pagado cuando la valoración negativa del votante *i* hace que no se construya el proyecto a pesar de que, en total, es favorecido por el grupo $(-i)$. Por tanto, el mecanismo de Clarke refleja ideas muy similares a las de los impuestos piguvianos.

A21.4 Generalizaciones

Podemos generalizar en muchas direcciones los sistemas de votación que acabamos de describir (que, a veces, se conocen como *mecanismos VCG* empleando las siglas de los nombres de sus tres principales descubridores). Por ejemplo, Mas-Colell, Whinston y Green (1995) resumen las formas que permiten adoptar el planteamiento VCG para evaluar muchos posibles proyectos públicos o cómo podemos emplear distintos conceptos de equilibrio para obtener resultados más sólidos. Otros autores han analizado las propiedades asintóticas de los mecanismos VCG y concluyen que la existencia de votantes pivote tiende a cero cuando aumenta el número de votantes. No obstante, un supuesto implícito que hemos empleado en estas ampliaciones, al parecer, no se puede generalizar. Se trata del concepto de que los distintos impuestos y transferencias del planteamiento VCG se pueden sumar simplemente a la utilidad (indirecta) que derivan los votantes de un proyecto sin afectar otras asignaciones del presupuesto.[3] Queda abierta la pregunta para saber si estos supuestos sobre las preferencias ofrecen o no una aproximación bastante buena como para crear modelos de las decisiones políticas reales.

Bibliografía

Clarke, E. "Multipart Pricing of Public Goods", *Public Choice*, otoño de 1971, pp. 19-33.

Groves, T. "Incentives in Teams", *Econometrica*, julio de 1973, pp. 617-631.

Mas-Collell, A., M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Nueva York, 1995.

Vickrey, W. "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance*, enero de 1961, pp. 1-17.

[3]Técnicamente, se supone que la utilidad es "cuasi-lineal" porque $u_i = U_i(c) + g_i + t_i$ donde c es el consumo, g_i representa los beneficios del proyecto y t_i representa los impuestos pagados o las transferencias recibidas.

Respuestas breves a las preguntas

Las siguientes respuestas breves a las preguntas que acompañan cada uno de los ejemplos de este libro ayudarán al lector a comprobar si han comprendido los conceptos que se presentan en él.

CAPÍTULO 1

1.1

Si el precio depende de la cantidad, entonces sería más complicado diferenciar $p(q) \cdot q$. Ello nos llevaría al concepto del ingreso marginal, tema que se encontrará en muchos puntos de este libro.

1.2

La forma reducida de la ecuación 1.16 muestra que $\partial p^*/\partial a = 1/225$. Por tanto, si a aumenta 450, p^* debería aumentar 2, tal como muestra la solución directa.

1.3

Si $x = 9.99$, $y = 5.040$; si $x = 10.01$, $y = 4.959$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0.081}{0.02},$$

que se aproxima a –4. Los resultados de los cálculos sólo se deben aproximar mediante cambios discretos.

CAPÍTULO 2

2.1

La condición de primer orden para un máximo es $\partial\pi/\partial l = 50/\sqrt{l} - 10 = 0$, $l^* = 25$, $\pi^* = 250$.

2.2

No sólo la función exponencial (o una función que la aproxime dentro de una banda) tiene elasticidad constante.

2.3

Serían círculos concéntricos, con centro en $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Para $y = 10$, el "círculo" es un solo punto.

2.4

En el caso de distintas constantes, cada frontera de posibilidades de producción es un cuarto de la elipse cada vez más grande y con centro en el origen.

2.5

$\partial y^*/\partial b = 0$ porque siempre se fijaría x_1 en b para alcanzar el óptimo, y el término $(x_1 - b)$ desaparecería.

2.6

Con $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.5$. Ahora $y^* = 9.5$. Para $x_1 + x_2 \geq 3$, es posible alcanzar el óptimo sin restricciones.

2.7

Un campo circular encierra el área máxima del perímetro mínimo. Para demostrarlo será necesario un argumento límite.

2.8

En este caso, el máximo local también es el máximo global. La constancia de la segunda derivada implica que la pendiente de la función disminuye a tasa constante.

2.9

Esta función luce como un cono invertido que sólo tiene un punto máximo.

2.10

Una restricción lineal quedaría representada mediante un plano en estas figuras tridimensionales. Tal plano tendría una sola tangencia con las superficies de las figuras 2.4(a) y 2.4(c). Sin embargo, en el caso de un máximo sin restricciones, el plano sería horizontal, por tanto sólo la figura 2.4(a) tendría un máximo.

2.11

Esta transformación no conservaría la homogeneidad. Sin embargo, no afectaría el intercambio entre las x: para una constante cualquiera, k, $-f_1/f_2 = x_2/x_1$.

CAPÍTULO 3

3.1

En este caso, la derivación mantiene la utilidad constante con el objeto de crear una relación implícita entre y y x. Las variaciones en x también cambian implícitamente en y debido a su relación (ecuación 3.11).

3.2

En los ejemplos 1 y 3, la duplicación no cambia la *TMS*. En el ejemplo 2, la *TMS* cambiaría porque $(1 + x)/(1 + y) \neq (1 + 2x)/(1 + 2y)$.

3.3

En el caso de funciones homotéticas, la *TMS* es la misma para todos los puntos que se encuentran a lo largo de una línea recta de pendiente positiva que pasa por el origen.

3.4

En este caso, las curvas de indiferencia son "paralelas en el plano horizontal". Es decir, para un nivel cualquiera de y, la *TMS* es la misma, independientemente del valor de x. Una implicación de lo anterior (como se verá en el capítulo 4) es que el ingreso adicional no tiene efecto alguno en las compras del bien y; es decir, todo el ingreso extra es canalizado al bien que tiene una utilidad marginal constante (bien x).

CAPÍTULO 4

4.1

Las fracciones constantes implican que $\partial x/\partial p_y = 0$ y $\partial y/\partial p_x = 0$. Nótese que p_y no aparece en la ecuación 4.23 y que p_x no aparece en la 4.24.

4.2

El ingreso no afecta las fracciones del presupuesto, pero los cambios de los precios relativos sí las afectan. Esto ocurre en el caso de todas las funciones homotéticas.

4.3

Dado que la duplicación de todos los precios y del ingreso nominal no cambia la restricción del presupuesto, tampoco cambiará la utilidad. La utilidad indirecta es homogénea de grado cero en todos los precios y el ingreso nominal.

4.4

En el caso de Cobb-Douglas, con $p_y = 3$, $E(1,3, 2) = 2 \cdot 1 \cdot 3^{0.5} \cdot 2 = 6.93$, por tanto habría que reducir una suma única de 1.07 al ingreso de esta persona para poder compensar la reducción de los precios. En el caso de las proporciones fijas, el paquete de consumo original ahora cuesta 7, de modo que la compensación será –1.0. Nótese que con proporciones fijas el paquete de consumo no cambia, pero con la Cobb-Douglas, la nueva opción es $x = 3.46$, $y = 1.15$ porque esta persona aprovecha la disminución del precio de y.

CAPÍTULO 5

5.1

Las partes de las ecuaciones calculadas a partir de las ecuaciones 5.5 o 5.7 demuestran que este individuo siempre gasta todo su ingreso, independientemente de p_x, p_y e I. Es decir, las partes suman uno.

5.2

Si $x = 0.5\ I/p_x$, $I = 100$, $p_x = 1$ implica que $x = 50$. En la ecuación 5.11, también $x = 0.5(100/1) = 50$. Si p_x aumenta a 2.0, la Cobb-Douglas prevé que $x = 25$. La CES implica que $x = 100/6 = 16.67$. La CES es más sensible al precio.

5.3

Dado que los cambios proporcionales de p_x y p_y no inducen efectos sustitución, mantener V constante implica que x y y no variarán. Esto resultará válido para todas las funciones de demanda compensada.

5.4

Un exponente más alto de, por decir, x en la función Cobb-Douglas aumentará la parte del ingreso destinada a ese bien y aumentará la importancia relativa del efecto ingreso en la descomposición de Slutsky.

5.5

Podemos ver esto con más facilidad en el caso de Cobb-Douglas, donde $e_{x,p_x} = -1$ independientemente de las partes del presupuesto. La ecuación de Slutsky en términos de elasticidad muestra que en este caso, debido al efecto ingreso, es $-s_x e_{x,I} = -s_x(1) = -s_x$, la elasticidad precio compensado es $e^c_{x,\,p_x} = e_{x,\,p_x} + s_x = -(1 - s_x)$. Esto ocurre porque los cambios proporcionales en la demanda de x serán mayores cuando la fracción destinada a ese bien sea más pequeña porque están partiendo de una base más pequeña.

5.6

Por lo general, se supone que la demanda llega a cero en un precio finito dado cuando se calcula el total del excedente del consumidor. El supuesto específico planteado no afecta los cálculos de las variaciones del excedente del consumidor.

CAPÍTULO 6

6.1

Dado que $\partial x/\partial p_y$ incluye el efecto sustitución y el efecto ingreso, esta derivada podría ser igual a 0 si los efectos se cancelan entre sí. La conclusión de que $\partial x/\partial p_y = 0$ implica que los bienes deben ser usados en proporciones fijas sólo sería válida si el efecto ingreso de esta variación del precio fuera igual a 0.

6.2

La asimetría se puede presentar con preferencias homotéticas dado que, a pesar de que los efectos sustitución sean simétricos, los efectos ingreso pueden tener una magnitud distinta.

6.3

Dado que las relaciones entre p_y, p_z y p_h no cambian nunca, el problema de maximización siempre será resuelto de la misma manera.

CAPÍTULO 7

7.1

Ahora con $k = 11$

$$q = 72\,600l^2 - 1\,331l^3$$
$$PMg_l = 145\,200l - 3\,993l^2$$
$$PP_l = 72\,600l - 1\,331l^2.$$

En este caso, PMg_l ahora llega a su valor máximo en $l = 27.3$ y no en $l = 30$.

7.2

Si $k = l$, dado que k y l entran en f de manera simétrica, $f_k = f_l$, $f_{kk} = f_{ll}$. Por tanto, el numerador de la ecuación 7.21 será negativo si $f_{kl} > f_{ll}$. Si se combinan las ecuaciones 7.24 y 7.25 (y recordando que $k = l$) muestra que esto es válido para $k = l < 20$.

7.3

La isocuanta $q = 4$ contiene los puntos $k = 4$, $l = 0$; $k = 1$, $l = 1$; y $k = 0$, $l = 4$. Por tanto, es pronunciadamente convexa. Al parecer, se podría llegar a una isocuanta con forma de L en el caso de coeficientes particulares de los términos lineales y radicales.

7.4

Dado que el factor compuesto técnico de cambio es $\theta = \alpha\phi + (1 - \alpha)\varepsilon$, un valor de $\alpha = 0.3$ implica que las mejoras técnicas del trabajo tendrán mayor peso cuando se determine el resultado global.

CAPÍTULO 8

8.1

Si $\sigma = 2$, $\rho = 0.5$, $k/l = 16$, $l = 8/5$, $k = 128/5$, $C = 96$.

Si $\sigma = 0.5$, $\rho = -1$, $k/l = 2$, $l = 60$, $k = 120$, $C = 1080$.

Nótese que las variaciones de σ también cambian la escala de la función de producción, de modo que las cifras totales de costos no se pueden comparar de manera directa.

8.2

La expresión de los costos unitarios es $(v^{1-\sigma} + w^{1-\sigma})^{1/1-\sigma}$. Si $w + v$ es constante y $\sigma = 0$, entonces los costos relativos de los factores no hacen diferencia alguna para el costo unitario. En el caso de valores más altos de σ, las disparidades más grandes de los costos de los factores llevan al ahorro de costos debido a la posibilidad de sustituir los factores.

8.3

Las elasticidades están dadas por los exponentes de las funciones de costos y los cambios técnicos no las afectan en los modelos presentados aquí.

8.4

En este caso $\sigma = \infty$. Con $w = 4v$, la minimización de costos podría utilizar los factores en una combinación cualquiera (para q constante) sin modificar los costos. Un aumento de w provocaría que la empresa optara por usar tan sólo capital y no afectaría el total de costos. Esto muestra que el efecto que un incremento del precio de un solo insumo tiene en los costos depende en gran medida del grado de sustitución.

8.5

Dado que los costos de capital son fijos a corto plazo, no afectan los costos marginales a corto plazo (en términos matemáticos, la derivada de una constante es cero). Sin embargo, los costos de capital afectan los costos promedio a corto plazo. En la figura 8.9, un aumento de v desplazaría *CMg*, *CP*, y todas las curvas de *TCMgcp* hacia arriba, pero no afectaría las curvas de los *CMgcp*.

CAPÍTULO 9

9.1

Si $CMg = 5$, para maximizar las utilidades se requiere que $q = 25$. Ahora $P = 7.50$, $R = 187.50$, $C = 125$ y $\pi = 62.50$.

9.2

Otros factores, además de p pueden ser incorporados al término constante a. Estos desplazarían D e IMg pero no afectarían los cálculos de la elasticidad.

9.3

Cuando w aumenta a 15, la oferta se desplaza hacia dentro a $q = 8P/5$. Cuando k incrementa a 100, la oferta se desplaza hacia fuera a $q = 25P/6$. Una variación en v no afectaría el costo marginal a corto plazo ni la decisión de cerrar.

9.4

Una variación de v no tiene efecto alguno en *CMgcp* pero sí afecta los costos fijos. Una variación de w afectaría los *CMgcp* y la oferta a corto plazo.

9.5

Un aumento de los salarios para todas las empresas desplazaría la curva de oferta del mercado hacia dentro, incrementando el precio del producto. Esto provocaría que cada empresa produjera más de lo que produciría con un precio constante. Por tanto, el efecto de la producción en la demanda de trabajo sería un poco inferior al efecto de la producción analizado en el ejemplo. No obstante, el efecto sustitución y el efecto producción serían negativos

CAPÍTULO 10

10.1

La capacidad para sumar ingresos en este caso lineal requeriría que cada persona tuviera el mismo coeficiente para el ingreso. Dado que cada persona afronta el mismo precio, la agregación sólo requiere sumar los coeficientes del precio.

10.2

Un valor de β que no sea 0.5 significaría que el exponente del precio no sería 1.0. Cuanto más alta sea β tanto más elástica al precio será la oferta a corto plazo.

10.3

Esto requeriría hacer que la curva de la demanda fuera más plana. Por ejemplo, la curva de demanda $Q = 16\,000 - 1000P$ tiene los mismos valores iniciales de equilibrio ($P^* = 12$, $Q^* = 4000$) que en el problema original. No obstante, con la reducción de la oferta, el equilibrio ahora será $P^* = 12.63$, $Q^* = 3368$.

10.4

Siguiendo pasos similares a los que usamos para derivar la ecuación 10.36 tendremos

$$e_{P,\beta} = \frac{-e_{Q,\beta}}{e_{S,P} - e_{Q,P}}$$

En este caso $e_{Q,\beta} = e_{Q,w} = -0.5$ de modo que

$$e_{P,\beta} = \frac{-(-0.5)}{2.2} = 0.227.$$

La multiplicación por 0.20 (dado que los salarios aumentaron 20%) prevé un aumento de precio del 4.5%, cifra muy próxima a la de este ejemplo.

10.5

La curva de oferta a corto plazo está dada por $Q_S = 0.5P + 750$, y el precio de equilibrio a corto plazo es \$643. Cada empresa gana alrededor de \$2960 por concepto de utilidades a corto plazo.

10.6

Los costos totales y medios de la ecuación 10.59 exceden a los de la ecuación 10.46 para $q > 15.9$. Los costos marginales de la ecuación 10.59 siempre excederán a los de la ecuación 10.46. La producción óptima es más baja con la ecuación 10.59 que con la ecuación 10.46 porque los costos marginales aumentan más que los costos promedio.

CAPÍTULO 11

11.1

Las pérdidas derivadas de una restricción dada de la cantidad serán más altas cuando la oferta y/o la demanda son menos elásticas. El agente que tenga la respuesta menos elástica cargará con una fracción más grande de la pérdida.

11.2

Un incremento de t inequívocamente incrementa la pérdida de peso muerto. Sin embargo, dado que los incrementos de t disminuyen la cantidad, el total de ingresos fiscales está sujeto a los efectos de contrapeso. De hecho, si $t/(P + t) \geq -1/e_{Q,P}$ entonces $dtQ/dt < 0$.

11.3

El total de transferencias a los productores nacionales es (en miles de millones) $0.5 \cdot (11.7) + 0.5(0.5)(0.7) = 6.03$. Esto se ganaría en forma de rentas para esos factores que dan a la curva de oferta de automóviles su pendiente positiva. Con una cuota, los productores nacionales también podrían ganar una fracción de lo que habrían sido ingresos de los aranceles.

CAPÍTULO 12

12.1

Un aumento del factor trabajo desplazará la primera frontera de forma uniforme. En el segundo caso, este aumento desplazaría la intersección de y más hacia fuera que la intersección de x porque el bien y hace uso intensivo del trabajo.

12.2

En los tres escenarios, el valor total de la producción es $200t$, una mitad de la cual son salarios y la otra mitad utilidades. Con la variación de la oferta, los consumidores siguen dedicando $100w$ a cada bien. La cantidad que compran de x es el doble que la de y porque éste cuesta el doble que aquél. Con una variación de la demanda, el consumidor destina $20t$ al bien x y $180t$ al bien y. Sin embargo, ahora el bien y cuesta el triple que él x, de modo que los consumidores compran el triple de y que de x.

12.3

La ley de Walras garantiza que el mercado de la plata esté en equilibrio. Si se recalcula la ecuación 16.40 tendremos

$$ED_1 = 2(p_2/p_1)^2 + 2(p_3/p_1)^2 - 4p_2/p_1 - 7p_3/p_1$$

o, a los precios nuevos relativos,

$$= 2(3)^2 + 2(2)^2 - 4(3) - 7(2) = 0.$$

12.4

Dado que cada función de producción muestra rendimientos de escala constantes, toda asignación del capital será eficiente si el trabajo es asignado correctamente.

12.5

El ingreso total del consumidor es $300t$ el cual es asignado a partes iguales a cada bien. Las empresas que producen el bien y obtienen este ingreso total ($150t$). Las empresas que producen el bien x reciben ingresos por tan sólo $50t$ porque pagan $100t$ al gobierno por concepto de impuestos. En el caso de estas empresas, el ingreso total (después de impuestos) es $p_x \cdot x = 50t$. No obstante, el gasto del consumidor en el bien x es $3p_x \cdot x = 150t$. En este caso, el PIB seguirá siendo $200t - 50t$ de la producción de x y $150t$ de la producción de y. Hay $100t$ que corresponden a impuestos y transferencias, pero esta cifra no forma parte del PIB.

12.6

En este caso, las curvas de indiferencia son relativamente planas, lo cual indica que estos individuos están muy dispuestos a sustituir un bien por el otro. Esta flexibilidad implica que en el punto A hay una banda relativamente estrecha de oportunidades para el intercambio que sean beneficiosas para las dos partes. Con preferencias menos flexibles, la cantidad de oportunidades aumenta debido a que los individuos empezarían el intercambio con tasas de sustitución marginales muy distintas.

CAPÍTULO 13

13.1

El aumento de los costos fijos no modificaría las decisiones del nivel de producción, porque no afectaría los costos marginales. Sin embargo, incrementaría los *CP* en 5 y reduciría las utilidades a 12 500. Con esta nueva función de C, los *CMg* aumentarían a $0.15Q$. En este caso, $Q^* = 400$, $P^* = 80$, $C = 22\,000$ y $\pi = 10\,000$.

13.2

Con $e = -1.5$, la proporción del monopolio al excedente del consumidor en competencia será 0.58 (ecuación 13.18). Las utilidades representan 19% del excedente del consumidor en competencia (ecuación 13.20).

13.3

Si $Q = 0$, $P = 100$. El total de utilidades está dado por el área triangular entre la curva de la demanda y la curva de *CMg*, menos los costos fijos. Esta área es 0.5 (100)(666) = 33 333. De modo que $\pi = 33\,333 - 10\,000 = 23\,333$.

13.4

Sí, el nivel de producción es el mismo, porque las curvas de los ingresos marginales también son lineales. Dado que la producción no se expande en razón de la política de dos precios, esta política no puede incrementar el bienestar.

13.5

Maximizaríamos las utilidades estableciendo el precio marginal igual a los *CMg* en cada mercado y cobrando una cuota de ingreso de 36 en el mercado 2 y de 162 en el mercado 1.

CAPÍTULO 14

14.1

Con $q_2 = 40$, la demanda residual que afronta la empresa 1 es $q_1 = 80 - P$. Luego entonces, $IMg = 80 - 2q_1$ por lo cual $q_1 > 40$, $IMg < 0$. Queda claro que, en el caso de esta inquietante decisión, lo que importa es el ingreso marginal y no el precio.

14.2

En el ejemplo 14.1, supusimos que q_2 era constante. Ahora, suponemos que la empresa 2 responde a los incrementos de producción de la empresa 1 reduciendo su propia producción.

14.3

Los costos marginales constantes no modificarían la naturaleza del problema. El costo marginal creciente llevaría a las empresas hacia una repartición de fracciones más iguales del mercado que la que resultaría de las interacciones estratégicas del caso de los costos constantes.

14.4

La eficiencia requiere que $P = CMg = CP$ salvo que los bienes diferenciados exhiban poca posibilidad de sustitución.

14.5

El excedente del consumidor es lo más grande posible dada la restricción de la ausencia de subsidios. El fijar los precios de los costos marginales ($P = 100$) incrementaría el excedente del consumidor, pero requeriría un subsidio para cubrir costos fijos por un monto de $8000.

CAPÍTULO 15

15.1

Ninguna de las estrategias es dominante. Las vacaciones por separado no son equilibrios de Nash porque ambos cónyuges tienen un incentivo para cambiar.

15.2

Habiendo estrategias mixtas, la utilidad esperada es de dos tercios para cada jugador, cifra inferior a la que prometen los otros dos equilibrios de Nash. Este no sería un resultado de la cooperación.

15.3

Véase el ejemplo 15.4.

15.4

$\delta > 0.93$ implica una tasa de interés, de un periodo, inferior al 7%. Tratándose de periodos de días, semanas o meses, esta tasa resulta bastante probable.

15.5

Cuanto más alto sea δ, tanto mayor será el valor presente de la participación futura de las utilidades de monopolio. Por lo tanto, las tasas de descuento más altas favorecen la colusión táctica. Si $\delta = 0.8$, entonces cinco empresas, cuando mucho, apoyarán el acuerdo de colusión. Si $r = 0.10$, un máximo de hasta 10 empresas se coludirán tácitamente.

15.6

Seguidor que repite. Siempre que una empresa elige a un líder, las represalias podrían imponer estrategias de seguidor.

15.7

Si A no goza de la ventaja de ser la primera en jugar, la situación de las dos empresas es simétrica y el modelo vuelve al caso de Stackelberg. En este caso, el análisis es distinto del caso de disputabilidad debido al supuesto de los costos a fondo perdido.

15.8

La demanda lineal y los costos marginales dan por resultado q_A^* como función lineal de q_{BH}^* y q_{BL}^*, que a su vez son funciones lineales del costo marginal de B. Con una demanda no lineal o, más importante aún, con costos marginales no lineales, q_A^* no estaría basado necesariamente en $E(CMg_B)$.

15.9

Sí, un precio a reserva cambiaría las estrategias de las ofertas para ir aumentando las posturas siempre y cuando R (precio a reserva) $< V_A, V_B$.

CAPÍTULO 16

16.1

El ingreso extra laboral permite que el individuo pueda "comprar" ocio, pero la cantidad que pueda comprar dependerá de la posibilidad de sustituir trabajo por ocio.

16.2

La conclusión no depende de la linearidad. Siempre y cuando las curvas de oferta y de demanda tengan forma convencional, los parámetros t y k provocarán el desplazamiento vertical de las curvas.

16.3

Ahora IMP = \$30 por hora. En este caso, el monopsonio contrataría a 750 trabajadores y los salarios serían de \$15 por hora. Al igual que antes, el salario representará tan sólo la mitad del IMP.

16.4

El monopsonista quiere estar en su curva de demanda de trabajo; el sindicato quiere estar (presuntamente) en la curva de oferta de trabajo de sus miembros. El equilibrio de la oferta y la demanda ($l = 583$, $w = 11.67$) es lo único que cumple con estas dos curvas. La posibilidad de que éste sea o no un equilibrio de Nash dependerá, entre otras cosas, de que el sindicato defina que la curva de oferta de trabajo refleje debidamente o no sus réditos.

16.5

Si la empresa es neutral al riesgo, con trabajadores que sienten aversión al riesgo, los contratos óptimos podrían tener salarios más bajos a cambio de un ingreso más estable.

CAPÍTULO 17

17.1

Si δ es igual para los dos individuos, pero si el individuo 1 puede obtener una tasa de interés más alta que el 2, entonces 2, $U'(c_0)/U'(c_1)$ también será más alta para el individuo 1 que para el 2. Luego entonces, c_0/c_1 será más bajo para el individuo 1 que para el 2.

17.2

Con una tasa de inflación del 10%, el valor nominal del árbol aumentaría a 10% adicional por año. No obstante, sería necesario descontar una cantidad idéntica a estos ingresos para poder calcular las utilidades reales de modo que la edad óptima para talar no cambiara.

17.3

Elevaría la senda del precio óptimo tan sólo en la magnitud del costo de la extracción marginal.

CAPÍTULO 18

18.1

Si $ln\ x_i = 2^i$, la paradoja se regeneraría.

18.2

Con una utilidad lineal, el individuo tan sólo se interesaría por los valores esperados de dólares y le sería indiferente comprar o no un seguro actuarialmente justo. Cuando la utilidad U es una función convexa de la riqueza ($U > 0$, $U'' > 0$), el individuo prefiere jugársela y comprar un seguro sólo si los costos están por debajo de los que se justificarían actuarialmente.

18.3

Si $A = 10^{-4}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{CE(\#1)} &= \mathbf{107\,000 - 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot (10^4)^2} \\ &= \mathbf{102\,000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{CE(\#2)} &= \mathbf{102\,000 - 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^6} \\ &= \mathbf{101\,800.} \end{aligned}$$

De modo que prefiere la asignación más arriesgada. De otra parte, si $A = 3 \cdot 10^{-4}$, entonces prefiere la asignación menos arriesgada.

18.4

La disposición a pagar está en función decreciente de la riqueza (ecuación 18.44). Con $R = 0$ pagará 50 para evitar una apuesta de 1000 si $W_0 = 10\,000$, pero sólo 5 si $W_0 = 100\,000$. Con $R = 2$ pagará 149 para evitar una apuesta de 1000 si $W_0 = 10\,000$, pero sólo 15 si $W_0 = 100\,000$.

18.5

El precio actuarialmente justo de esta póliza es $0.25 \cdot 19\,000 = 4750$. El monto máximo que el individuo pagaría (X) resuelve la ecuación

$$\begin{aligned} \mathbf{11.45714} &= \mathbf{0.75\ ln(100\,000 - x)} \\ &\quad \mathbf{+\ 0.25\ ln\ (99\,000 - x).} \end{aligned}$$

La solución nos dará un valor aproximado de x = \$5120. Esta persona estaría dispuesta a pagar un máximo de \$370 por concepto de costos administrativos en el caso de la póliza con un deducible.

CAPÍTULO 19

19.1

Si bien el precio es incierto, en este caso el modelo permite que el individuo compre más y cuando encuentra un precio bajo y menos cuando encuentra uno alto. Dado que V es una función convexa de p_y, la media de V para dos valores distintos de p_y excede al valor de V en la media de p_y. Esto no tiene relación alguna con la aversión al riesgo, que sólo se refiere a la posibilidad de elegir entre opciones que tienen el mismo valor esperado.

19.2

El seguro ahora cuesta \$5300 sin alarma y \$3300 con alarma. La utilidad con seguro y sin alarma es $ln(94\ 700) = 11.4589$ de modo que el individuo prefiere instalar la alarma y no comprar un seguro.

19.3

Si suponemos que las compañías sólo ofrecen pólizas de cobertura total, tendremos que determinar el valor de x en el cual $ln\ (97\ 000 - x) = 11.4794$ (el valor de utilidad para los individuos que corren poco riesgo y no tienen seguro). La solución de esta ecuación es $x = 297$. Para encontrar lo que podría costar un certificado falsificado (y), se utiliza

$$ln(97\ 000 - y) \leq 11.4616$$

(la utilidad de la cobertura total con una póliza para gran riesgo). La solución de esta desigualdad es $y \geq 2\ 003$.

19.4

En este caso, los propietarios tendrían que tratar de inferir el uso indebido del avión con base en las utilidades observadas. Esto requeriría una inferencia bayesiana y podríamos crear un modelo empleando un planteamiento tipo "administrador".

19.5

$m'(a)$ representa el cambio marginal de la proporción costos-beneficios (marginales) de una ligera variación de a. Dado que el parámetro d tiene el propósito de inducir un esfuerzo mayor, cuando mayor sea este efecto marginal, tanto más bajo será el d óptimo, porque es ineficiente inducir al gerente a tomar medidas extremadamente costosas.

CAPÍTULO 20

20.1

La producción de x tendría un efecto beneficioso en y de modo que los mercados en competencia subasignarían trabajo a x.

20.2

El impuesto es relativamente pequeño debido a la naturaleza de la externalidad que se desvanece con tan sólo una reducción relativamente menor de la producción de x. Una empresa fusionada también encontraría que $x = 38\ 000$ es una opción que maximiza las utilidades.

20.3

Las asignaciones separadas de los compañeros de habitación son $x = 1$, $y = 1000$ de modo que llegarían a la asignación eficiente si se movieran juntos. Este resultado se debe a la naturaleza sumatoria de las *TMS* del caso Cobb-Douglas y no podemos esperar que sea válido en términos generales.

CAPÍTULO 21

21.1

En este caso, cada función de utilidad muestra utilidad marginal decreciente. Por tanto, cada adolescente siente aversión al riesgo. Lo único que cambiaría el grado de su aversión al riesgo sería una variación de las funciones de la utilidad que hemos supuesto.

21.2

Un impuesto progresivo incrementaría t^* porque el votante promedio podría obtener más ingresos de los contribuyentes que pagan muchos impuestos, sin contraer costos fiscales altos.

21.3

El candidato 2 también escoge una plataforma óptima utilitaria. Si f_i es diferente de un votante a otro, las estrategias de los candidatos no necesariamente maximizan una función simple cualquiera de las utilidades. Sin embargo, sigue existiendo un equilibrio de Nash.

21.4

Podrían quedar algunas utilidades o tal vez los funcionarios aumentarían el soborno solicitado a $B = \pi_m/\bar{n}$.

Soluciones a problemas impares

A continuación se presentan soluciones breves a muchos de los problemas impares que aparecen en el libro.

CAPÍTULO 2

2.1

a. $8x$, $6y$
b. 8, 12
c. $8xdx + 6ydy$.
d. $dy/dx = -4x/3y$.
e. $x = 1$, $U = (4)(1) + (3)(4) = 16$.
f. $dy/dx = -2/3$.
g. U = línea 16 de contorno es una elipse.

2.3

Los dos planteamientos dan por resultado $x = y = 0.5$.

2.5

a. La condición de primer orden para un máximo es $-gt + 40 = 0$, por tanto $t^* = 40/g$.
b. La sustitución da por resultado $f(t^*) = -0.5g(40/g)^2 + 40(40/g) = 800/g$. Por tanto $\partial f(t^*)/\partial g = -800/g^2$.
c. Esto se debe a que $\partial f/\partial g = -0.5(t^*)^2$.
d. $\partial f/\partial g = -0.5(40/g) = -0.625$, de modo que cada aumento de 0.1 de g disminuye la altura máxima un 0.0625.

2.7

a. Las condiciones de primer orden requieren que $f_1 = f_2 = 1$. Por tanto, $x_2 = 5$. Con $k = 10$, $x_1 = 5$.
b. Con $k = 4$, $x_1 = -1$.
c. $x_1 = 0$, $x_2 = 5$.
d. Con $k = 20$, $x_1 = 15$, $x_2 = 5$. Dado que el valor marginal de x_1 es constante, cada aumento de k más allá de 10, sólo suma a esa variable.

2.9

b. $x_1 = kx_2^{-\beta/\alpha}$
$k = c^{1/\alpha}$
$$\frac{dx_1}{dx_2} < \frac{d^2x_1}{dx_2^2} > 0$$
c. $\alpha + \beta > 1$,
$f_{11} = \alpha(\alpha - 1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}$
$f_{22} = \beta(\beta - 1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2}$
$f_{12} = \alpha\beta x_1^{\alpha-1}\ x_2^{\beta-1}$
$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = \alpha\beta\ (1 - \alpha - \beta)\ x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2} < 0$

CAPÍTULO 3

3.1

a. No
b. Sí
c. Sí
d. No
e. Sí

3.3

La forma de la función de utilidad marginal no necesariamente indica la convexidad de las curvas de indiferencia.

3.5

a. $U(h, b, m, r) = Min(h, 2b, m, 0.5r)$.
b. Un hot dog totalmente condimentado.
c. \$1.60
d. \$2.10; un incremento de 31 por ciento.
e. El precio sólo aumentaría a \$1.725; un incremento del 7.8 por ciento.
f. Incrementar precios de modo que el hot dog con todos los condimentos lleva el precio a \$2.60. Esto sería equivalente a la reducción de una suma única en el poder adquisitivo.

3.7

b. La restricción del presupuesto pasa por $\bar{x}, \bar{y}$.

c. No ocurren intercambios mientras no se llega a $U_0 + k$.

3.9

Luego entonces, como $TSM = UM_x / UM_y \cdot UM_x$ no depende de y o viceversa, 3.1(b) es un ejemplo contrario.

CAPÍTULO 4

4.1

a. $t = 5$ y $s = 2$.

b. $t = 5/2$ y $s = 4$. Cuesta 2 por tanto necesita \$1 extra.

4.3

a. $c = 10$, $b = 3$ y $U = 127$.

b. $c = 4$, $b = 1$ y $U = 79$.

4.5

b. $g = I/(p_g + p_v/2)$; $v = I/(2p_g + p_v)$.

c. Utilidad $= m = v = I/(2p_g + p_v)$.

d. $E = m(2p_g + p_v)$.

4.7

a. $V(p_x, p_y, I) = \alpha^\alpha \beta^\beta I/p_x^\alpha p_y^\beta = \kappa I/p_x^\alpha p_y^\beta$.

b. $E(p_x, p_y, U) = \kappa^{-1} p_x^\alpha p_y^\beta U$.

c. Está claro que $\partial E/\partial p_x$ depende de α.

4.9

a. Establecer $TSM = p_x/p_y$.

b. Establecer $\delta = 0$.

c. Usar $p_x x/p_y y = (p_x/p_y)^{\delta/(\delta - 1)}$

CAPÍTULO 5

5.1

a. $U = x + \frac{8}{3} y$.

b. $x = I/p_x$ si $p_x \leq \frac{8}{3} p_y$

$x = 0$ si $p_x > \frac{8}{3} p_y$.

d. Las variaciones de p_y no afectan la demanda mientras no reviertan la desigualdad.

e. Sólo dos puntos (o líneas verticales).

5.3

a. Es evidente dado que p_x/p_y no cambia.

b. Ningún bien es inferior.

5.5

a. $x = \dfrac{I - p_x}{2p_x}$, $y = \dfrac{I + p_x}{2p_y}$.

Por lo tanto, las variaciones de p_y no afectan x, pero las variaciones de p_x sí afectan y.

b. $V = \dfrac{(I + p_x)^2}{4p_x p_y}$ por tanto $E = \sqrt{4p_x p_y V} - p_x$.

c. La función de la demanda compensada de x depende de p_y, mientras que la función no compensada no dependía de él.

5.7

a. Utilizar la ecuación de Slutsky en su forma de elasticidad. Dado que no hay efectos sustitución, $e_{h,p_h} = 0 - s_h e_{h,I} = 0 - 0.5 = -0.5$.

b. La elasticidad precio compensada es cero para los dos bienes que son consumidos en proporciones fijas.

c. Ahora $s_h = 2/3$ de modo que $e_{h,p_h} = -2/3$.

d. En el caso de un sandiwch de jamón y queso (sw), $e_{sw,psw} = -1$, $e_{sw,p_h} = e_{sw,p_{sw}} \cdot e_{p_{sw},p_h} = (-1) \cdot 0.5 = -0.5$.

5.9

Simplemente seguir los planteamientos empleados en los casos de dos bienes del texto (véanse soluciones detalladas).

CAPÍTULO 6

6.1

a. Convertir a Cobb-Douglas con $\alpha = \beta = 0.5$. El resultado se deriva de los ejemplos anteriores.

b. También se deriva de la Cobb-Douglas.

c. Establecer $\partial m/\partial p_s = \partial s/\partial p_m$ y cancelar los efectos sustitución simétricos.

d. Utilizar la representación Cobb-Douglas.

6.3

a. $p_{bt} = 2p_b + p_t$.

b. Dado que p_c y I son constantes, $c = I/2p_c$ también es constante.

c. Sí, dado que las variaciones de p_b o p_t sólo afectan p_{bt}.

6.5

a. $p_2 x_2 + p_3 x_3 = p_3(kx_2 + x_3)$.

b. Precio relativo $= (p_2 + t)/(p_3 + t)$.

Aproxima $p_2/p_3 < 1$ conforme $t \to 0$.

Aproxima 1 conforme $t \to \infty$.

Por tanto, un aumento de t aumenta el precio relativo de x_2.

c. No se aplica estrictamente dado que las variaciones de t modifican los precios relativos.
d. Podría reducir el gasto de x_2; el efecto en x_3 es incierto.

6.7

Demostrar $x_i \cdot \dfrac{\partial x_j}{\partial I} = x_j \cdot \dfrac{\partial x_i}{\partial I}$ y usar la simetría de los efectos sustitución netos.

6.9

a. $U_{xy} = 0$.
b. Garantizado por $U_i'' < 0$.
c. No es posible llegar a una conclusión. Depende de $p_x x$.
d. $x^\alpha y^\beta$ no es separable, $\alpha \ln x + \beta \ln y$ sí lo es.

CAPÍTULO 7

7.1

a. $k = 10$ y $l = 5$.
b. $k = 8$ y $l = 8$.
c. $k = 9$, $l = 6.5$, $k = 9.5$ y $l = 5.75$ (fracciones de horas).
d. La isocuanta es lineal entre las soluciones (a) y (b).

7.3

a. $q = 10$, $k = 100$, $l = 100$, $C = 10\,000$.
b. $q = 10$, $k = 3.3$, $l = 13.2$, $C = 8250$.
c. $q = 12.13$, $k = 4$, $l = 16$, $C = 10\,000$.
d. La capacidad de Carla para influir en la decisión depende de que ella pueda o no imponer costos en la barra si le molesta tanto servir en más mesas. Esta capacidad depende de que Carla sea la alternativa que eligen o no los clientes de Cheers.

7.5

Si $A = 1$ por simplicidad.

a.

$$f_k = \alpha k^{\alpha-1} l^\beta > 0 \quad f_l = \beta k^\alpha l^{\beta-1} > 0$$

$$f_{kk} = \alpha(\alpha - 1) k^{\alpha-2} l^\beta < 0$$

$$f_{ll} = \beta(\beta - 1) k^\alpha l^{\beta-2} < 0$$

$$f_{kl} = f_{lk} = \alpha\beta k^{\alpha-1} l^{\beta-1} > 0.$$

b. $e_{q,k} = f_k \cdot k/q = \alpha \quad e_{q,l} = f_l \cdot l/q = \beta$.
c. $f(tk,tl) = t^{\alpha+\beta} f(k,l)$ $\dfrac{\partial f(tk,tl)}{\partial t} \cdot \dfrac{t}{f(k,l)} = (\alpha + \beta)t^{\alpha+\beta}$. En $t = 1$ esto es tan sólo $\alpha + \beta$.
d., e. Aplicar las definiciones usando las derivadas de la parte (a).

7.7

a. $\beta_0 = 0$.
b. $PM_k = \beta_2 + {}^1\!/_2\beta_1 \sqrt{l/k}$; $PM_L = \beta_3 + {}^1\!/_2\beta_1 \sqrt{k/l}$.
c. En general, σ no es constante. Si $\beta_2 = \beta_3 = 0$, $\sigma = 1$. Si $\beta_1 = 0$, $\sigma = \infty$.

7.9

Aplicar el teorema a f_k, que es homogénea de grado 0. Con muchos factores, "la mayor parte" de las parciales cruzadas deben ser positivas.

CAPÍTULO 8

8.1

El individuo está en lo cierto porque el mínimo de las curvas del *CMgcp* se presenta donde la pendiente es nula. En el caso de los rendimientos de escala constante, los dos están en lo cierto.

8.3

a., b. $q = 150 \quad J = 25 \quad CMg = 4$
$q = 300 \quad J = 100 \quad CMg = 8$
$q = 450 \quad J = 225 \quad CMg = 12$

8.5

a. $q = 2\sqrt{k \cdot l} \qquad k = 100,\ q = 20\sqrt{l},\ l = q^2/400$

$$Ccp = wk + wt = 100 + \frac{q^2}{100}$$

$$CMgcp = \frac{Ccp}{q} = \frac{100}{q} + \frac{q}{100}.$$

b.

$CMgcp = \dfrac{q}{50}$. Si $q = 25, Ccp$

q	*Ccp*	*CMcp*	*CMgcp*
25	106.25	4,25	50
50	125	2.5	1
100	200	2	2
200	500	2.5	4

c., d. Mientras el costo marginal de producir una unidad más esté por debajo de la curva del costo promedio, los costos promedio irán decreciendo. De otra parte, si el costo marginal de producir una unidad más está por encima del costo promedio, entonces los costos promedio se irán incrementando. Por tanto, la curva de *CMgcp* debe cruzar la curva del *CMgcp* en su punto más bajo.
e. $C = v\bar{k} - + wq^2/4\bar{k}$.
f. $\bar{k} = \dfrac{q}{2} w^{1/2} v^{-1/2}$.
g. $C = qw^{1/2} v^{1/2}$.
h. Produce una relación de envolvente.

8.7

a. $C = q^{1/\gamma}[(v/a)^{1-\sigma} + (w/b)^{1-\sigma}]^{1/1-\sigma}$.
b. $C = qa^{-a} b^{-b} v^a w^b$.
c. $wl/vk = b/a$.

d. $l/k = \left[\dfrac{(v/a)}{(w/b)}\right]^{\sigma}$ de modo que $wl/vk = (v/w)^{\sigma-1}(b/a)^{\sigma}$.

La fracción relativa del trabajo es una función creciente de b/a. Si $\sigma > 1$, la fracción correspondiente al trabajo se mueve en la misma dirección que v/w. Si $\sigma < 1$, la fracción relativa del trabajo se mueve en dirección opuesta a v/w. Esto coincide con lo que dice la intuición respecto a cómo la posibilidad de sustitución afectaría las fracciones.

8.9

a. $l = \dfrac{\partial C}{\partial w} = \dfrac{2}{3} q\left(\dfrac{v}{w}\right)^{1/3}$.

$k = \dfrac{1}{3} q\left(\dfrac{w}{v}\right)^{2/3}$.

b. $q = Bl^{2/3}k^{1/3}$ donde B es una constante.

CAPÍTULO 9

9.1

a. $q = 50$.

b. $\pi = 200$.

c. $q = 5P - 50$.

9.3

a., b. $q = a + bP \qquad P = q/b - a/b$,
$R = P_q = (q^2 - aq)/b$, $mr = 2q/b - a/b$, y la curva mr tiene una pendiente que es el doble de la curva de demanda, de modo que $d - mr = -q/b$.

c. $mr = P(1 + 1/e) = P(1 + 1/b)$.

d. Porque $e = \partial q/\partial P \cdot P/q$.

9.5

a. $C = wq^2/4$

b. $\pi\ (P, w) = P^2/w$

c. $q = 2\ P/w$

d. $l(P, w) = P^2/w^2$

9.7

a. Se necesitan rendimientos decrecientes para asegurar que exista una opción que maximiza las utilidades.

b. $C(q,v,w) = (w + v)q^2\ /100 \qquad \Pi(P,v,w) = 25P^2\ /(w + v)$.

c. $q = \partial\Pi/\partial P = 50P/(w + v) = 20$. $\Pi = 6000$.

d. $q = 30$, $\Pi = 13\ 500$.

9.9

b. Se necesitan rendimientos decrecientes para garantizar el costo marginal creciente.

c. σ determina cómo las empresas se adaptan a precios distintos de los factores.

d. $q = \dfrac{\partial\Pi}{\partial P} = \dfrac{1}{1-\gamma} KP^{\gamma/1-\gamma}\left(v^{1-\sigma} + w^{1-\sigma}\right)^{\gamma/(1-\sigma)(\gamma-1)}$.
La magnitud de σ no afecta la elasticidad de la oferta, pero una mayor posibilidad de sustitución implica que los incrementos del precio de un factor harán que la curva de oferta se desplace menos.

e. Véanse soluciones detalladas.

CAPÍTULO 10

10.1

a. $q = 10\sqrt{P} - 20$.

b. $Q = 1000\sqrt{P} - 2000$.

c. $P = 25$; $Q = 3000$.

10.3

a. $P = 6$.

b. $q = 60\ 000 - 10\ 000P$.

c. $P = 6.01$, $P = 5.99$.

d. $e_{Q,P} = -600$.
a′ $P = 6$.
b′ $Q = 359\ 800 - 59\ 950P$.
c′ $P = 6.002$; $P = 5.998$.
d′ $e_{Q,P} = -0.6$; $e_{q,P} = -3597$.

10.5

a. $P = 3$, $Q = 2\ 000\ 000$ y $n = 2000$ haciendas.

b. $P = 6$ y $\pi = 3000$/haciendas.

c. $P = 3$, $Q = 2\ 600\ 000$ y $n = 2600$ haciendas.

10.7

a. $n = 50$, $Q = 1000$, $q = 20$, $P = 10$ y $w = 200$.

b. $n = 72$, $Q = 1728$, $q = 24$, $P = 14$ y $w = 288$.

c. El incremento de los fabricantes = \$5368. La aproximación lineal de la curva de oferta produce más o menos el mismo resultado.

CAPÍTULO 11

11.1

a. $P = 120$, $PQ = 48\ 000$, $Ccp = 16\ 000$ y $Pcp = 20\ 000$.

b. Pérdida = 2250.

c. $P = 140$, $Ccp = 9000$ y $Pcp = 24\ 750$. $P = 95$, $Ccp = 22\ 500$ y $Pcp = 11\ 250$.

d. Pérdida = 562.50.

11.3

a. $P = 11$, $Q = 500$ y $r = 1$.
b. $P = 12$, $Q = 1\,000$ y $r = 2$.
c. $\Delta EP = 750$.
d. Δ rentas = 750.

11.5

a. $P_D = 140$, $P_S = 95$, $P_D - P_S = t = 45$; $Q = 300$.
b. Total impuestos = 13 500.
Los consumidores pagan 6000; los productores pagan 7500. Los productores pagan 56 por ciento.
c. 2250
d. $P_D = 129.47$; $P_S = 84.47$; $Q = 258$. Total de impuestos = 11 610, los productores pagan 79 por ciento.
e. $P_D = 150$; $P_S = 105$; $Q = 250$.
Total de impuestos = 11 250; los consumidores pagan 67 por ciento.

11.7

a. $Q = 250$; $r = 0.5$; $P_S = 10.5$; $P_D = 16$.
b. Total de impuestos = 1375; impuesto a consumidores = 1250; impuesto a productores = 125; pérdida de $EC = 1875$; pérdida de $EP = 187.5$.
c. Pérdida = 0.5(250) + 0.5(0.5)(250) = 187.5. Éste es el total de la pérdida de *EP* del inciso (b). Ocurre porque la única razón para la oferta con pendiente ascendente es la pendiente ascendente de la oferta de regalías de la película.

11.9

El precio aumenta a 9.6. El total de ingresos por concepto de la tarifa de hecho disminuye a 0.462 (miles de millones de dólares). $DW_1 = 0.315$ y $DW_2 = 0.234$. Por tanto, *DW* aumenta a 0.147, o sea un incremento de 37% en comparación con el ejemplo 16.3.

CAPÍTULO 12

12.1

b. Si $y = 2x$, $x^2 + 2(2x)^2 = 900$; $9x^2 = 900$; $x = 10$, $y = 20$.
c. Si $x = 9$ en la frontera de las posibilidades de producción,

$$y = \sqrt{\frac{819}{2}} = 20.24$$

Si $x = 11$ en la frontera, $y = \sqrt{\dfrac{779}{2}} = 19.74$.

Por tanto, el *IPT* es aproximadamente $-\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-(-0.50)}{2} = 0.25$.

12.3

a. Utilizar la frontera de posibilidades de producción y después la caja de Edgeworth.
b. Si p no cambia, la proporción entre tierra y trabajo debe permanecer igual en cada industria. Esto sólo podría ocurrir si se expande la mercancía que lleva trabajo intensivo.

12.5

a. Duplicar los precios no cambia *ED*.
b. $p_1 ED_1 = -[-3p_2^2 + 6p_2p_3 - 2p_3^2 - p_1p_2 - 2p_1p_3]/p_1$.
c. $p_2/p_1 = 3$; $p_3/p_1 = 5$; $p_3/p_2 = \dfrac{5}{3}$.

12.7

Si A = Alimentos, R = Ropa.

a. Restricción de trabajo $A + R = 100$.
b. Restricción de tierra $2A + R = 150$.
c. La frontera exterior cumple con las dos restricciones.
d. La frontera es cóncava porque debe cumplir con las dos restricciones. Dado que $IPT = 1$ para la restricción del trabajo y 2 para la de la tierra, la frontera de las posibilidades de producción del inciso (c) exhibe un *IPT*; creciente; por tanto éste es cóncavo.
e. Las restricciones se cortan en $A = 50$, $R = 50$. Para
$F < 50\ \dfrac{dR}{dA} = -1$ por tanto $\dfrac{P_A}{P_R} = 1$. Para $F > 50$
$\dfrac{dR}{dA} = -2$ por tanto $\dfrac{P_A}{P_R} = 2$.
f. Si para los consumidores
$\dfrac{dR}{dA} = -\dfrac{5}{4}$ por tanto $\dfrac{P_A}{P_R} = \dfrac{5}{4}$.
g. Si $P_A/P_R = 1.9$ o $P_A/P_R = 1.1$, seguirá eligiendo $F = 50$, $C = 50$ dado que las dos líneas de precios "tangentes" de la frontera de posibilidades de producción están en este punto.
h. $0.8A + 0.9R = 100$. Restricción del capital: $R = 0$ $A = 125$, $A = 0$ $R = 111.1$. Esto da por resultado el mismo PPF dado que la restricción del capital no limita en ningún punto.

12.9

a. La curva del contrato es una línea recta. La única proporción de equilibrio de los precios es $P_J/P_Q = 4/3$.
b. El equilibrio inicial en la curva del contrato.
c. No sólo en la curva del contrato; el equilibrio está entre $40J$, $80Q$ y $48J$, $96Q$.
d. Santiago toma todo y Juan se muere de hambre.

CAPÍTULO 13

13.1

a. $Q = 24$, $P = 29$ y $\pi = 576$.
b. $CMg = P = 5$ y $Q = 48$.
c. Excedente del consumidor = 1152. En monopolio, excedente del consumidor = 288, utilidades = 576, pérdida de peso muerto = 288.

13.3

a. $Q = 25$, $P = 35$ y $\pi = 625$.
b. $Q = 20$, $P = 50$ y $\pi = 800$.
c. $Q = 40$, $P = 30$ y $\pi = 800$.

13.5

a. $P = 15$, $Q = 5$, $C = 65$ y $\pi = 10$.
b. $A = 3$, $P = 15$, $Q = 6.05$ y $\pi = 12.25$.

13.7

a. $Q_1 = 25$, $P_1 = 30$, $Q_2 = 30$, $P_2 = 20$ y $\pi = 1075$.
b. $P_1 = 26.66$, $P_2 = 21.66$ y $\pi = 1058.33$.
c. $P_1 = P_2 = 23.33$, $\pi = 1008.33$, $Q_1 = 31.67$ y $Q_2 = 23.33$.
d. $P_i = \alpha_i + mq_i$.
Establezca $m = 5$, $\alpha_1 = 1250$ y $\alpha_2 = 900$.

13.9

a. El gobierno quiere que la producción aumente hacia $P = CMg$, pero el subsidio de cantidad única no afecta $IMg = CMg$ de la empresa monopolista.
b. Esto desplazará la curva CMg hacia abajo.
c. Utilice $IMg = P(1 + 1/e)$.

CAPÍTULO 14

14.1

a. $Q = 75$, $P = 75$ y $\pi = 5625$.
b. $q_1 + q_2 = 50$, $P = 50$ y $\pi_1 = \pi_2 = 2{,}500$.
c. En competencia perfecta, $P = 0$ y $Q = 150$.

14.3

a. Liderazgo en precios.
b. Discriminación de precios (por parte de los vendedores), si bien la estrategia de Apple aparentemente no será viable al largo plazo ¿Por qué?
c. Probablemente contabilidad incorrecta.
d. Competencia internacional.

14.5

Multiplicar por q_i/PQ; esto demuestra que habiendo competencia de Cournot, las industrias más concentradas son más rentables.

14.7

a. $P = 25$, $Q = 20\,000$ y total $Q_s = \sum_{1}^{1000} q = 1000P - 5000$.
b. $P = 20$, $Q = 30\,000$ y q (para el líder) = 15 000.
c.

Precio	Excedente del consumidor
25	100 000
20	225 000
15	400 000

14.9

a. Sí, el CMg es decreciente.
b. $Q = 450$, $P = 11$ y $\pi = 3341$.
c. $P = CP = 2.4$ (aproximadamente).

CAPÍTULO 15

15.1

a. Tanto ciervo-ciervo como liebre-liebre son equilibrios de Nash.
b. Si p = probabilidad A juega la etapa y B escogerá ciervo si $p > ½$.
c. Requiere $p^{(n-1)} > ½$ para que haya cooperación.

15.3

El equilibrio de Nash con una estrategia mixta es $s = 1/(K + 1)$, $r = K/(K + 1)$.

15.5

a. En este caso hay dos equilibrios de Nash: A. Gallina, B: No gallina; y A: No gallina, B: Gallina.
b. La amenaza de "No gallina" no es creíble ante el compromiso sólido del adversario que dice que no será gallina.
c. Este compromiso obtendría un resultado deseable suponiendo que el adversario no haya hecho también el mismo compromiso.
d. Si bien la escena puede ser objeto de muchas interpretaciones (no queda claro si el director de la película tuviera idea del punto que resalta la escena), una es que acercarse a la mujer más deseable es un juego de gallina. Se podría evitar un equilibrio de Nash desastroso instituyendo alguna forma de juego de primera etapa.

15.7

a. $P = 10 - \epsilon$, $q_A = 0$ y $q_B = 300$.
b. $\pi_A = 0$, $\pi_B = 600$.
c. Ineficiente porque $P > CMg_B$.

15.9

a. $P = 5$ $\quad Q = 5000$ $\quad q = 250$.
b. Si una empresa vende $q = 251$, aumentará sus utilidades.

c. Con un cartel de 20 miembros, sólo un precio muy bajo será estable ($P = 0.3$). Con menos miembros, un precio más alto será estable.

15.11

Siga el procedimiento del ejemplo 15.8. El resultado será $q_A^* = 30 \quad q_{BH}^* = 40 \quad q_{BC}^* = 20$.

CAPÍTULO 16

16.1

a. Ingreso completo = 40 000. $l = 2000$ horas.
b. $l = 1400$ horas.
c. $l = 1700$ horas.
d. La oferta es asintótica a 2000 horas a medida que w aumenta.

16.3

$E[U(y_{empleo1})] = 100 \cdot 40 - 0.5 \cdot 1600 = 3200.$

$E[U(y_{empleo2})] = E[U(wh)] = E[100wh - 0.5(wh)^2] = 800w - 0.5 \cdot [36w^2 + 64w^2] = 800w - 50w^2.$

Si establece la igualdad con 3200 y utiliza la fórmula cuadrática obtendrá $w = 8$.

16.5

a. Ayuda = 6000 − 0.75(I).
Si $I = 0$ Ayuda = 6000.
$I = 2000$ Ayuda = 4500.
$I = 4000$ Ayuda = 3000.
b. Ayuda = 0 cuando $6000 - 0.75I = 0$, $I = 6000/0.75 = 8000$.
c. Suponga que el año tiene 8000 horas. Ingreso completo = $4 \times 8000 = 32\,000 = c + 4h$.
d. Ingreso completo
= 32 000 + ayuda
= $32\,000 + 6000 - 0.75 \cdot 4(8000 - h)$
= $38\,000 - 24\,000 + 3h = c + 4h$
o $14\,000 = c + h$ para $I < 8000$. Es decir, para $h < 6000$ horas la ayuda de bienestar crea un nudo en la restricción del presupuesto en el punto de 6000 horas de ocio.

16.7

a. Para $MU_t = IPMg_t$,

$$\frac{l}{40} = 10 - \frac{l}{40} \text{ de modo que } \frac{2l}{40} = 10$$

$l = 200$.
Obtener w a partir de la curva de oferta:

$$w = \frac{l}{80} = \frac{200}{80} = \$2.50.$$

b. Para Carl, el gasto del trabajo marginal ahora es igual al salario mínimo; $w_m = \$4.00$. Estableciendo la igualdad con el $IPMg$ tendremos $l = 240$.
c. En competencia perfecta, un salario mínimo significa salarios más altos pero menor cantidad de trabajadores empleados. En monopsonio, un salario mínimo podría dar por resultado salarios más altos y una cantidad mayor de trabajadores empleados.

16.9

a. Dado que $q = 240x - 2x^2$, el ingreso total es $5q = 1200x - 10x^2$. $IMg = \dfrac{\partial IMP}{\partial x} = 1200 - 20x$.

Producción de pieles $x = \sqrt{l}$. Costo total = $wl = 10x^2$. Costo marginal = $\dfrac{\partial C}{\partial x} = 20x$. En competencia, el precio de las pieles = CMg = $20x$, $IMP = p_x = CMg = 20x \quad x = 30$, p_x = 600.
b. Desde la perspectiva de Dan, demanda de pieles = $IMP = 1200 - 20x$, $R = p_x \cdot x = 1200x - 20x^2$.
Ingreso marginal: $\dfrac{\partial R}{\partial x} = 1200 - 40x$ en igualdad con el costo = $20x$. Resultado x = 20, $p_x = 800$.
c. Desde la perspectiva de UF oferta de pieles = $CMg = 20x = p_x$, costo total = $p_x x = 20x^2$ y $GM_x = \dfrac{\partial C}{\partial x} = 40x$. Por tanto $GM_x = 40x = IMP_x = 1200 - 20x$ con una solución de x = 20, $p_x = 400$.

CAPÍTULO 17

17.1

b. Los efectos ingreso y sustitución operan en direcciones contrarias. Si $\partial c_1/\partial r < 0$, c_2 es elástico al precio.
c. La restricción del presupuesto pasa por y_1, y_2 y rota por este punto a medida que r varía. El efecto ingreso dependerá de que $y_1 > c_1$ o $y_1 < c_1$ inicialmente.

17.3

25 años.

17.5

a., b. Véanse las soluciones detalladas.

c. En este caso t^* es más bajo que en el ejemplo 17.2 porque las rotaciones entrañan costos de oportunidad adicionales.
d. $f(t)$ es asintótica a 50 ya que $t \to \infty$.
e. $t^* = 100$ años. Aquí no definimos el rendimiento máximo sostenible porque el árbol siempre está creciendo. Sin embargo, nótese que $f(t) = 25$ en el máximo y no 50.
f. $t^* = 104.1$.

17.7

VPD (vitalicio) = \$6304.
VPD (temporal) = \$3879.
El vendedor está equivocado.

17.9

Ahora el *IMg* debería aumentar acorde con la tasa de interés. No obstante, si la demanda es elasticidad constante, $IMg = kP$, por tanto con el mismo precio final, la senda del precio será igual a la del caso en competencia.

CAPÍTULO 18

18.1

$P = 0.525$.

18.3

a. Una visita: valor esperado $= 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 12 = 6$.
Dos visitas: valor esperado $= 0.25 \cdot 0 + 0.5 \cdot 6 + 0.25 \cdot 12 = 6$.
b. Prefiere la estrategia de dos visitas porque la variación es menor.
c. Sumar visitas disminuye la variación, pero a ritmo decreciente. Por tanto, la idoneidad depende del costo de la visita.

18.5

a. $E(U) = 0.75\ ln(10\,000) + 0.25\ ln(9000) = 9.1840$.
b. $E(U) = ln(9750) = 9.1850$; el seguro es preferible.
c. \$260

18.7

a. Sembrar maíz.
b. Sí, debería elegir una cosecha mixta. La diversificación aumenta la variación, pero aprovecha la ventaja de que el rendimiento del trigo es mayor.
c. 44% de trigo, 56% de maíz.
d. El agricultor sólo sembraría trigo.

18.9

a. Utilizar la figura 18.5
b., c. Estudiar la curvatura de la función *RRA* constante.
d. Es de suponer, porque la función *RRA* constante es homotética en *W*.

CAPÍTULO 19

19.1

a. Sí
b. \$50
c. 0

19.3

Costo = \$1750.
Ahora la utilidad esperada $= 0.5\,U(18\,250) + 0.5\,U(14\,750)$, que podría exceder a $U(15\,000)$.

19.5

a. No
b. \$20 000. Asimismo, a los trabajadores que tienen pocas capacidades les debe costar más no proporcionar incentivo alguno para comprarlos.

19.7

a., b. $p_{\min} = 300 + 100/(n + 1)$.
c. Establezca $-dp_{\min}/dn = 2$, $n^* = 7$.

19.9

Maximización de la utilidad de los pacientes: $U_1^c / U_2^c = p_m$.

Optimización del doctor: $U_1^d\, p_m + U_2^d\,[\,U_1^c - p_m\, U_2^c] = 0$. Si $U_2^d = 1$, ello requiere que $p_m = U_1^c/(U_2^c - U_1^d)$. Por cuanto se refiere a la maximización de los pacientes, esto requiere un U_1^c más bajo. Por tanto, el médico opta por una cantidad mayor de atención médica que la que escogería un consumidor plenamente informado.

CAPÍTULO 20

20.1

a. $P = 20$ y $q = 50$.
b. $P = 20$, $q = 40$, $CMg = 16$ e impuesto = 4.

20.3

a. $n = 400$. La externalidad surge porque el hecho de perforar un pozo afecta la producción de todos los pozos.
b. $n = 200$.
c. Cuota = 2000/pozo.

20.5

Pregunta que se debe contestar con un ensayo, el cual deberá incluir: los servicios son brindados por las partes, los riesgos, los costos de información, los incentivos de acuerdo con los distintos contratos, etcétera.

20.7

a. Establecer $q_a = q_b$ y $Q = 90$.
b. El problema del parásito (free rider) podría dar por resultado que $Q = 0$.
c. Costo total = 10 800. Si el impuesto está basado en la valuación marginal, *a* paga 900, y *b* paga 9900.

20.9

a. Si cada persona es un parásito, la utilidad será 0.
b. $y = 5$, $x = 50$, $x/100 = 0.5$ y la utilidad = $\sqrt{2.5}$.

CAPÍTULO 21

21.1

a. 100 cada uno, $U_1 = 10$ y $U_2 = 5$.
b. $f_1 = 40$ y $f_2 = 160$.
c. $f_1 = 160$ y $f_2 = 40$.
d. $f_1 = f_2 = 100$.
e. $f_1 = f_2 = 100$.

21.3

a. $x = 160$; $(U_1 + U_2)^2 = 1600$.
b. $(U_1 + U_2)^2 = 3600$.
c. Max $2xy$ sujeto a $x + 2y = 180$; $x = 90$; $y = 45$; $(U_1 + U_2)^2 = 4050$.
d. Si la frontera de las posibilidades de utilidad intersecara, use la otra envolvente de las fronteras.

21.5

a. *D*
b. *E*
c. *B*
d. *A*
e. Elección depende del criterio usado.

21.7

a. Elegir *b*, *t* de modo que *y* sea igual en cada estado. Requiere que $t = u$.
b. *b* siempre = $(1 - t)w$, $t = u$.
c. No, porque esta persona siente aversión al riesgo y siempre optará por un ingreso igual en cada estado.

21.9

Votarían aquellos que tienen más por ganar. Podría cambiar las estrategias para el equilibrio de Nash.

Glosario

A continuación se definen algunos de los términos empleados con frecuencia en este libro. El lector puede recurrir al índice analítico para ubicar las secciones que contienen descripciones más completas de estos conceptos.

Actividades de búsqueda de rentas Los agentes económicos desempeñan actividades para buscar rentas cuando emplean el proceso político para generar rentas económicas que normalmente no se presentarían en las transacciones de mercado.

Ajuste walrasiano de precios El supuesto de que los mercados se vacían por medio de ajustes de precios que responden al exceso de demanda o de oferta.

Análisis normativo Análisis económico que adopta una posición respecto a la forma en que deberían operar los mercados o los agentes económicos.

Análisis positivo Análisis económico que pretende prever y explicar hechos económicos reales.

Asignación eficiente de Pareto Una asignación de los recursos con la cual es imposible que un individuo quede en mejor situación sin provocar que otro quede en una peor.

Aversión al riesgo La falta de disposición para aceptar apuestas justas. Se presenta cuando la función de utilidad de la riqueza de un individuo es cóncava [es decir, $U'(W) > 0$, $U''(W) < 0$]. La aversión absoluta al riesgo se mide con $r(W) = \frac{-U''(W)}{U'(W)}$. La aversión relativa al riesgo se mide con

$$rr(W) = \frac{-WU''(W)}{U'(W)}.$$

Barreras a la entrada Características de una industria que determinan la facilidad con la cual una empresa nueva puede iniciar su producción. En competencia perfecta se supone que la entrada no tiene costo alguno, mientras que en una industria monopolista existen importantes barreras para poder entrar.

Beneficio La diferencia entre el total de ingreso que recibe una empresa y el costo económico de la producción. En competencia perfecta, el beneficio económico será nulo a largo plazo. Sin embargo, el beneficio de monopolio puede ser positivo.

Bien compuesto Grupo de bienes con precios que varían todos juntos; es decir, los precios relativos de los bienes del grupo no varían. Estos bienes pueden ser tratados como un solo bien en muchas aplicaciones.

Bien inferior Aquel que el individuo adquiere en menor cantidad a medida que aumenta su ingreso.

Bien normal Aquel cuya demanda aumenta (o permanece constante) a medida que el ingreso del individuo aumenta.

Bien público Aquel que, una vez que ha sido producido, está a disposición de todo el mundo, sin exclusión. Además, muchos bienes públicos no son rivales; es decir una cantidad de individuos adicional se pueden beneficiar de ellos sin costo marginal alguno.

Ceteris paribus Supuesto que, cuando se analiza la influencia de una variable dada dentro de un modelo económico, establece que todos los demás factores se mantienen constantes.

Colusión tácita Optar por estrategias de cooperación (monopolio) sin una colusión explícita.

Competencia perfecta El modelo económico más empleado; supone que un bien cualquiera tiene una gran cantidad de compradores y vendedores y que cada uno de los agentes es tomador de precios (precio aceptante). *Véase también* Precio aceptante.

Complementos (brutos) Dos bienes relacionados de modo que cuando aumenta el precio de uno, disminuye la cantidad consumida del otro. Los bienes x y y son complementos brutos si $\partial x/\partial p_y < 0$. *Véase también* Sustitutos (brutos).

Complementos (netos) Dos bienes relacionados de modo que cuando aumenta el precio de uno, disminuye la cantidad consumida del otro, manteniendo constante el ingreso real (la utilidad). Los bienes x y y son complementos netos si

$$\partial x/\partial p_y\big|_{U = \overline{U}} < 0.$$

Estos efectos compensatorios de precios cruzados son simétricos, es decir,

$$\partial x/\partial p_y\big|_{U = \overline{U}} = \partial y/\partial p_x\big|_{U = \overline{U}}.$$

Véase también Sustitutos (netos). También conocidos como sustitutos y complementos hicksianos.

Condiciones de Kuhn-Tucker Condiciones de primer orden para un problema de optimización en el cual existen restricciones de desigualdad. Se trata de la generalización de las condiciones de primer orden para la optimización con restricciones de igualdad.

Condiciones de primer orden Condiciones matemáticas que necesariamente se deben cumplir para que la función tome su valor máximo o mínimo. Por lo general muestran que una actividad cualquiera debe aumentar hasta el punto donde la utilidad marginal sea igual al costo marginal.

Condiciones de segundo orden Condiciones matemáticas necesarias para asegurar que los puntos donde se cumplen las condiciones de primer orden son, de hecho, un máximo o un mínimo verdaderos. Las funciones que obedecen a ciertos supuestos de convexidad cumplen estas condiciones.

Costo hundido Inversiones que se hacen una sola vez, pero son necesarias para poder entrar en el mercado.

Costo marginal (*CMg*) El costo adicional que se contrae al producir una unidad: $CMg = \partial C/\partial q$.

Costos fijos Aquellos que no cambian a medida que el nivel de producción varía en el corto plazo. En muchos sentidos, los costos fijos no tienen importancia para la teoría de la fijación de precios a corto plazo. *Véase también* Costos variables.

Costos variables Aquellos que cambian en respuesta a cambios en el nivel de producción que produce una empresa. Esto contrasta con los costos fijos, los cuales no cambian.

Curva de contrato Serie de todas las asignaciones eficientes de los bienes que están en una economía de intercambio. Cada una de estas asignaciones tiene la propiedad de que no puede hacer que un individuo quede en mejor situación sin provocar que otro quede en una peor.

Curva de demanda Gráfica que muestra la relación, ceteris paribus, entre el precio de un bien y la cantidad demandada del mismo. Representación bidimensional de la función de demanda $x = x(p_x, p_y, I)$. Se conoce como demanda "marshalliana" para diferenciarla del concepto (hicksiano) de demanda compensada.

Curva de demanda del individuo La relación, ceteris paribus, entre la cantidad de un bien que un individuo demanda y el precio del mismo. Representación bidimensional de $x = x\ (p_x, p_y, I)$ correspondiente a una persona.

Curva de nivel Serie de puntos a lo largo de la cual una función tiene un valor constante. Muy útil para representar funciones tridimensionales en gráficas bidimensionales. Un ejemplo serían los mapas de curvas de indiferencia de los individuos y los mapas de isocuantas de la producción de las empresas.

Demanda contingente de factores productivos *Véase* Funciones de demanda de los factores productivos.

Demanda de mercado Suma de las cantidades de un bien que es demandado por todos los individuos dentro de un mercado. Dependerá del precio del bien, de los precios de otros bienes, de las preferencias de cada consumidor y del ingreso de cada consumidor.

Derechos de propiedad Especificación legal de la propiedad y de los derechos de los propietarios.

Diagrama de la caja de Edgeworth Instrumento gráfico empleado para demostrar la eficiencia económica. Normalmente empleado para ilustrar la curva de contrato en una economía de intercambio, pero también útil en la teoría de la producción.

Diferencia entre corto y largo plazos Diferencia conceptual marcada en la teoría de la producción que distingue un periodo en el cual se considera que algunos factores son fijos y un periodo más largo en el cual el productor puede variar todos los factores.

Diferenciales compensatorios de los salarios Diferencias que surgen en los salarios reales cuando las características de las ocupaciones llevan a los trabajadores a preferir un empleo en lugar de otro cuando deciden ofrecer su trabajo.

Dilema del prisionero Originalmente estudiado en la teoría de juegos, pero que tiene muchas posibilidades de aplicación. El meollo del dilema es que cada individuo, ante la incertidumbre del comportamiento de los demás, podría adoptar un curso de acción cuyos resultados vayan en detrimento de todos los individuos que toman la misma decisión. Una coalición sólida podría haber llevado a una solución preferida por todos los componentes del grupo.

Discriminación de precios Situación en la cual un comprador o un vendedor pueden usar su poder de mercado de forma eficaz para segmentar un mercado y así seguir una política de precios diferente en cada uno de ellos.

Discriminación de precios Vender bienes idénticos a precios distintos. Exige que los vendedores sean capaces de impedir la reventa. Existen tres tipos: de primer grado; es decir vender cada unidad a un precio distinto al individuo dispuesto a pagar la cantidad más alta por el mismo ("discriminación perfecta de precios"); de segundo grado, es decir adoptar planes de precios que brindan a los compradores un incentivo para dividirse en distintas categorías de precios; de tercer grado, fijar distintos precios a los mercados por separado.

Doctrina del costo de oportunidad La observación, sencilla pero de gran alcance, que dice que podemos medir el costo real de una acción cualquiera con base en el valor de la mejor alternativa a la que debemos renunciar por emprender esa acción.

Dualidad Relación entre un problema cualquiera de maximización restringida y su correspondiente "dual" de minimización restringida.

Economía de intercambio Aquella en la cual la oferta de bienes es fija (es decir, no hay producción). Sin embargo, los bienes existentes pueden ser reasignados de otra manera a los individuos de la economía.

Ecuación de Slutsky Representación matemática del efecto ingreso y del efecto sustitución que una variación del precio tiene en las elecciones que maximizan la utilidad:

$$\partial x/\partial p_x = \partial x/\partial p_x|_{U=\bar{U}} - x\frac{\partial x}{\partial I}.$$

Efecto de producción y sustitución Aquellos que entran en juego cuando la variación del precio de un factor que emplea una empresa provoca que cambien las cantidades de los factores que demandará. El efecto sustitución se presentaría incluso si la producción se mantuviera constante y ello se refleja en movimientos a lo largo de la isocuanta. Por otra parte, el efecto de producción se presenta cuando los niveles de la producción cambian y la empresa pasa a otra isocuanta.

Efecto ingreso y sustitución Dos efectos distintos en términos analíticos, que entran en juego cuando un individuo afronta la variación del precio de un bien. El efecto ingreso surge debido a que la variación del precio de un bien afectará el poder adquisitivo de un individuo. No obstante, incluso si los individuos conservan su poder adquisitivo, el efecto sustitución provocará que éstos reasignen sus expectativas. El efecto sustitución se refleja con movimientos a lo largo de una curva de indiferencia, mientras que el efecto ingreso implica pasar a otra curva de indiferencia. *Véase también* Ecuación de Slutsky.

Efecto sustitución *Véase* Efecto ingreso y sustitución: efecto producto y sustitución; ecuación de Slutsky.

Eficiencia económica Situación en la cual los recursos son asignados de modo que es imposible aumentar una actividad sin necesariamente reducir otra. *Véase también* Asignación eficiente en sentido de Pareto.

Elasticidad Medida, que no utiliza unidades, del efecto proporcional que una variable tiene en otra. Si $y = f(x)$, entonces $e_{y,x} = \partial y/\partial x \cdot x/y$.

Elasticidad precio La aplicación más importante del concepto de elasticidad, el cual refleja el cambio proporcional que registra la cantidad demandada en respuesta a un cambio proporcional en el precio: Si $q = f(p, \ldots)$, $e_{q,p} = \partial q/\partial p \cdot p/q$.

Equilibrio Situación en la cual ningún agente tiene incentivos para modificar su comportamiento. Con un precio de equilibrio, la cantidad que demanden todos los individuos será justo igual a la que ofrezcan todas las empresas.

Equilibrio de Bertrand Aquel que se presenta en un juego para fijar precios en un duopolio.

Equilibrio de Cournot Aquel que se presenta en el juego de fijar las cantidades en un duopolio.

Equilibrio de Lindahl Solución hipotética del problema de los bienes públicos: la parte de los impuestos que paga cada individuo desempeña el mismo papel que un precio de mercado de equilibrio en una asignación competitiva.

Equilibrio en subjuego perfecto Equilibrio de Nash en el cual las estrategias que elige cada jugador no entrañan amenazas que no son creíbles.

Estrategias de equilibrio de Nash Conjunto de estrategias (a^*, b^*) en un juego de dos jugadores, de modo que a^* será la óptima de A contra la estrategia b^* y b^* será la óptima de B contra la estrategia a^*.

Excedente del consumidor Área que se encuentra por debajo de la curva de demanda marshalliana y por encima del precio de mercado. Muestra lo que un individuo pagaría por el derecho de realizar la transacción, voluntariamente, a ese precio. Podemos emplear las variaciones del excedente del consumidor para medir los efectos que las variaciones de precios tienen en el bienestar.

Excedente del productor El rendimiento extra que obtienen los productores cuando realizan transacciones a un precio de mercado que está por encima de lo que obtendrían si no se produjera algo. Ilustrado por el tamaño del área por debajo del precio de mercado y por encima de la curva de oferta.

Externalidad Efecto que un agente económico tiene en otro y que no es tomado en cuenta por el comportamiento normal del mercado.

Factor inferior Factor productivo que la empresa emplea en menor cantidad a medida que expande su producción.

Frontera de posibilidades de producción El punto donde se encuentran todas las cantidades alternativas de las distintas producciones que es posible producir con cantidades fijas de factores productivos.

Función cóncava Es una función tal que todos sus puntos se ubican por debajo de su tangente.

Función cuasi cóncava Aquella en la cual todos los puntos donde $f(X) > k$ es convexa.

Función de bienestar social Recurso hipotético que registra las opiniones de la sociedad respecto a la equidad de los individuos.

Función de costo *Véase* Función de costo total.

Función de costos total Relación entre el costo total (minimizado), la producción y los precios de los factores

$$C = C(v, w, q).$$

Función de demanda compensada Aquella que muestra una relación entre el precio de un bien y la cantidad consumida del mismo, cuando se mantiene constante el ingreso real (o la utilidad). Denotada por $x^c(p_x, p_y, U)$.

Función de demanda factorial Aquella que demuestra la forma en que la demanda de factores productivos de una empresa que maximiza su beneficio está fundada en los precios de los factores productivos y en la demanda del producto. Por ejemplo, podemos expresar la función de demanda del factor trabajo como $l = l(P, v, w)$, donde P es el precio de mercado del producto de la empresa. La función de la demanda *contingente* de los factores $[l^c(v,w,q)]$ se deriva de la minimización de costos y no necesariamente refleja la producción que maximiza el beneficio.

Función de ganancia La relación entre el beneficio máximo de una empresa (Π^*) y los precios de los factores y del producto que afronta:

$$\Pi^* = \Pi^*(P, v, w).$$

Función de oferta En el caso de una empresa que maximiza su beneficio, función que muestra la cantidad ofrecida (q) como función del precio del producto (P) y los precios de los factores (v, w):

$$q = q(P, v, w).$$

Función de producción Función matemática conceptual que registra la relación entre los factores y la producción de una empresa. Si la producción está exclusivamente en función del capital y el trabajo, ésta quedaría denotada por $q = f(k, l)$.

Función de utilidad Concepción matemática de la forma en que los individuos clasifican a las canastas alternativas de bienes. Si sólo hay dos bienes, x y y, entonces la utilidad es denotada por

$$\text{utilidad} = U(x, y).$$

Función de utilidad indirecta Representación de la utilidad en función de todos los precios y el ingreso.

Función gasto Aquella que se deriva del problema dual de minimización del gasto del individuo. Muestra el gasto mínimo necesario para alcanzar un nivel de utilidad determinado:

$$\text{gasto} = E(p_x, p_y, U).$$

Función homogénea Una función, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, será homogénea de grado k si

$$f(mx_1, mx_2, \ldots, mx_n) = m^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Función homotética Aquella que podemos representar como una transformación monótona de una función homogénea. Las pendientes de las curvas de nivel de esta función dependerán tan sólo de las proporciones de las variables que entran en la función, y no de sus niveles absolutos.

Industria con costo constante Aquella en la cual la expansión de la producción y el ingreso de las empresas nuevas no tiene efecto alguno en las curvas de costos de las empresas individuales.

Industria con costos crecientes Aquella en la cual la expansión de la producción crea una externalidad con costos crecientes, los cuales provocan que las curvas de costos de las empresas que están en la industria se desplacen hacia arriba.

Industria con costos decrecientes Aquella en la cual la expansión de la producción genera externalidades que disminuyen los costos, provocando que las curvas de costos de las empresas que están en esa industria se desplacen hacia abajo.

Ingreso del producto marginal (*IPMg*) El ingreso extra que obtiene una empresa cuando vende el producto que se ha generado con una unidad más de un factor. Por ejemplo, en el caso del trabajo, $IPMg_l = IMg \cdot IMg_l$.

Ingreso marginal (*IMg*) El ingreso adicional que obtiene una empresa cuando vende una unidad más de producto. $IMg = \partial p \cdot q/\partial q = p\,(1 + 1/e_{q,p})$.

Juego que suma cero Aquel en el cual lo que gana un jugador es lo que pierde el otro.

Largo plazo *Véase* Diferencia entre corto y largo plazos.

Lema de Shepherd Aplicación del teorema de la envolvente, la cual demuestra que las funciones de demanda compensadas de los consumidores y las funciones de demanda factorial (producción constante) de las empresas se pueden derivar a partir de una diferenciación parcial de la función gasto o de la función de costo, respectivamente.

Mapa de curvas de indiferencia Representación de las curvas de nivel de la función de utilidad de un individuo, la cual muestra las distintas canastas de bienes a partir de las cuales el individuo deriva el mismo nivel de bienestar.

Mapa de isocuantas Representación de las curvas de nivel de la función de producción de la empresa. Las curvas de nivel muestran las combinaciones alternativas de factores productivos que la empresa puede emplear para producir un nivel de producción determinado.

Mercado disputable Aquel en el cual la entrada y la salida no tienen costo alguno. Los mercados que realizan "un ataque para después esconderse" durante la entrada y la salida producirán en el punto en el cual $P = CMg = CP$ a pesar de que no incluyan una cantidad importante de empresas.

Modelo del equilibrio general Representación de una economía que incluye la operación simultánea de muchos mercados.

Modelo del equilibrio parcial Representación de un único mercado que no toma en cuenta las repercusiones en otros mercados.

Monopolio Industria en la cual sólo hay un vendedor del bien en cuestión.

Monopsonio Industria en la cual sólo hay un comprador del bien en cuestión.

Muy corto plazo Plazo muy breve en el cual la cantidad ofrecida es fija y no responde a variaciones del precio de mercado.

Oligopolio Una industria que tiene tan sólo unos cuantos vendedores del bien en cuestión.

Paradoja de Giffen Situación en la cual un aumento de precio de un bien lleva a los individuos a consumir una cantidad mayor del mismo. Se presenta porque el bien en cuestión es inferior y debido a que el efecto ingreso, que produce el cambio de precio, es más fuerte que el efecto sustitución.

Paradoja del voto Ilustra la posibilidad de que la regla del voto de la mayoría no produzca un resultado determinado sino que, en cambio, circule de una alternativa a otra.

Pérdida de peso muerto o de eficiencia económica Transacciones benéficas que pierden las dos partes. Las pérdidas del excedente del consumidor y del productor que no son transferidas a otro agente económico.

Precios limitantes Estrategia de escoger precios bajos para disuadir la entrada.

Principio de suma única La demostración de que los impuestos sobre el poder adquisitivo o las transferencias generales son más eficientes que los impuestos o los subsidios para bienes individuales.

Productividad marginal decreciente *Véase* Producto marginal.

Producto marginal (*PMg*) El producto adicional que resulta de una unidad más de un factor dado, al tiempo que todos los demás factores se mantienen constantes. Normalmente se supone que la productividad marginal de un factor disminuye a medida que se van empleando unidades adicionales de ese factor, al tiempo que todos los demás factores se mantienen fijos. Si $q = f(k, l)$, $PMg_l = \partial q/\partial l$.

Relación principal-agente Situación que se presenta cuando una persona (el principal) contrata a otra (el agente) para que tome decisiones económicas.

Rendimientos a escala Clasificación de la función de producción, la cual registra la forma en que ésta responde a los incrementos proporcionales en todos los factores. Si un incremento proporcional de todos los factores provoca que la producción aumente en una proporción menor, se dice que la función de producción presenta rendimientos decrecientes a escala. Si la producción aumenta en proporción mayor que los factores, la función de producción exhibe rendimientos crecientes a escala. Los rendimientos constantes a escala representan el punto intermedio, donde tanto los factores como los productos aumentan en igual proporción. En términos matemáticos, si $f(mk, ml) = m^k f(k, l)$, $k > 1$ implica rendimientos crecientes, $k = 1$ rendimientos constantes y $k < 1$ rendimientos decrecientes.

Rendimientos constantes a escala *Véase* Rendimientos a escala.

Rendimientos crecientes a escala *Véase* Rendimientos a escala.

Rendimientos decrecientes a escala *Véase* Rendimientos a escala.

Renta Pagos a un factor de la producción que exceden a la cantidad necesaria para mantenerlo en su empleo actual.

Respuesta de la oferta Incrementos de la producción provocados por un cambio en las condiciones de la demanda y los precios de mercado. Por lo general se marca una diferencia entre las respuestas de la oferta a corto y a largo plazos.

Riesgo moral Efecto que la cobertura de un seguro tiene en las decisiones de los individuos en tanto de tomar medidas que podrían modificar la probabilidad de sufrir pérdidas.

Salario El costo de contratar a un trabajador durante una hora. Denotada por w en el texto.

Selección adversa Situación en la cual los compradores y los vendedores cuentan con información asimétrica respecto a las transacciones de mercado; de hecho, las operaciones que se realicen podrían estar sesgadas a favor del agente que tenga mejor información.

Senda de expansión El punto donde se encuentran las combinaciones de factores productivos que minimizan los costos y que una empresa elegirá para producir en distintos niveles de producción (cuando los precios de los factores productivos se mantienen constantes).

Señalización Medidas tomadas por los individuos en los mercados, las cuales se caracterizan por la selección adversa en un intento por identificar las categorías de sus verdaderos riesgos.

Sustitutos (brutos) Dos bienes relacionados de modo que si el precio de uno aumenta, se demandará mayor cantidad del otro. Es decir x y y son sustitutos brutos si $\partial x/\partial p_y > 0$. *Véase también* Complementos; Ecuación de Slutsky.

Sustitutos (netos) Dos bienes relacionados de modo que si el precio de uno aumenta se demandará mayor cantidad del otro si la utilidad se mantiene constante. Es decir, x y y son sustitutos netos si

$$\partial x/\partial p_y \big|_{U=\bar{U}} > 0.$$

La posibilidad de sustitución es simétrica porque

$$\partial x/\partial p_y \big|_{U=\bar{U}} = \partial y/\partial p_x \big|_{U=\bar{U}}.$$

Véase también Complementos; Ecuación de Slutsky.

Tasa de alquiler El costo de contratar una máquina durante una hora. Denotado por v en este libro.

Tasa de descuento Aquella a la cual los bienes actuales se pueden transformar en bienes futuros. Por ejemplo, una tasa de descuento de 10% por periodo implica que el abandonar una unidad de producto en este periodo producirá 1.10 unidades de producto en el siguiente periodo.

Tasa de transformación del producto (*TTP*) Aquella a la cual un producto se puede intercambiar por otro en el proceso de producción, al tiempo que las cantidades totales de factores se mantienen constantes. La *TTP* es el valor absoluto de la pendiente de la frontera de posibilidades de producción.

Tasa marginal de sustitución (*TMS*) Tasa a la cual un individuo está dispuesto a intercambiar un bien por otro, al tiempo que permanece en la misma situación de bienestar. La *TMS* es el valor absoluto de la pendiente de una curva de indiferencia. $TMS = -dy/dx\big|_{U=\bar{U}}$.

Tasa marginal de sustitución decreciente *Véase* Tasa marginal de sustitución.

Tasa técnica de sustitución (*TTS*) Aquella a la cual un factor puede ser intercambiado por otro en el proceso productivo al mismo tiempo que se mantiene constante la producción. La *TTS* es el valor absoluto de la pendiente de una isocuanta.

$$TTS = -\frac{dk}{dl}\bigg|_{q = q_0}.$$

Teorema de Coase Resultado que se atribuye a R. Coase: la asignación eficiente de los recursos en presencia de una externalidad se puede conseguir recurriendo a las negociaciones entre las partes interesadas, si dichas negociaciones no tienen costo alguno.

Teorema de Euler En matemáticas: si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es homogéneo de grado k, entonces

$$f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n = kf(x_1, \ldots, x_n).$$

Teorema de la envolvente Resultado matemático: podemos encontrar la variación del valor máximo de una función, producida por una variación de un parámetro de la función, si diferenciamos parcialmente la función con respecto al parámetro (tomando todas las demás variables en sus valores óptimos).

Teorema de la imposibilidad de Arrow Resultado fundamental de la teoría de las elecciones sociales: toda regla de las decisiones sociales violará, cuando menos, uno de los axiomas de las elecciones racionales que planteó Arrow.

Tomador de precios (precio aceptante) Agente económico que toma decisiones partiendo del supuesto de que éstas no tendrán efecto alguno en los precios actuales en el mercado.

Utilidad esperada Utilidad promedio que se espera obtener en una situación de riesgo. Si existen n resultados, $x_1, \ldots, x_n$ con probabilidades $p_1, \ldots, p_n$ ($\sum p_i = 1$), entonces la utilidad esperada estará dada por

$$E(U) = p_1U(x_1) + p_2U(x_2) + \ldots + p_nU(x_n).$$

Utilidad marginal (*UMg*) La utilidad extra que recibe un individuo cuando consume una unidad más de un bien determinado.

Utilidad Von Neumann-Morgenstern Clasificación de los resultados en situaciones de incertidumbre, de modo que los individuos eligen de entre estos resultados con base en los valores de su utilidad esperada.

Valor presente neto (*VPN*) El valor actual de un monto de dinero que será pagadero en algún momento futuro. Toma en cuenta el efecto de los pagos de intereses.

Variación compensada La compensación necesaria para restaurar el nivel original de utilidad de una persona cuando cambian los precios.

Variación de un impuesto Respuesta del mercado a la imposición de un gravamen que provoca que la incidencia del impuesto recaiga en un agente económico que no es quien de hecho paga el impuesto.

Índice

Los nombres de autores se presentan en cursivas, los términos del glosario en negritas.

D

E

G

R

S

T

La novena edición de este libro, líder en la materia, ofrece al lector la más clara y cuidadosa presentación de los conceptos de la teoría microeconómica. Posee un equilibrio ideal entre el nivel de rigor matemático requerido tanto para niveles avanzados como para quienes se inician en el estudio de la microeconomía moderna y proporciona además la oportunidad de trabajar de manera directa con instrumentos teóricos, aplicaciones reales y los desarrollos más recientes en el estudio de esta interesante materia.

Entre las características fundamentales de esta edición destacan las siguientes:

- La inclusión de las modernas teorías de la información, así como de la teoría de juegos.
- Un amplio uso del cálculo y atención en los detalles técnicos, mediante ejemplos matemáticos y gráficos en el desarrollo de los temas.
- Se incorporan numerosos ejemplos numéricos resueltos, lo que facilita la adecuada comprensión de la teoría expuesta.
- Abundantes problemas al final de cada capítulo, mismos que se dividen en básicos y en ampliaciones que incorporan teoría adicional por medio del uso de la evidencia empírica.
- Numerosas secciones breves sobre temas como bienes durables, aversión al riesgo y equilibrio del mercado de trabajo.
- Se proveen interesantes aplicaciones en Internet para cada capítulo.
- Un sitio web http://nicholson.swlearning.com el cual contiene materiales de apoyo que contribuyen a un aprendizaje óptimo.

Todo lo anterior, aunado al enorme prestigio de su autor, hace de este libro el mejor recurso para los estudiosos de la economía que desean colocarse a la vanguardia en el conocimiento y la aplicación de la teoría microeconómica moderna.

CENGAGE Learning™

http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607481407-1
ISBN-10: 607481407-4

9 786074 814071